

第 1 章 はじめに

1.2 次元空間内の距離と計量

空間の重要な性質として、

- 2 点間の距離を決める

事が重要になる。そこで、

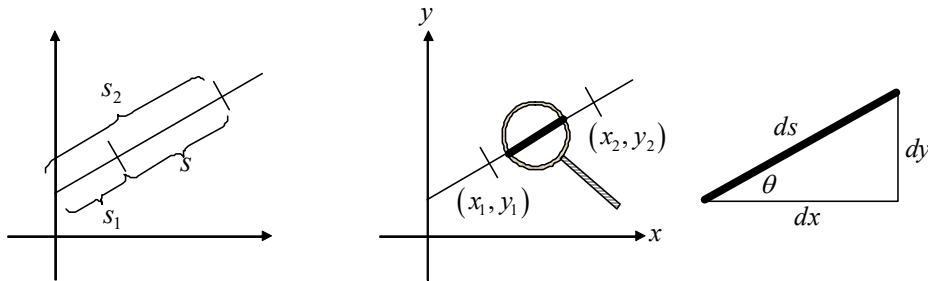
- 距離を s (或いは l)、微小距離は ds (或いは $d\ell$)

で表す。そのとき、2 点間の距離を

$$s = \int_{s_1}^{s_2} ds \quad \left(l = \int_{\ell_1}^{\ell_2} d\ell \right) \quad (1.1)$$

で定義する。

下図のような平面 (2 次元空間) :



の場合には、**直交座標** (x, y) を用いて $s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ であるが、(1.1)は

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (1.2)$$

より

$$s = \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (1.3)$$

である。図より

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \quad (1.4)$$

を用いて

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\tan \theta)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\cos \theta} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \theta} \quad (1.5)$$

ここで、

$$\cos \theta = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (1.6)$$

を代入して、

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.7)$$

と期待通りの結果を得る。

では、(1.2)が**極座標** (r, θ) の場合を考えてみよう。極座標では

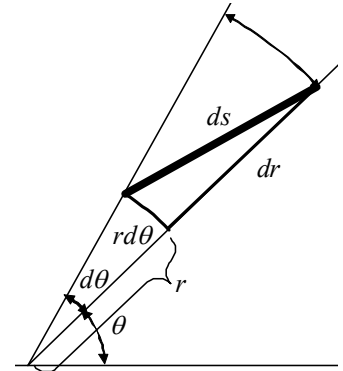
$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (1.8)$$

なので、

$$\begin{aligned} dx &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta \\ dy &= dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (1.9)$$

である。従って、

$$\begin{aligned} (dx)^2 + (dy)^2 &= (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta)^2 + (dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta)^2 \\ &= (dr \cos \theta)^2 - 2dr \cos \theta r \sin \theta d\theta + (r \sin \theta d\theta)^2 \\ &\quad + (dr \sin \theta)^2 + 2dr \sin \theta r \cos \theta d\theta + (r \cos \theta d\theta)^2 \\ &= (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$



を得る。得られた結果は、右図より求める事ができる。ここで

- 円弧は曲線であるが、 $dr \rightarrow 0$, $d\theta \rightarrow 0$ の場合に直線と見なせる事を用いている。

以上のように、座標の取り方により、 $(ds)^2$ の表記が変わる。この表記の取り方に依存しない書き方として、

- 計量： \mathbf{g}

と呼ばれる行列を導入すると良い。(1.2)と(1.10)は行列表記をすると

$$(ds)^2 = \begin{cases} (dx)^2 + (dy)^2 = (dx, dy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = d\mathbf{x}^T \mathbf{g} d\mathbf{x} \Leftarrow \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 = (dr, d\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} = d\mathbf{x}^T \mathbf{g} d\mathbf{x} \Leftarrow \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.11)$$

つまり、

$$(ds)^2 = d\mathbf{x}^T \mathbf{g} d\mathbf{x} \quad (1.12)$$

と表示できる。通常、行列要素を表記した

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^2 dx^i \mathbf{g}_{ij} dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{和記号の省略}) \quad (1.13)$$

を用いる。¹ また、逆行列は \mathbf{g}^{-1} で表わすと

$$I = \mathbf{g} \Rightarrow (I)_i^j (= \delta_i^j) = \sum_{k=1}^2 (\mathbf{g}^{-1})_{ik} (\mathbf{g})_{kj} = \sum_{k=1}^2 g^{ik} g_{kj} = g^{ik} g_{kj} \quad (\text{和記号の省略}) \quad (1.14)$$

¹ 以降、 ds^2 のように、 $(ds)^2$ を ds^2 と表記する。

と表せる。ここで、行列要素の $(\mathbf{g})_{ij}, (\mathbf{g}^{-1})_{ij}, (I)_i^j$

- $(\mathbf{g})_{ij} = g_{ij}$ は下付添え字
- $(\mathbf{g}^{-1})_{ij} = g^{ij}$ は上付添え字
- $(I)_i^j = \delta_i^j$ は上下付添え字

になることに注意する。これは、相対論では重要な違いになる。従って

$$\mathbf{g}^{ik} \mathbf{g}_{kj} = \delta_j^i \quad (1.15)$$

この表記では、(1.13)は

$$(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^2 dx_i (\mathbf{g}^{-1})^{ij} dx_j = g^{ij} dx_i dx_j \quad (\text{和記号の省略}) \quad (1.16)$$

で表わす事もできる。ここで、

$$dx_i = (\mathbf{g})_{ij} dx^j \Rightarrow dx_i = g_{ij} dx^j \quad (\text{和記号の省略}) \quad (1.17)$$

である。

II.3 次元空間内の距離と 2 次元平面

(1.13)の表記の場合、 $i, j = 1, 2, 3$ にすると立体空間 (3 次元空間) での曲線の長さになる。(1.2)に対応して直交座標 (x, y, z) を用いると、

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 dx^i \mathbf{g}_{ij} dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \Leftarrow \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, dx = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

になることは容易に分かる。では、極座標 (r, ϕ, θ) の場合はどうなるであろう？この場合、

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.19)$$

であるので、(1.9)と同様にして

$$\begin{aligned} dx &= dr \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta d\theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ dy &= dr \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta d\theta \sin \phi + r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ dz &= dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (1.20)$$

である。従って、

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (dr \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta d\theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi d\phi)^2 \\ &\quad + (dr \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta d\theta \sin \phi + r \sin \theta \cos \phi d\phi)^2 + (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (dr \sin \theta \cos \phi)^2 + (r \cos \theta d\theta \cos \phi)^2 + (r \sin \theta \sin \phi d\phi)^2 \\
&\quad + 2 \left(dr \sin \theta \cos \phi \cdot r \cos \theta d\theta \cos \phi - \cancel{r \cos \theta d\theta \cos \phi \cdot r \sin \theta \sin \phi d\phi} - \cancel{dr \sin \theta \cos \phi \cdot r \sin \theta \sin \phi d\phi} \right) \\
&\quad + (dr \sin \theta \sin \phi)^2 + (r \cos \theta d\theta \sin \phi)^2 + (r \sin \theta \cos \phi d\phi)^2 \\
&\quad + 2 \left(dr \sin \theta \sin \phi \cdot r \cos \theta d\theta \sin \phi + \cancel{r \cos \theta d\theta \sin \phi \cdot r \sin \theta \cos \phi d\phi} + \cancel{dr \sin \theta \sin \phi \cdot r \sin \theta \cos \phi d\phi} \right) \\
&\quad + (dr \cos \theta)^2 + (r \sin \theta d\theta)^2 - 2dr \cos \theta \cdot r \sin \theta d\theta \\
&= (dr \sin \theta)^2 \cos^2 \phi + (r \cos \theta d\theta)^2 \cos^2 \phi + (r \sin \theta d\phi)^2 \sin^2 \phi \\
&\quad + (dr \sin \theta)^2 \sin^2 \phi + (r \cos \theta d\theta)^2 \sin^2 \phi + (r \sin \theta d\phi)^2 \cos^2 \phi \\
&\quad + (dr \cos \theta)^2 + (r \sin \theta d\theta)^2 \\
&\quad + 2(\sin \theta \cdot r \cos \theta \cos^2 \phi dr d\theta + \sin \theta \cdot r \cos \theta \sin^2 \phi dr d\theta) - 2 \cos \theta \cdot r \sin \theta dr d\theta \\
&= (dr \sin \theta)^2 + (r \cos \theta d\theta)^2 + (r \sin \theta d\phi)^2 + (dr \cos \theta)^2 + (r \sin \theta d\theta)^2 \\
&\quad + \cancel{2 \sin \theta \cdot r \cos \theta dr d\theta} - \cancel{2 dr \cos \theta \cdot r \sin \theta dr d\theta} \\
&= (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \tag{1.21}
\end{aligned}$$

を得る。従って、極座標の場合は

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \tag{1.22}$$

である。(1.11)対応して

$$ds^2 = d\mathbf{x}^T \mathbf{g} d\mathbf{x} = g_{ij} dx^i dx^j = \begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 \leftarrow \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\ dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \leftarrow \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \end{cases} \tag{1.23}$$

になる。

曲がった空間として半径 R の球面を考えると、(1.23)の極座標表示において $dr = 0$ なので、

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = d\mathbf{x}^T \mathbf{g} d\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{g} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

一方、同じ球面を、

- θ の代わりに、北極頭上の無限遠方から見た半径 (r)

を用いて表すと

$$r = R \sin \theta \tag{1.25}$$

なので

$$dr = R \cos \theta d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{R \cos \theta} dr = \frac{1}{R \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} dr = \frac{1}{R \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} dr \tag{1.26}$$

より

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = \left(\frac{R^2}{R \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} dr \right)^2 + (R \sin \theta)^2 (d\phi)^2 = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (1.27)$$

がわかる。以上から、球面では

$$ds^2 = \begin{cases} R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = d\mathbf{x}^T \mathbf{g} d\mathbf{x} \Leftarrow \mathbf{g} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \\ \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 = d\mathbf{x}^T \mathbf{g} d\mathbf{x} \Leftarrow \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]^{-1} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dr \\ d\phi \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1.28)$$

を得る。(1.28)では同じ球面上の 2 点の微小距離を違った座標を用いて表している。もともと同じなので、種々の量は同じ結果を与える。例えば、球面の面積 S は $4\pi R^2$ であるが・・・

【 $ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ の場合】

面積素 dS は

$$dS = (Rd\theta)(R \sin \theta d\phi) \quad (1.29)$$

なので、

$$\begin{aligned} S &= \int dS = \int_0^\pi R d\theta R \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = R^2 [-\cos \theta]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi} \\ &= -R^2 (\cos \pi - \cos 0)(2\pi - 0) = -R^2 (-1 - 1)2\pi = 4\pi R^2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

を得る。一方、

$$\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]^{-1} (dr)^2 + r^2 (d\phi)^2 \text{ の場合】}$$

面積素 dS は

$$dS = \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} (rd\phi) \quad (1.31)$$

なので、

$$S = \int dS = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} \int_0^{2\pi} rd\phi = \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}} 2\pi \quad (1.32)$$

である。ここで、(1.25)の変数変換を行えばに一致するので、計算するまでもないが、演習のため

$$t = \frac{r^2}{R^2} \quad (1.33)$$

とすると

$$\frac{rdr}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}} = \frac{1}{2} \frac{R^2 dt}{\sqrt{1-t}} \quad (1.34)$$

より、

$$\int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}} = R^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = R^2 \left[-2\sqrt{1-t} \right]_0^1 = -2R^2(0-1) = 2R^2 \quad (1.35)$$

なので、(1.32)より

$$S = 2R^2 2\pi = 4\pi R^2 \quad (1.36)$$

を得る。

III.4 次元空間と 3 次元空間の球

3 次元の球は、

1. ユークリッド空間の球

$$\triangleright x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (= \text{変数})$$

2. 4 次元ユークリッド空間に埋め込まれた 3 次元球 (超球面)

$$\triangleright w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (= \text{定数})$$

3. 4 次元ミンコフスキー空間に埋め込まれた 3 次元球 (超擬球面)

$$\triangleright w^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = R^2 (= \text{定数: 負にもなるので注意する})$$

の 3 種類ある。

【4 次元ユークリッド空間に埋め込まれた 3 次元球】

超球面は、

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (1.37)$$

なので、(1.19)の 3 次元での変数変換を参考にして、半径 R での極座標 (R, ϕ, θ, χ) として、

$\cos^2 \chi + \sin^2 \chi = 1$ に注意して、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \sin^2 \chi \\ w^2 &= R^2 \cos^2 \chi \end{aligned} \quad (1.38)$$

とすれば、(1.38)を自動的に満たす事がわかる。従って、

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \phi \sin \chi \\ y &= R \sin \theta \sin \phi \sin \chi \\ z &= R \cos \theta \sin \chi \\ w &= R \cos \chi \end{aligned} \quad (1.39)$$

として、

$$ds^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.40)$$

で与えられる ds^2 を求める。(1.20)と(1.21)の計算を繰り返すと

$$ds^2 = R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \chi d\phi^2) \quad (1.41)$$

を得る。ここで、(1.22)を参考にして

$$Rd\chi = dr \quad (1.42)$$

を定義すると

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.43)$$

を得る。

【4次元ミンコフスキー空間に埋め込まれた3次元球】

超擬球面は、

$$w^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = R^2 \quad (1.44)$$

なので、(1.37)と同様に、半径 R での極座標 (R, ϕ, θ, χ) として、 $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$ に注意して、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \sinh^2 \chi \\ w^2 &= R^2 \cosh^2 \chi \end{aligned} \quad (1.45)$$

とすれば、(1.45)を自動的に満たす事がわかる。従って、

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \phi \sinh \chi \\ y &= R \sin \theta \sin \phi \sinh \chi \\ z &= R \cos \theta \sinh \chi \\ w &= R \cosh \chi \end{aligned} \quad (1.46)$$

として、

$$ds^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.47)$$

で与えられる ds^2 を求める。超球面の場合と同様に、(1.20)と(1.21)の計算を繰り返す

$$ds^2 = R^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \theta \sinh^2 \chi d\phi^2) \quad (1.48)$$

を得る。(1.42)を用いると

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.49)$$

【 ds^2 の性質】

以上から、

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{球}) \quad (1.50)$$

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{超球面}) \quad (1.51)$$

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{超擬球面}) \quad (1.52)$$

を得る。

これらを統一した表記にするために

$$r_1 = r \quad (\text{球}), \quad r_1 = R \sin \frac{r}{R} \quad (\text{超球面}), \quad r_1 = R \sinh \frac{r}{R} \quad (\text{超擬球面}) \quad (1.53)$$

の変数変換を施すと、

$$ds^2 = dr_1^2 + r_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{球}) \quad (1.54)$$

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$\begin{aligned} \Leftarrow dr_1 &= dR \sin \frac{r}{R} = R \frac{1}{R} \cos \frac{r}{R} dr \rightarrow dr = \frac{dr_1}{\cos \frac{r}{R}} = \frac{dr_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_1}{R}\right)^2}} = \left(1 - \left(\frac{r_1}{R}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} dr_1 \quad (\text{超球面}) \\ &= \left(1 - \left(\frac{r_1}{R}\right)^2\right)^{-1} dr_1^2 + r_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{超擬球面})$$

$$\Leftarrow dr_1 = dR \sinh \frac{r}{R} = R \frac{1}{R} \cosh \frac{r}{R} dr$$

$$\Leftarrow dr = \frac{dr_1}{\cosh \frac{r_1}{R}} = \frac{dr_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{R}\right)^2}} = \left(1 + \left(\frac{r_1}{R}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} dr_1 \quad (1.56)$$

$$= \left(1 + \left(\frac{r_1}{R}\right)^2\right)^{-1} dr_1^2 + r_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

以上から、次のようにまとめる事ができる：

$$ds^2 = \frac{dr_1^2}{1 - \eta \left(\frac{r_1}{R}\right)^2} + r_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \Leftarrow \eta = \begin{cases} 0 \dots \text{球} \\ 1 \dots \text{超球面} \\ -1 \dots \text{超擬球面} \end{cases} \quad (1.57)$$

である。ここで、

$$r_1 \text{ を } R \text{ を単位にして測る約束 (つまり、} r_1' = \frac{r_1}{R} \text{ で書き換える事に対応)}$$

にすれば、

$$ds^2 = R^2 \left[\frac{dr_1'^2}{1 - \eta r_1'^2} + r_1'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \Leftarrow \eta = \begin{cases} 0 \dots \text{球} \\ 1 \dots \text{超球面} \\ -1 \dots \text{超擬球面} \end{cases} \quad (1.58)$$

を得る。つまり、(1.53)の代わりに

$$r_1 = \frac{r}{R} \quad (\text{球}), \quad r_1 = \sin \frac{r}{R} \quad (\text{超球面}), \quad r_1 = \sinh \frac{r}{R} \quad (\text{超擬球面}) \quad (1.59)$$

である。

また、同様に

$$r_2 = \frac{r}{R} \quad (\text{球}), \quad r_2 = 2 \tan \frac{r}{2R} \quad (\text{超球面}), \quad r_2 = 2 \tanh \frac{r}{2R} \quad (\text{超擬球面}) \quad (1.60)$$

の変数変換を施すと、

$$ds^2 = R^2 \left[dr_1^2 + r_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (\text{球}) \quad (1.61)$$

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{超球面})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow dr_2 &= d \left(2 \tan \frac{r}{2R} \right) = 2 \frac{1}{2R \cos^2 \frac{r}{2R}} dr \rightarrow dr = R \cos^2 \frac{r}{2R} dr_2 \\ \Leftrightarrow \sin^2 \frac{r}{R} &= \left(2 \cos \frac{r}{2R} \sin \frac{r}{2R} \right)^2 = 4 \cos^2 \frac{r}{2R} \sin^2 \frac{r}{2R} \\ &= \left(R \cos^2 \frac{r}{2R} dr_2 \right)^2 + R^2 4 \cos^2 \frac{r}{2R} \sin^2 \frac{r}{2R} \cdot r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= R^2 \cos^4 \frac{r}{2R} \left[dr_2^2 + 4r^2 \tan^2 \frac{r}{2R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \\ \Leftrightarrow \cos^2 \frac{r}{2R} &= \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{r}{2R}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{r_2}{2} \right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{r_2^2}{4}} \\ &= R^2 \left(1 + \frac{r_2^2}{4} \right)^{-2} \left[dr_2^2 + r_2^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \sinh^2 \frac{r}{R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{超擬球面})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow dr_2 &= d \left(2 \tanh \frac{r}{2R} \right) = 2 \frac{1}{2R \cosh^2 \frac{r}{2R}} dr \rightarrow dr = R \cosh^2 \frac{r}{2R} dr_2 \\ \Leftrightarrow \sinh^2 \frac{r}{R} &= \left(2 \cosh \frac{r}{2R} \sinh \frac{r}{2R} \right)^2 = 4 \cosh^2 \frac{r}{2R} \sinh^2 \frac{r}{2R} \\ &= \left(R \cosh^2 \frac{r}{2R} dr_2 \right)^2 + R^2 4 \cosh^2 \frac{r}{2R} \sinh^2 \frac{r}{2R} \cdot r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= R^2 \cosh^4 \frac{r}{2R} \left[dr_2^2 + 4r^2 \tanh^2 \frac{r}{2R} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \\ \Leftrightarrow \cosh^2 \frac{r}{2R} &= \frac{1}{1 - \tanh^2 \frac{r}{2R}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{r_2}{2} \right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{r_2^2}{4}} \\ &= R^2 \left(1 - \frac{r_2^2}{4} \right)^{-2} \left[dr_2^2 + r_2^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \end{aligned} \quad (1.63)$$

以上から、次のようにまとめる事ができる：

$$ds^2 = R^2 \frac{dr_2^2 + r_2^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}{1 + \frac{\eta}{4} r_2^2} \Leftarrow \eta = \begin{cases} 0 \cdots \text{球} \\ 1 \cdots \text{超球面} \\ -1 \cdots \text{超擬球面} \end{cases} \quad (1.64)$$

である。このように、

- $dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ の形の因子を持つ座標系を **一様・等方座標系**

という。

IV. ビッグバン宇宙計量と赤方偏移

3 種類の 3 次元空間として、(1.58) で表される計量がわかった。ここで、半径 R が時間と共に増大するとき、ビッグバン宇宙の計量として採用される。これは、

- フリードマン(Friedmann)・ロバートソン(Robertson)・ウォーカー(Walker)計量 (**FRW 計量**) と呼ばれ、3 次元空間の計量 $d\ell^2$ を

$$d\ell^2 = R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \eta r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \Leftarrow \eta = \begin{cases} 0 \cdots \text{球 (閉じた宇宙)} \\ 1 \cdots \text{超球面} \\ -1 \cdots \text{超擬球面} \end{cases} \quad (1.65)$$

で表すと、時間成分を(1.58)に加えて

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\ell^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr_1^2}{1 - \eta r_1^2} + r_1^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.66)$$

になる。また、

- $R(t)$ を **宇宙の半径**

と見なす。ここで、(1.59) より $r_1 = \frac{r}{R(t)}$ (球)、 $r_1 = \sin \frac{r}{R(t)}$ (超球面)、 $r_1 = \sinh \frac{r}{R(t)}$ (超擬球面)

であったので、改めて、変数を、 r_1 から r にして

$$r = \sigma(\chi) = \begin{cases} \chi \cdots \text{球面} \\ \sin \chi \cdots \text{超球面} \\ \sinh \chi \cdots \text{超擬球面} \end{cases} \quad (1.67)$$

として表すと

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \eta r^2} + \sigma(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \Leftarrow \begin{cases} \eta = 0, r = \sigma(\chi) = \chi \cdots \text{球面} \\ \eta = 1, r = \sigma(\chi) = \sin \chi \cdots \text{超球面} \\ \eta = -1, r = \sigma(\chi) = \sinh \chi \cdots \text{超擬球面} \end{cases} \quad (1.68)$$

と書きかえられる。この座標系の空間成分は、(1.64)とも表わせるので

- 空間成分は **一様・等方座標系**

である。この性質が、

- **FRW 計量** の根幹

を成している。実は、(1.67)の χ は次の積分

$$\chi = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-\eta r^2}} = \begin{cases} r \ (\eta=0) \cdots \text{球面} \\ \sin^{-1} r \ (\eta=1) \cdots \text{超球面} \\ \sinh^{-1} r \ (\eta=-1) \cdots \text{超擬球面} \end{cases} \quad (1.69)$$

により与えられことがわかり、 $r = \dots$ で表すと(1.67)になる。このことから、(1.69)を微分に戻せば、

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1-\eta r^2}} \quad (1.70)$$

がわかる。これを用いると、(1.68)は

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[d\chi^2 + \sigma(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \Leftarrow \begin{cases} \eta=0, \sigma(\chi) = \chi \cdots \text{球面} \\ \eta=1, \sigma(\chi) = \sin \chi \cdots \text{超球面} \\ \eta=-1, \sigma(\chi) = \sinh \chi \cdots \text{超擬球面} \end{cases} \quad (1.71)$$

と与えられる。

遠くの星からの光が、ビッグバンの計量空間(1.71)でどのように地球に到達するかを調べる。ここで光の到達状況を考える。まず、星は一定の方角にあるので、角度 (ϕ, θ) で指定することができて

- 3次元空間 (χ, ϕ, θ) の原点 O ($\chi=0$) にあり $\phi=0, \theta=\frac{\pi}{2}$ にある

事にする。 ϕ と θ が一定の値をとり続けるので、数式で表すと

$$d\phi = d\theta = 0 \quad (1.72)$$

であり、計量空間(1.71)は

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[d\chi^2 + \sigma(\chi)^2 (\cancel{d\theta^2} + \sin^2 \theta \cancel{d\phi^2}) \right] \\ &= c^2 dt^2 - R(t)^2 d\chi^2 \end{aligned} \quad (1.73)$$

で記述できる。星が $\phi=0, \theta=\frac{\pi}{2}$ 地点にあつて、時間 (t)

経過と共に $\chi=0$ ライン上を移動する。星の放つ光は

$$ds^2 = 0 \quad (1.74)$$

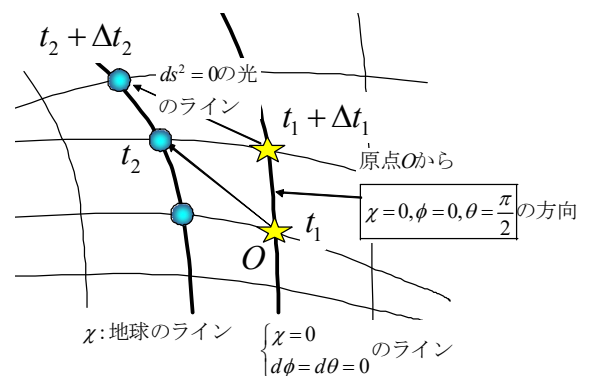
を満たして移動するので、(1.73)より、

$$cdt = R(t) d\chi \quad (1.75)$$

を得る。

図のように、

- 星から t_1 秒目と $t_1 + \Delta t_1$ 秒目に出た光：周期 Δt_1 で発光
- 地球に t_2 秒目と $t_2 + \Delta t_2$ 秒目に到達する光：周期 Δt_2 と観測



とする。このとき、(1.75)の $d\chi = \frac{cdt}{R(t)}$ より

$$\chi = \int d\chi = \int \frac{cdt}{R(t)} \quad (1.76)$$

になる。一方、光は星と地球間の距離 χ を移動するので、どの時刻に出ても星と中の距離は同じ χ であり、数式で表すと

$$\chi = \int_{t_1}^{t_2} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} \frac{cdt}{R(t)} \leftarrow \text{原点 } O(\chi=0) \text{ から星までの距離 } \chi \quad (1.77)$$

である。そこで、

$$f'(t) = \frac{c}{R(t)} \quad (1.78)$$

と置くと

$$\int \frac{cdt}{R(t)} = \int f'(t)dt = f(t) + C \quad (1.79)$$

なので、

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{cdt}{R(t)} = [f(t) + C]_{t_1}^{t_2} = [f(t_2) + C] - [f(t_1) + C] = f(t_2) - f(t_1) \quad (1.80)$$

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} \frac{cdt}{R(t)} = [f(t) + C]_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} = f(t_2 + \Delta t_2) - f(t_1 + \Delta t_1)$$

を得る。今、 $\Delta t_1, \Delta t_2$ が非常に小さいとして、

$$\text{【公式】 } f(t_1 + \Delta t_1) = f(t_1) + f'(t_1)\Delta t_1 \quad (1.81)$$

を用いると

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} \frac{cdt}{R(t)} = f(t_2 + \Delta t_2) - f(t_1 + \Delta t_1) = f(t_2) + f'(t_2)\Delta t_2 - (f(t_1) + f'(t_1)\Delta t_1) \quad (1.82)$$

より、(1.77)は

$$f(t_2) - f(t_1) = f(t_2) + f'(t_2)\Delta t_2 - (f(t_1) + f'(t_1)\Delta t_1) \quad (1.83)$$

なので、

$$f'(t_1)\Delta t_1 = f'(t_2)\Delta t_2 \quad (1.84)$$

を得る。(1.78)を用いれば、最終的に

$$\frac{c}{R(t_1)}\Delta t_1 = \frac{c}{R(t_2)}\Delta t_2 \quad (1.85)$$

を得る。さて、光の振動数 (ν_1 : 星、 ν_2 : 地球) は周期に逆比例し、波長 (λ_1 : 星、 λ_2 : 地球) は周期に比例するので、(1.85)より

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{R(t_2)}{R(t_1)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (1.86)$$

を得る。従って、宇宙が膨張していると、遅れて出た光の方が大きな半径の宇宙になるので、今の場合、地球に到達する時刻 t_2 が遅い時刻なので、 $t_2 > t_1$ より宇宙の半径では、

$$R(t_2) > R(t_1) \quad (1.87)$$

が成立する。この関係を、(1.86)に適用して

$$\boxed{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{R(t_2)}{R(t_1)} > 1} \quad (1.88)$$

がわかる。すなわち、

- 宇宙が膨張していると星の光の波長は、地球上ではより長い波長（赤い方にずれる）として観測される。これを

- **赤方偏移**

という。