粒子の生成・消滅演算子

生成・消滅演算子

粒子の生成消滅を表すために、粒子の個数を表す状態を考える。このとき、粒子の個数は物理量であるので、エルミート(Hermite)演算子で表せる。それを $\hat{N}$ とする。[1] また、粒子を 1 つ消す演算子を $\hat{a}$ 、1 つ作る演算子を $\hat{b}$ とする。$\hat{a},\hat{b}$ の役割を式で表すと、

$$\begin{aligned}\hat{a}\left|n\text{個の粒子}\right\rangle &\propto \left|n-1\text{個の粒子}\right\rangle \\ \hat{b}\left|n\text{個の粒子}\right\rangle &\propto \left|n+1\text{個の粒子}\right\rangle\end{aligned} \tag{1.1}$$

になる。ここで、定義により、

$$n=0,1,2,\cdots \tag{1.2}$$

である。これより、

- $\left|n\text{個の粒子}\right\rangle$ を単に $\left|n\right\rangle$

とすれば、

$$\hat{a}\left|n+1\right\rangle \propto \left|n\right\rangle \Rightarrow \hat{b}\hat{a}\left|n+1\right\rangle \propto \hat{b}\left|n\right\rangle \propto \left|n+1\right\rangle \tag{1.3}$$

なので、

$$\hat{b}\hat{a}\left|n+1\right\rangle \propto \left|n+1\right\rangle \tag{1.4}$$

とわかる。つまり、比例係数を k とすると、

$$\hat{b}\hat{a}\left|n+1\right\rangle = k\left|n+1\right\rangle \overset{\text{同じこと}}{\Rightarrow} \hat{b}\hat{a}\left|n\right\rangle = k\left|n\right\rangle \tag{1.5}$$

と書き直せる。$\hat{b}\hat{a}$ を物理量とするには、

- $\hat{b}\hat{a}$ はエルミート(Hermite)演算子

になる必要があり（**【問題 1】**物理量は何故、エルミート演算子で表わせるか？）、その結果、$\hat{b}\hat{a}$ の固有値が実数になる。従って、

- **k は実数**

になる。$\hat{b}\hat{a}$ はエルミート演算子であるので

$$\left(\hat{b}\hat{a}\right)^{\dagger} = \hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger} = \hat{b}\hat{a} \tag{1.6}$$

より、

$$\hat{b} = \hat{a}^{\dagger} \tag{1.7}$$

が解であることがわかる。これを用いると、$\hat{a},\hat{a}^{\dagger}$ の関係式にも比例係数を導入して

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{a}\left|n\right\rangle = x_{n-1}\left|n-1\right\rangle \\ &\hat{a}^{\dagger}\left|n\right\rangle = y_{n+1}\left|n+1\right\rangle \\ &\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\left|n\right\rangle = k_n\left|n\right\rangle \ \left(k_n:\text{実数}\right)\end{aligned}} \quad \left(\begin{aligned}&x_{n-1},y_{n+1},k_n:n\text{ごとに違う値} \\ &\text{かもしれないので}n\text{に依存}\end{aligned}\right) \tag{1.8}$$

[1]以降、演算子には、$\hat{N}$ のように ^ をつけて表す。

とまとめることができる。

粒子数

次に、$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = k_n|n\rangle$ $\left(k_n : \text{実数}\right)$ の

- $k_n =$ 実数が 0 以上の整数に限られる事

を導く。その結果、

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{1.9}$$

と表され、$\hat{a}^\dagger\hat{a}$ が粒子数として導入できる。まずは、(1.8)より $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を使って

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger\hat{a}\left(\hat{a}^\dagger|n\rangle\right) &= \hat{a}^\dagger\hat{a}\left(y_{n+1}|n+1\rangle\right) = y_{n+1}k_{n+1}|n+1\rangle \\ \hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\right) &= \hat{a}^\dagger\left(k_n|n\rangle\right) = y_{n+1}k_n|n+1\rangle\end{aligned} \tag{1.10}$$

になるので、両辺を互いに引き算して

$$\begin{aligned}&\hat{a}^\dagger\hat{a}\left(\hat{a}^\dagger|n\rangle\right) - \hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\right) = y_{n+1}k_{n+1}|n+1\rangle - y_{n+1}k_n|n+1\rangle \\ &= y_{n+1}\left(k_{n+1} - k_n\right)|n+1\rangle \overset{y_{n+1}|n+1\rangle = \hat{a}^\dagger|n\rangle}{=} \left(k_{n+1} - k_n\right)\hat{a}^\dagger|n\rangle\end{aligned} \tag{1.11}$$

左辺は、

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}\left(\hat{a}^\dagger|n\rangle\right) - \hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\right) = \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]|n\rangle = \hat{a}^\dagger\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]|n\rangle \tag{1.12}$$

なので、(1.11)は

$$\hat{a}^\dagger\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]|n\rangle = \left(k_{n+1} - k_n\right)\hat{a}^\dagger|n\rangle \tag{1.13}$$

すべての $|n\rangle$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ について成立するので、

$$\hat{a}^\dagger\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = \left(k_{n+1} - k_n\right)\hat{a}^\dagger \Rightarrow \left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = k_{n+1} - k_n \tag{1.14}$$

ここで、左辺は n によらずに成立するので、

- $k_{n+1} - k_n$ は n によらない

つまり、

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = k_{n+1} - k_n = \left(n \text{ によらない}\right)\text{定数} \tag{1.15}$$

になる。この定数は 1 にとれるので、[2] $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = k_{n+1} - k_n = 1$ とおける：

$$\boxed{\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1} \tag{1.16}$$

かつ

$$k_{n+1} - k_n = 1 \tag{1.17}$$

[2]仮に、任意の数の $z(>0)$ とすると $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = z$ であるが $\left[\hat{a}/\sqrt{z}, \hat{a}^\dagger/\sqrt{z}\right] = 1$ のように $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ の代わりに $\hat{a}/\sqrt{z}, \hat{a}^\dagger/\sqrt{z}$ を使用すればよい。

である。このとき、(1.12)より

$$\left[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=\hat{a}^\dagger\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}=\hat{a}^\dagger\Rightarrow\boxed{\left[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=\left[\hat{N},\hat{a}^\dagger\right]=\hat{a}^\dagger}\tag{1.18}$$

同様に、(1.18)の†（エルミート共役）を取って

$$\begin{aligned}&\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^\dagger=\left(\hat{a}^\dagger\right)^\dagger=\hat{a}\\&\Rightarrow\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^\dagger=\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}=\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\hat{a}\right]=\hat{a}\Rightarrow\boxed{\left[\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}\right]=\left[\hat{N},\hat{a}\right]=-\hat{a}}\end{aligned}\tag{1.19}$$

に注意する。そこで、(1.17)の $k_{n+1}-k_n=1$ より、両辺の和を取って

$$\begin{aligned}&n=1:\ \cancel{k_1}-k_0=1\\&n=2:\ \cancel{k_2}-\cancel{k_1}=1\\&\quad\vdots\qquad\vdots\\&\qquad k_n-\cancel{k_{n-1}}=1\end{aligned}\quad\Rightarrow k_n=k_0+n\ \left(n=0,1,2,3\cdots\right)\tag{1.20}$$

になるので、

$$k_n=k_0+n\ \left(n=0,1,2,3\cdots\right)\tag{1.21}$$

を得る。ところで、(1.8)：$\hat{a}^\dagger\hat{a}\left|n\right\rangle=k_n\left|n\right\rangle$ $\left(k_n:\text{実数}\right)$ より、

$$\left\langle n\right|\hat{a}^\dagger\hat{a}\left|n\right\rangle=k_n\left\langle n\middle|n\right\rangle\ \text{及び}\ \left\langle n\right|\hat{a}^\dagger\hat{a}\left|n\right\rangle=\left|\hat{a}\left|n\right\rangle\right|^2\geq0\Rightarrow k_n\geq0\tag{1.22}$$

のように $k_n\geq0$ になる。従って、

$$k_n=k_0+n\geq0\ \left(n=0,1,2,3\cdots\right)\tag{1.23}$$

である。このとき、$\left|0\right\rangle$ に対して、

$$\hat{a}\left|n\right\rangle=x_{n-1}\left|n-1\right\rangle\Rightarrow\hat{a}\left|0\right\rangle=x_{-1}\left|-1\right\rangle\tag{1.24}$$

に注意すると、

$$x_{-1}\neq0\ \text{のとき、}\ \hat{a}\left|0\right\rangle\text{は存在しない状態}\left|-1\right\rangle\text{になる}\tag{1.25}$$

なので、不適である。従って

$$x_{-1}=0\tag{1.26}$$

である必要がある。つまり、

$$\hat{a}\left|0\right\rangle=0\tag{1.27}$$

と要請される。従って、(1.22)を $n=0$ の $\left|0\right\rangle$ に適用すると、(1.27)を用いて

$$\begin{aligned}&\left\langle 0\right|\hat{a}^\dagger\hat{a}\left|0\right\rangle=k_0\overbrace{\left\langle 0\middle|0\right\rangle}^{=1}=k_0\\&\left\langle 0\right|\hat{a}^\dagger\hat{a}\left|0\right\rangle=\left|\hat{a}\left|0\right\rangle\right|^2=0\end{aligned}\tag{1.28}$$

より、

$$k_0 = 0 \tag{1.29}$$

である。従って、(1.23)は、

$$k_n = k_0 + n = n \geq 0 \tag{1.30}$$

であり

- $n \geq 0$ を満たす整数： $n = 0,1,2,3\cdots$

より自動的に成り立つことがわかる。以上から、

$$\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = n|n\rangle \tag{1.31}$$

を得る。その結果、$\hat{a}^\dagger \hat{a}$ を**粒子数を表す演算子** $\hat{N}$ とみなすことができ、

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}\\&\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle\end{aligned}} \tag{1.32}$$

は、その固有値が n になる。

粒子数の増減

次に、粒子数の増減を表す(1.8)の x_{n-1}, y_{n+1} ：

$$\begin{aligned}&\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle \cdots 1\ \text{減少}\\&\hat{a}^\dagger|n\rangle = y_{n+1}|n+1\rangle \cdots 1\ \text{増加}\end{aligned} \tag{1.33}$$

を求める。 x_{n-1} は

$$\langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle \overset{\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle}{=} |x_{n-1}|^2 \langle n-1|n-1\rangle = n\langle n|n\rangle \tag{1.34}$$

なので、

$$\langle n-1|n-1\rangle = \langle n|n\rangle = 1 \tag{1.35}$$

より、

$$|x_{n-1}|^2 = n \Rightarrow x_{n-1} = \sqrt{n} \tag{1.36}$$

がわかる。従って、 x_{-1} は、 $n = 0$ なので、自動的に(1.26)の $x_{-1} = 0$ をみたす。また、$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$ を使うと、

$$\begin{aligned}\langle n|\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right]|n\rangle &\overset{\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=1}{=} \langle n|n\rangle = 1\\&= \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle - \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle - n\langle n|n\rangle\\&\overset{\langle n|n\rangle = 1}{=} \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle - n(=1)\end{aligned} \tag{1.37}$$

なので、

$$\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = n+1 \tag{1.38}$$

を得る。一方、y_{n+1} は

$$\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \left|\hat{a}^\dagger|n\rangle\right| \overset{\hat{a}^\dagger|n\rangle = y_{n+1}|n+1\rangle}{=} \left|y_{n+1}|n+1\rangle\right|^2 = n+1 \tag{1.39}$$

なので、

$$|y_{n+1}|^2 = n+1 \Rightarrow y_{n+1} = \sqrt{n+1} \tag{1.40}$$

がわかる。以上から、

$$\boxed{\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,\ \ \hat{a}^\dagger|n\rangle = y_{n+1}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle} \tag{1.41}$$

以上から、

$$\boxed{\begin{array}{l}\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=1,\ \ \hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle,\ \ \hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle,\ \ \hat{N}|n\rangle=n|n\rangle \\ \left[\hat{N},\hat{a}^\dagger\right]=\hat{a}^\dagger,\ \left[\hat{N},\hat{a}\right]=-\hat{a}\end{array}} \quad \left(\hat{N}=\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) \tag{1.42}$$

になる。ここで、

$$\boxed{\hat{a}|0\rangle = 0} \tag{1.43}$$

に注意する。N 個の粒子のある状態 $|n\rangle$ は、$\hat{a}^\dagger|n-1\rangle = \sqrt{n}|n\rangle\left(\Leftarrow \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle\right)$ 用いると

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}|n\rangle = \hat{a}^\dagger|n-1\rangle \text{の両辺に} \sqrt{n-1} \text{を掛けて}\cdots \\
&\Rightarrow \sqrt{n}\sqrt{n-1}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\sqrt{n-1}|n-1\rangle \overset{\sqrt{n-1}|n-1\rangle=\hat{a}^\dagger|n-2\rangle}{=} \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|n-2\rangle = \left(\hat{a}^\dagger\right)^2|n-2\rangle \\
&\Rightarrow \sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-2}|n\rangle = \left(\hat{a}^\dagger\right)^2\sqrt{n-2}|n-2\rangle \overset{\sqrt{n-2}|n-2\rangle=\hat{a}^\dagger|n-3\rangle}{=} \left(\hat{a}^\dagger\right)^2\hat{a}^\dagger|n-3\rangle = \left(\hat{a}^\dagger\right)^3|n-3\rangle \\
&\vdots \\
&\Rightarrow \sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-2}\cdots\sqrt{n-k}|n\rangle = \left(\hat{a}^\dagger\right)^{k+1}|n-(k+1)\rangle \ \ \left(n-(k+1)\geq 0\right)
\end{aligned} \tag{1.44}$$

のように変形できるので、$|n-(k+1)\rangle = |0\rangle$ とすれば、$k = n-1$ なので、

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-2}\cdots\sqrt{n-(n-1)}|n\rangle = \left(\hat{a}^\dagger\right)^{(n-1)+1}|n-((n-1)+1)\rangle \\
&\Rightarrow \sqrt{n!}|n\rangle = \left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle
\end{aligned} \tag{1.45}$$

を得る。従って

$$\boxed{|n\rangle = \frac{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle} \tag{1.46}$$

がわかる。

粒子群のエネルギー

生成された粒子：$\hat{a}^\dagger|0\rangle$ の持つ粒子のエネルギーを ε とすれば、そのエネルギーを表わすハミルトニアン $\hat{H}$ は、

$$\hat{H} = \varepsilon \hat{N} \left(= \varepsilon \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \right) \tag{1.47}$$

と期待できる。実際、$|n\rangle$ に対して、

$$\hat{H}|n\rangle = \varepsilon \hat{N}|n\rangle = \varepsilon n|n\rangle \tag{1.48}$$

より、$n\varepsilon$ になり、n 個の粒子のエネルギーを正しく表わす。色々な種類の粒子がいる場合には、粒子の区別を下付添え字、$k = 1,2,3,\cdots,K$、であらわすと、(1.47)を拡張して

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^{K} \varepsilon_i \hat{N}_i \tag{1.49}$$

である。当然の結果として、粒子が無い $\hat{N}|0\rangle = 0$ の状態 $|0\rangle$ のエネルギーは 0 になる。この状態を真空と定義する。つまり、

- 真空 $|0\rangle$ のエネルギーは 0

である。

量子力学と真空のエネルギー

量子力学では、位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の間に

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \tag{1.50}$$

の関係が表れる。$\hat{x}, \hat{p}$ がエルミート演算子なので、このエルミート演算子を使って、$\hat{a}$ を表す事ができる。この事は、複素数（z）が 2 つの実数（x, y）を用いて

$$z = x + iy \tag{1.51}$$

$$z^* = x - iy \tag{1.52}$$

と表わせる事に対応している。演算子もこの複素数と対比することができ

- $\hat{a}$・・・複素数（z）に対応
- 2 つのエルミート演算子 $\hat{x}, \hat{p}$・・・2 つの実数（x, y）に対応

が成り立つので、(1.51)に習って、2 つの実数（x, y）に対応して、係数を実数 α, β とすれば、2 つのエルミート演算子として（$\alpha\hat{x}, \beta\hat{p}$）と選ぶことができ

$$\overbrace{\hat{a}}^{z} = \overbrace{\alpha\hat{x}}^{x} + i\overbrace{\beta\hat{p}}^{y} \quad (\alpha, \beta : \text{実数}) \tag{1.53}$$

$$\overbrace{\hat{a}^{\dagger}}^{z^*} = \overbrace{\alpha\hat{x}}^{x} - i\overbrace{\beta\hat{p}}^{y} \quad (\alpha, \beta : \text{実数}) \tag{1.54}$$

と表わせる。そのとき

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}\right] &= \left[\alpha\hat{x} + \beta i\hat{p}, \alpha\hat{x} - \beta i\hat{p}\right] = \left[\alpha\hat{x}, -\beta i\hat{p}\right] + \left[\beta i\hat{p}, \alpha\hat{x}\right] = -\alpha\beta i\left[\hat{x}, \hat{p}\right] + \alpha\beta i\left[\hat{p}, \hat{x}\right] \\ &= -2\alpha\beta i\left[\hat{x}, \hat{p}\right] = 2\alpha\beta\hbar \end{aligned} \tag{1.55}$$

なので、$2\alpha\beta\hbar = 1$ のとき、自動的に $\left[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}\right] = 1$ が導かれる。つまり、

$$\hat{a} = \alpha\hat{x} + \beta i\hat{p}, \;\; \hat{a}^{\dagger} = \alpha\hat{x} - \beta i\hat{p} \;\; (2\alpha\beta\hbar = 1) \tag{1.56}$$

がわかる。このとき、粒子演算子 $\hat{N}$ は

$$\begin{aligned}\hat{N} &= \hat{a}^\dagger\hat{a} = \left(\alpha\hat{x} - \beta i\hat{p}\right)\left(\alpha\hat{x} + \beta i\hat{p}\right) = \alpha^2\hat{x}^2 + \beta^2\hat{p}^2 + i\alpha\beta\left(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}\right) \\ &= \alpha^2\hat{x}^2 + \beta^2\hat{p}^2 + i\alpha\beta\left[\hat{x},\hat{p}\right] = \alpha^2\hat{x}^2 + \beta^2\hat{p}^2 - \alpha\beta\hbar \overset{2\alpha\beta\hbar=1}{=} \alpha^2\hat{x}^2 + \beta^2\hat{p}^2 - \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.57}$$

なので、

$$\alpha^2\hat{x}^2 + \beta^2\hat{p}^2 = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} = \hat{N} + \frac{1}{2} \tag{1.58}$$

がわかる。

調和振動子

一方、調和振動子のエネルギーは

$$E = \frac{m}{2}v^2 + U = \frac{1}{2m}p^2 + U \quad \left(U = \frac{1}{2}kx^2 \Leftrightarrow F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{角速度}\right) \tag{1.59}$$

と知っているので、この量子力学版は

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}k\hat{x}^2 \tag{1.60}$$

である。すなわち、比例係数を C として、(1.58)と比較すれば

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = C\left(\alpha^2\hat{x}^2 + \beta^2\hat{p}^2\right) = C\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow C\alpha^2 = \frac{1}{2}k, C\beta^2 = \frac{1}{2m} \tag{1.61}$$

なので、

$$\alpha^2 = \frac{k}{2C}, \beta^2 = \frac{1}{2mC} \tag{1.62}$$

を得る。ここで、

$$2\alpha\beta\hbar = 1 \Rightarrow 4\frac{k}{2C}\frac{1}{2mC}\hbar^2 = 1 \Rightarrow \frac{k}{mC^2}\hbar^2 = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{k}{m}}\hbar = \omega\hbar \tag{1.63}$$

とわかるので、

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{2\hbar\omega}} \overset{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}{=} \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}\omega = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}},\ \beta = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \tag{1.64}$$

従って、ハミルトニアンを $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}k\hat{x}^2$ を持つ量子力学に帰着することがわかる：

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}k\hat{x}^2 = \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad \left(\hat{N} = a^\dagger a\right) \\ &\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}i\hat{p},\ \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}i\hat{p}\end{aligned}} \tag{1.65}$$

或いは、

$$\begin{aligned}&\hat{a} + \hat{a}^\dagger = 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\hat{x} \Rightarrow \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right) \\ &\hat{a} - \hat{a}^\dagger = 2\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}i\hat{p} \Rightarrow \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right)\end{aligned} \tag{1.66}$$

より、

$$\boxed{\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^{\dagger}\right),\ \hat{p}=-i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^{\dagger}\right)} \tag{1.67}$$

を得る。

不確定性関係と真空のエネルギー

ここで、エネルギーの表式(1.47)と、(1.65)を比較すると

$$\begin{cases}\hat{H}=\varepsilon\hat{N}\cdots\text{生成・消滅（場の理論）}\\ \hat{H}=\left(\hat{N}+\dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega\cdots\text{量子力学}\end{cases}\quad\Rightarrow\varepsilon=\hbar\omega \tag{1.68}$$

より、$\varepsilon=\hbar\omega$ と考えられるが、$\hat{N}|0\rangle=0$ の真空状態に対して、「量子力学」の場合に、$\frac{1}{2}\hbar\omega$ のエネルギーを持ち、「生成・消滅」の場合のエネルギー＝０とギャップが現れる。このギャップの出現は、

- $\hat{H}=\frac{1}{2m}\hat{p}^2+\frac{1}{2}k\hat{x}^2$ を持つ**量子力学における不確定性関係**

と密接に関係する。そこで、

- $\hat{N}|0\rangle=0$ で定義された真空

のエネルギーを計算する。つまり。

$$\hat{H}|0\rangle=\left(\hat{N}+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|0\rangle=\frac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}|0\rangle\overset{E_{\text{真空}}\text{の定義}}{\equiv}E_{\text{真空}}|0\rangle \tag{1.69}$$

より、

$$E_{\text{真空}}=\frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.70}$$

である。

何もない真空のはずなのに、エネルギーが現れる原因は、不確定性関係

$$\Delta x\Delta p=\frac{\hbar}{2} \tag{1.71}$$

にあることを見る。実際に、

- $\Delta x\Delta p=\frac{\hbar}{2}$ を満たす状態を $|\psi\rangle$ (1.72)

とする時、真空に粒子が無いので、観測値は存在せず

$$\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle\left(\equiv\langle\hat{x}\rangle\right)=0,\ \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle\left(\equiv\langle\hat{p}\rangle\right)=0 \tag{1.73}$$

である。また、ある $\hat{A}$ 演算子に対応して、$(\Delta A)^2=\langle\psi|\left(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle\right)^2|\psi\rangle\left(=\left\langle\left(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle\right)^2\right\rangle\right)$ と定義されるので、Δx と Δp は

$$
\begin{aligned}
(\Delta x)^2 &= \left\langle \left(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle\right)^2 \right\rangle = \langle\hat{x}^2\rangle - \overbrace{\langle\hat{x}\rangle^2}^{=0} = \langle\hat{x}^2\rangle \left(=\langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle\right) \\
(\Delta \hat{p})^2 &= \left\langle \left(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle\right)^2 \right\rangle = \langle\hat{p}^2\rangle - \overbrace{\langle\hat{p}\rangle^2}^{=0} = \langle\hat{p}^2\rangle \left(=\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle\right)
\end{aligned}
\tag{1.74}
$$

と表わせる。従って、(1.65)より

$$
\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \langle\psi|\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}k\hat{x}^2|\psi\rangle = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \tag{1.75}
$$

ここで、より不確定性関係(1.71)を用いて、

$$
\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{\hbar}{2\Delta p}\right)^2 \tag{1.76}
$$

これより

$$
\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle \geq \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.77}
$$

を得る（**【問題２】**(1.77)の $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle \geq \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$ を導け）。つまり、

$$
\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle \geq E_{\text{真空}} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.78}
$$

がわかる。故に、

- $\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}\hbar$ を満たす状態の最低エネルギー状態＝真空

であることがわかる。

真空のエネルギーと繰り込み

場の理論ではこの

- 真空のエネルギー
- 真空中で瞬間的に完了する粒子生成と消滅によるエネルギー

が、物理量（観測量）の理論値に∞の発散を与えてしまう。そのため、

- ∞の理論値を改めて物理量の有限値と見做す

という裏技を使うことにより、

- 物理量の再定義：renormalization

を行う。これを、**繰り込み**という。

簡単な数式で表わしてみる。そこで、物理量 A とすると、

$$
\left.
\begin{aligned}
&A_{\text{実験値}} = 10 \\
&A_{\text{理論値}} = \infty = \overbrace{\lim_{\Lambda\to\infty}\Lambda}^{\text{真空のエネルギーからの寄与}} + \text{有限な}A\text{の理論値}
\end{aligned}
\right\}
\overset{\text{繰り込み}}{\Rightarrow}
\boxed{\lim_{\Lambda\to\infty}\Lambda + \text{有限な}A\text{の理論値}=10}
\tag{1.79}
$$

を行う。従って、$\lim_{\Lambda\to\infty}\Lambda$ が

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\Lambda = 10-\text{有限な}A\text{の理論値} \tag{1.80}$$

と有限値として計算できる。そのとき、もう一つの未知な物理量 B が予言されたとすると

$$B_{\text{予言値}} = \infty = \lim_{\Lambda\to\infty}\Lambda \times \text{有限な}B\text{の予言値} \overset{\text{繰り込み}}{=} \left(10-\text{有限な}A\text{の理論値}\right)\times\text{有限な}B\text{の予言値} \tag{1.81}$$

と、有限な値として予言される。ここで、

- ∞として、同じ発散量 $\lim_{\Lambda\to\infty}\Lambda$ が使われている

事が必要になる。この予言値を実験値と比較する事で、理論の正しさをチェックすることができる。「電磁気学の場の理論版」では、

- 電子の異常磁気能率（a_e）：繰り込みしないと∞の理論値

と言われる物理量（例では物理量 B に対応）が、繰り込みの結果、有限な予言値として計算され

$$\begin{cases} a_e^{\text{実験値}} = 0.001\,159\,652\,180 \\ a_e^{\text{予言値}} = 0.001\,159\,652\,181 \end{cases} \tag{1.82}$$

とみごとな一致を示していて、「電磁気学の場の理論版」の正しさの証明を与えている。このように、同じ∞（例では $\lim_{\Lambda\to\infty}\Lambda$）を使って有限の数の物理量（例では物理量 A と B）の再定義により、すべての∞を消すことができる（例では物理量 A と B に表われる∞）場合に

- 繰り込み可能な場の理論

という。光子と電子の生成・消滅を扱う「電磁気学の場の理論版」は、繰り込み可能である。この場合、

- 3 種類の∞を有限な値と見做すこと

になる。