

第 3 章 ニュートリノ振動：理論

ニュートリノの性質の特徴は、

- ニュートリノの生成は、 W^\pm を媒介した**電弱統一理論**による素粒子の崩壊から：
 - ν_μ (や $\bar{\nu}_\mu$) の生成 (地球大気内の反応) : $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \boxed{\nu_\mu}$ ($\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \boxed{\bar{\nu}_\mu}$)
 - ν_e の生成 (太陽内の核融合反応) : $d \rightarrow u + \boxed{\nu_e} + e^-$

この**生成されるニュートリノ**を、 ν_e と ν_μ と表す。

- 生成されたニュートリノの飛行は、 W^\pm が存在しない真空中を飛行する場合、¹ W^\pm との**相互作用の無い**量子力学の運動方程式で決定される。この**飛行するニュートリノ**を、 ν_1 と ν_2 と表す。

の 2 つの違いによる。それぞれ、異なる理論により、決定されるので、その状態は異なる。ところで、量子力学によると、

- 1 つの状態はそれぞれ異なる状態 (生成ニュートリノ状態と飛行ニュートリノ状態) で表せる

ことが分かっている。この 2 種類のニュートリノ状態が有る結果、ニュートリノを観測すると、**ニュートリノ振動**という現象として観測されることがわかった。

ニュートリノ振動は、1957 年にブルーノ・ポンテコルボによって最初に予測された。ポンテコルボの理論はニュートリノと反ニュートリノの間で振動するというもので、現在受け入れられているニュートリノがフレーバー間で振動する理論とは異なるものであった。しかし、その後 10 年で彼が取り組んだ真空の振動理論の数学的定式化はニュートリノ振動の理論の基礎となった。1962 年に**名古屋大学の坂田昌一・牧二郎・中川昌美**によって、フレーバーニュートリノ ($\nu_{e,\mu,\tau}$) 間で振動する理論が提唱および定式化された。あるフレーバーのニュートリノがニュートリノ振動により他のフレーバーに変換される混合の強さは、ポンテコルボ・牧・中川・坂田行列 (英語版) (PMNS 行列) によって特定することができる。1998 年に**岐阜県神岡鉱山地下に設置されたスーパーカミオカンデ**検出装置により大気から降り注ぐニュートリノを観測することによって、この現象が実証された。

量子力学

飛行するニュートリノは、量子力学での運動方程式により、その時間発展が決まる。つまり、

- 0 秒目に生成されたニュートリノ (ν_e や ν_μ) : 【例】 $\nu(0) = \nu_e$ や ν_μ
- t 秒目に飛行中のニュートリノ (ν_1 や ν_2) : 【例】 $\nu(t)$

¹ 太陽内部の核融合反応でニュートリノが放出される。太陽内部には電子が無数に存在するので、ニュートリノは W^\pm を媒介して相互作用をする。この飛行するニュートリノは、 W^\pm との**相互作用の有る**量子力学の運動方程式で決定される。

- t 秒目に観測されるニュートリノ (ν_e や ν_μ) : 【例】 $\nu(t)$ を ν_e や ν_μ で表わす

と対応する。 $\nu(t)$ が量子力学により、初期条件： $\nu(0) = \nu_e$ や ν_μ を用いて決定される。実験では、ニュートリノは、 ν_e や ν_μ で観測されるので、改めて

- $\nu(t)$ を ν_e や ν_μ で表わす必要

がある。以降では一般的な表記として、 $\nu(t)$ の代わりに $|\psi(t)\rangle$ と表わす。

$|\psi(t)\rangle$ は、状態ベクトルといわれる量であり、この時間発展が決定される。その全エネルギーをハミルトニアン演算子 H （**行列で表される**場合が多い）で表すとき、

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle} \quad (3.1)$$

である。行列表記の場合には、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |\psi(t)\rangle \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\psi(t)\rangle \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

の表示になっている。特に、エネルギーが E (=ある数値) 決まっていると

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle = E |\psi(t)\rangle \quad (3.3)$$

この解は

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{iEt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle \quad (3.4)$$

とわかる（【問題 1】(3.4)を求めよ）。(3.4)は、拡張できて

- t_0 秒目に生成
- t 秒目に飛行中

の場合に

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{iE(t-t_0)}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle \stackrel{\Delta t = t-t_0}{=} e^{\frac{iE\Delta t}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle \quad (3.5)$$

である ($|\psi(t)\rangle|_{t=t_0} = |\psi(t_0)\rangle$ を満たすように作る)。更には、

- H が一定

のときに、

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle = e^{-\frac{iH\Delta t}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle} \quad (3.6)$$

である。また、 $\langle\psi(t)|$ の表記も用いられ

$$\langle\psi(t)| = (|\psi(t)\rangle)^{T*} = (|\psi(t_0)\rangle)^{\dagger} \quad (T^* \text{をまとめて} \dagger \text{と表す}) \quad (3.7)$$

で定義される。具体例としては、

- $|\psi(t)\rangle$ は、しばしば、**行列表記**で表せる

ので

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \times \end{pmatrix} \Rightarrow \langle\psi(t)| = (\times^* \quad \times^* \quad \dots \quad \times^* \quad \times^*) \quad (3.8)$$

の対応になる。このとき、

- **量子力学での基本条件**： $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$ (3.9)

が成立する。これは、波動関数を $\psi(x,t)$ とすれば

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger(x,t)\psi(x,t) dx = 1 \quad (3.10)$$

で計算できる。また、3次元であると波動関数は $\psi(x,y,z,t)$ となり、

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger(x,y,z,t)\psi(x,y,z,t) dx dy dz = 1 \quad (3.11)$$

であるが、ベクトル \mathbf{x}

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} : (x, y, z) \quad (3.12)$$

を使用して

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t) d\mathbf{x} = 1 \quad (3.13)$$

と表記する。

ニュートリノ混合

さて、ニュートリノの状態には 2 通りあり、

- 生成（や観測）ニュートリノ (ν_e や ν_μ)

➤ 実際には、 $\nu_{e,\mu,\tau}$

- 飛行ニュートリノ (ν_1 や ν_2)

➤ 実際には、 $\nu_{1,2,3}$

である。ところで、量子力学では、

- 1 つの状態はそれぞれ異なる状態（生成ニュートリノ状態と飛行ニュートリノ状態）

で表せる。つまり、1 つのニュートリノ状態は、同時に

- ニュートリノ状態 = (ν_e, ν_μ) の一次結合

- ニュートリノ状態 = (ν_1, ν_2) の一次結合

として表わせるので、

- $(\nu_e, \nu_\mu) = (\nu_1, \nu_2)$ の一次結合

が成り立つ。数式では、係数を a, b, c, d （複素数）として

$$\begin{cases} \nu_e = a\nu_1 + b\nu_2 \\ \nu_\mu = c\nu_1 + d\nu_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

である。行列表記ができ

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

であり、(3.8)を参考にして

$$\begin{cases} |\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \\ |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.16)$$

と表わしておく。そのとき、

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

を用いて、(3.15)は

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad (3.18)$$

と表わせる。

一方、 $|\psi\rangle$ と $|\psi'\rangle$ は(3.9)の条件：

$$\begin{cases} \langle \psi | \psi \rangle = 1 \\ \langle \psi' | \psi' \rangle = 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

を満たすので、

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (= I) \quad (3.20)$$

を得る【問題 2】(3.20)を求めよ。(3.17)より、

$$\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 \\ a^* b + c^* d = b^* a + d^* c = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

なので、解として、3 つの実数（位相） α, β, γ を用いて

$$\begin{cases} a = e^{i\alpha} \cos \theta & b = e^{i\beta} \sin \theta \\ c = -e^{i(\alpha+\gamma)} \sin \theta & d = e^{i(\beta+\gamma)} \cos \theta \end{cases} \quad (3.22)$$

と表わせる【問題 3】(3.21)を満たす事を証明せよ。従って、

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}}^{\text{マヨラナ位相}} \quad (3.23)$$

を得る【問題 4】(3.23)を導け。ここに、

- α, β は、マヨラナ位相'(Majorana phase)

という。以降、簡単のため、

- U を実数の行列

$$\triangleright U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

とする。つまり、(3.14)より

$$\begin{cases} \nu_e = \nu_1 \cos \theta + \nu_2 \sin \theta \\ \nu_\mu = -\nu_1 \sin \theta + \nu_2 \cos \theta \end{cases} \quad (3.25)$$

あるいは

$$\boxed{|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \Leftrightarrow \begin{cases} |\psi'\rangle = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \\ U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{cases}} \quad (3.26)$$

が得られた。これを、ニュートリノ混合(neutrino mixing)といい

- U をニュートリノ混合行列(neutrino mixing matrix)
- θ を混合角(mixing angle)

という。

さて、飛行中のニュートリノは、(3.6)に従って発展し、

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}} |\nu_i(t_0)\rangle \quad (i=1,2)$$

である。(3.25)を量子力学での表記に直す事ができ

$$\begin{cases} |v_e(t)\rangle = \cos\theta |v_1(t)\rangle + \sin\theta |v_2(t)\rangle \cdots \text{飛行中の } v_e \\ |v_\mu(t)\rangle = -\sin\theta |v_1(t)\rangle + \cos\theta |v_2(t)\rangle \cdots \text{飛行中の } v_\mu \end{cases} \quad (3.27)$$

と表せる。従って、 $t(=t_0)=0$ で生成された v_e は、

$$\begin{cases} |v_e(0)\rangle \cdots \text{生成された } v_e \\ \cos\theta |v_1(t)\rangle + \sin\theta |v_2(t)\rangle (= |v_e(t)\rangle) \cdots \text{飛行中の } v_e \end{cases} \quad (3.28)$$

と記述される。つまり、

- 生成された v_e は、瞬時に $\cos\theta |v_1(t)\rangle + \sin\theta |v_2(t)\rangle$ になって、飛行し始める

ことになる。同様にして、(3.26)より、

$$\begin{pmatrix} |v_e(t)\rangle \\ |v_\mu(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |v_1(t)\rangle \\ |v_2(t)\rangle \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

になる。

2種類のニュートリノ

(3.6)を2種類のニュートリノ(v_1, v_2)に応用すると、

$$\begin{pmatrix} |v_1(t)\rangle \\ |v_2(t)\rangle \end{pmatrix} = \exp\left(-\frac{iH\Delta t}{\hbar}\right) \begin{pmatrix} |v_1(t_0)\rangle \\ |v_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} \quad (\Delta t = t - t_0) \quad (3.30)$$

になる。2種類のニュートリノでは、

- **質量 (ハミルトニアン H) の固有状態のニュートリノ**

の場合であるので、

- H が対角化されている

はずである。ここで、宇宙空間などを自由に飛んでいるときの時間発展を考える。2種類のニュートリノの質量を $m_{1,2}$ とし、その運動量を \mathbf{p} すると

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{c^2|\mathbf{p}|^2 + m_1^2 c^4} & 0 \\ 0 & \sqrt{c^2|\mathbf{p}|^2 + m_2^2 c^4} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{p}: \text{運動量}) \quad (3.31)$$

である。この場合は $\exp(iH\Delta t)$ は

$$\overbrace{\exp\left(-\frac{iH\Delta t}{\hbar}\right)}^{2 \times 2 \text{行列}} = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{iE_1\Delta t}{\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{iE_2\Delta t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

になる。ここで、行列は、マクローリン展開：

$$\overbrace{\exp A}^{2 \times 2 \text{行列}} = \overbrace{I}^{2 \times 2 \text{単位行列}} + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad (A^0 = I) \quad (3.33)$$

で表し、

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

とすると

$$A^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 \\ 0 & a_2^n \end{pmatrix} \Rightarrow \exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{a_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{a_2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_2} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

なので

$$\boxed{\exp A = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_2} \end{pmatrix} \Leftarrow A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}} \quad (3.36)$$

を用いて、

$$\begin{pmatrix} |v_1(t)\rangle \\ |v_2(t)\rangle \end{pmatrix} = \exp\left(-\frac{iH\Delta t}{\hbar}\right) \begin{pmatrix} |v_1(t_0)\rangle \\ |v_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{iE_1\Delta t}{\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{iE_2\Delta t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |v_1(t_0)\rangle \\ |v_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

を得る。ここで、量子力学では全体の位相は物理的に意味がない (【問題 5】何故、「量子力学では全体の位相は物理的に意味がない」か?) ので

$$\begin{cases} E_1 = \frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{E_1 - E_2}{2} \\ E_2 = \frac{E_1 + E_2}{2} - \frac{E_1 - E_2}{2} \end{cases} \quad (3.38)$$

を用いると、全体の位相を抜き出す。(3.38)を(3.37)に代入して

$$\begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{iE_1\Delta t}{\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{iE_2\Delta t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\left(\frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{E_1 - E_2}{2}\right)\Delta t}{\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i\left(\frac{E_1 + E_2}{2} - \frac{E_1 - E_2}{2}\right)\Delta t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i\frac{E_1 + E_2}{2}\Delta t}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{i\frac{E_1 - E_2}{2}\Delta t}{\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i\frac{E_1 + E_2}{2}\Delta t}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{i\left(-\frac{E_1 - E_2}{2}\right)\Delta t}{\hbar}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \exp\left(-\frac{i(E_1 + E_2)\Delta t}{\hbar}\right) \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar}\right) \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

より

$$\begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{iE_1\Delta t}{\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{iE_2\Delta t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |v_1(t_0)\rangle \\ |v_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} = e^{-\frac{i(E_1 + E_2)\Delta t}{2\hbar}} \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |v_1(t_0)\rangle \\ |v_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

を得る。そこで

$$\begin{pmatrix} |v'_1(t_0)\rangle \\ |v'_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i(E_1 + E_2)\Delta t}{2\hbar}} |v_1(t_0)\rangle \\ e^{-\frac{i(E_1 + E_2)\Delta t}{2\hbar}} |v_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

とすれば

$$\begin{pmatrix} |v_1(t)\rangle \\ |v_2(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |v'_1(t_0)\rangle \\ |v'_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

ここで、(3.36)を逆に用いて

$$\begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 \\ 0 & e^{a_2} \end{pmatrix} = \exp A \Rightarrow \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar}\right) \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} -\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar} & 0 \\ 0 & \frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

そこで

$$H_{diag} = \begin{pmatrix} \frac{E_1 - E_2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_1 - E_2}{2} \end{pmatrix} = \frac{E_1 - E_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{E_1 - E_2}{2} \sigma^{(3)} \quad (3.44)$$

を用いて、

$$\begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar}\right) \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} -\frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar} & 0 \\ 0 & \frac{i(E_1 - E_2)\Delta t}{2\hbar} \end{pmatrix} = \exp \left(-\frac{i H_{diag} \Delta t}{\hbar} \right) \quad (3.45)$$

なので、(3.42)より、改めて、 $|v'_{1,2}(t_0)\rangle$ を $|v_{1,2}(t_0)\rangle$ と読み替えて

$$\begin{pmatrix} |v_1(t)\rangle \\ |v_2(t)\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{E_1-E_2}{2\hbar}\Delta t) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{E_1-E_2}{2\hbar}\Delta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |v_1(t_0)\rangle \\ |v_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{H_{diag}}{\hbar}\Delta t\right) \begin{pmatrix} |v_1(t_0)\rangle \\ |v_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

従って

$$\begin{pmatrix} |v_1(t)\rangle \\ |v_2(t)\rangle \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{H_{diag}}{\hbar}\Delta t\right) \begin{pmatrix} |v_1(t_0)\rangle \\ |v_2(t_0)\rangle \end{pmatrix} \Leftarrow H_{diag} = \begin{pmatrix} \frac{E_1-E_2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_1-E_2}{2} \end{pmatrix}, \Delta t = t - t_0 \quad (3.47)$$

を得る。²

ニュートリノ (ν_e や ν_μ 等) は弱い相互作用で生成される。**【第 2 章 行列による素粒子変化の記述】** では、

- ν_μ (や $\bar{\nu}_\mu$) の生成 (地球大気内の反応) : $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \boxed{\nu_\mu}$ ($\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \boxed{\bar{\nu}_\mu}$)
- ν_e の生成 (太陽内の核融合反応) : $d \rightarrow u + \boxed{\nu_e} + e^-$

であった。ここでは、 $(\nu_e, \nu_\mu) \Leftrightarrow (v_1, v_2)$ になる。量子力学によると任意の状態はその系の固有状態で展開できるので (ν_e, ν_μ) は質量固有状態 (v_1, v_2) で展開でき、(3.29) で表せる、従って

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

になる。特に、

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \nu_1(t) = \frac{\nu_e(t) - \nu_\mu(t)}{\sqrt{2}}, \nu_2(t) = \frac{\nu_e(t) + \nu_\mu(t)}{\sqrt{2}} \quad (3.49)$$

のときを、 $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$ なので、

$$\sin 2\theta = 2 \cos\theta \sin\theta = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \quad (3.50)$$

になり

- **最大ニュートリノ混合** ($\theta = 45^\circ$) : $\sin 2\theta = 1$

$$\boxed{\nu_1(t) = \frac{\nu_e(t) - \nu_\mu(t)}{\sqrt{2}}, \nu_2(t) = \frac{\nu_e(t) + \nu_\mu(t)}{\sqrt{2}}} \quad (3.51)$$

² ニュートリノの表記の $|v\rangle$ と ν は同じことである。

という。

ニュートリノ混合の確率

最初 ($t_0 = 0$) に

- 弱い相互作用の結果、 ν_e が生成

されたとすると、

$$|\nu_e(0)\rangle = \cos\theta |\nu_1(0)\rangle + \sin\theta |\nu_2(0)\rangle \quad (3.52)$$

になっている。

- 時間発展は質量の固有状態

で記述されるので

$$|\nu_{1,2}(t)\rangle = \exp\left(-\frac{iE_{1,2}t}{\hbar}\right) |\nu_{1,2}(0)\rangle \quad (3.53)$$

で与えられる（【問題 6】(ν_1, ν_2) は質量の固有状態である。では、(ν_e, ν_μ) は何の固有状態か？）。

$\cos\theta |\nu_1(0)\rangle + \sin\theta |\nu_2(0)\rangle$ の状態は $\cos\theta |\nu_1(t)\rangle + \sin\theta |\nu_2(t)\rangle$ になり

$$\cos\theta |\nu_1(t)\rangle + \sin\theta |\nu_2(t)\rangle = \cos\theta \exp\left(-\frac{iE_1t}{\hbar}\right) |\nu_1(0)\rangle + \sin\theta \exp\left(-\frac{iE_2t}{\hbar}\right) |\nu_2(0)\rangle \quad (3.54)$$

のように時間経過とともに変化する。これを仮に $|\nu_e(t)\rangle$ と呼んでおく。即ち

$$|\nu_e(t)\rangle \equiv \cos\theta \exp\left(-\frac{iE_1t}{\hbar}\right) |\nu_1(0)\rangle + \sin\theta \exp\left(-\frac{iE_2t}{\hbar}\right) |\nu_2(0)\rangle \quad (3.55)$$

である。ここで観測機器で観測するのだが、そのときには

- 弱い相互作用でニュートリノを観測する
- 電子ニュートリノは電子（或いは陽電子）と共に現れる

ので、こんどは(ν_1, ν_2) に含まれる (ν_e, ν_μ) を基準にする。(3.48) より $t=0$ では (ν_e, ν_μ) が作られ、

すぐに飛行開始するので、 $t=0$ で (ν_e, ν_μ) を (ν_1, ν_2) に変換する：

$$\begin{pmatrix} \nu_1(0) \\ \nu_2(0) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}^{U^{-1}} \begin{pmatrix} \nu_e(0) \\ \nu_\mu(0) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix} \leftarrow U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

なので、(3.55) に用いて、

$$|\nu_e(t)\rangle = A_e(t) |\nu_e(0)\rangle + A_\mu(t) |\nu_\mu(0)\rangle \left\{ \begin{array}{l} A_e(t) = \cos^2\theta e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} + \sin^2\theta e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}} \\ A_\mu(t) = -\cos\theta \sin\theta \left(e^{-\frac{iE_1t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE_2t}{\hbar}} \right) \end{array} \right. \quad (3.57)$$

を得る（【問題 7】(3.57)を導け。）。観測機器で観測されると（ ν_e, ν_μ ）で観測されるので、結局、

- ν_e を観測： $\langle \nu_e(0) | \nu_e(t) \rangle = A_e(t)$
- ν_μ を観測： $\langle \nu_\mu(0) | \nu_e(t) \rangle = A_\mu(t)$

になる。実験結果それぞれのニュートリノを観測する確率として

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) &= |A_e(t)|^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \cos \frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} \right] (= 1 - |A_\mu(t)|^2) \\ P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) &= |A_\mu(t)|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \cos \frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} \right] (= 1 - |A_e(t)|^2) \end{aligned} \quad (3.58)$$

と計算される（【問題 8】(3.58)の $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t)$ を導け。）。当然の結果として、

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) + P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = 1 \Leftrightarrow |A_e(t)|^2 + |A_\mu(t)|^2 = 1 \quad (3.59)$$

である。

ところで、特殊相対性理論によると、素粒子のエネルギー E 、運動量 \mathbf{p} 、質量 m の間には、

$$\frac{E}{c} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2} \quad (3.60)$$

の関係がある。ニュートリノの質量は限りなく零に近い（ $m \approx 0$ ）はず（素粒子の標準模型ではニュートリノの質量は 0: $m = 0$ であり、ほとんどの実験結果は $m = 0$ と矛盾が無い）なので、

マクローリン展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \quad (3.61)$$

を用いるとよい。つまり、

$$\frac{E}{c} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 \left(1 + \frac{m^2 c^2}{|\mathbf{p}|^2} \right)} = |\mathbf{p}| \sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{|\mathbf{p}|^2}} = |\mathbf{p}| \sqrt{1+x} \Big|_{x=\frac{m^2 c^2}{|\mathbf{p}|^2}} \quad (x \approx 0 \Leftrightarrow m \approx 0) \quad (3.62)$$

に於いて

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \quad (x \approx 0) \quad (3.63)$$

は、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = 1 + x f'(0) \quad (x \approx 0) \quad (3.64)$$

により

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (1+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (1+x)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} (1+0)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad (3.65)$$

から

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x \quad (x \approx 0) \quad (3.66)$$

を得る。従って、

$$\frac{E}{c} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2} = |\mathbf{p}| \sqrt{1+x} \Big|_{x=\frac{m^2 c^2}{|\mathbf{p}|^2}} = |\mathbf{p}| \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{|\mathbf{p}|^2} \right) = |\mathbf{p}| + \frac{m^2 c^2}{2|\mathbf{p}|} \quad (3.67)$$

と計算できる。これより、

$$\frac{E_{1,2}}{c} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_{1,2}^2 c^2} \approx |\mathbf{p}| + \frac{m_{1,2}^2 c^2}{2|\mathbf{p}|} \quad (3.68)$$

である（【問題 9】(3.60)の $\frac{E}{c} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2}$ に於いて、 $|\mathbf{p}|^2 \ll m^2 c^2$ の時、 $E - mc^2$ は $\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$ になることを導け。）。故に、

$$\frac{E_1 - E_2}{c} = |\mathbf{p}| + \frac{m_1^2 c^2}{2|\mathbf{p}|} - \left(|\mathbf{p}| + \frac{m_2^2 c^2}{2|\mathbf{p}|} \right) = \frac{(m_1^2 - m_2^2) c^2}{2|\mathbf{p}|} \quad (3.69)$$

である。ここで、分母の $|\mathbf{p}|$ を、(3.68)よりの近似式の

$$\frac{E_{1,2}}{c} = \overset{v_1, v_2 \text{ に依らないので}}{\widehat{|\mathbf{p}|}} = \overset{v_1, v_2 \text{ に依らない}}{\frac{\widehat{E}}{c}} \Rightarrow |\mathbf{p}| = \frac{E}{c} \quad (3.70)$$

を用いて、

$$\frac{E_1 - E_2}{c} = \frac{(m_1^2 - m_2^2) c^2}{2|\mathbf{p}|} = \frac{(m_1^2 - m_2^2) c^2}{2 \frac{E}{c}} \Rightarrow E_1 - E_2 = \frac{(m_1^2 - m_2^2) c^4}{2E} \quad (3.71)$$

を得る。また、ニュートリノはほぼ光速で走るの、ニュートリノの速度を v_ν とするとその走行距離 L は

$$L = v_\nu t \approx ct \quad (\equiv t \text{ in the } c=1 \text{ unit}) \Rightarrow t = \frac{L}{c} \quad (3.72)$$

になるので、

● 走行時間を走行距離で置き換える

表記にすると（距離を直接測る）実験と比較しやすい。これらを使用すると

$$\begin{aligned} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \cos \frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} \right] = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \cos \frac{\frac{(m_1^2 - m_2^2) c^4}{2E} \frac{L}{c}}{\hbar} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \cos \frac{(m_1^2 - m_2^2) c^3 L}{2E\hbar} \right] \end{aligned} \quad (3.73)$$

なので、質量 2 乗差 $m_1^2 - m_2^2$ を

$$\boxed{\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2} \quad (3.74)$$

とすると、(3.58)は、 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ より

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = \left| A_\mu(t = \frac{L}{c}) \right|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left(1 - \cos \frac{\Delta m^2 c^3 L}{2E\hbar} \right) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 c^3 L}{4E\hbar} \right) \quad (3.75)$$

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) = \left| A_e(t = \frac{L}{c}) \right|^2 = 1 - \left| A_\mu(t = \frac{L}{c}) \right|^2 \quad (3.76)$$

を得る。また、(3.71)を用いて

$$E_1 - E_2 = \frac{\Delta m^2 c^4}{2E} \quad (3.77)$$

である。

ここで、**実験値と比較**するため $\frac{\Delta m^2 c^3 L}{4E\hbar}$ の単位を明記する。素粒子物理では

- エネルギー E は MeV で表す
 - 電子の質量: $mc^2 = 0.511\text{MeV}$
 - 陽子の質量: $mc^2 = 938\text{MeV}$

事が多い。また、 \hbar の数値として、光速 c と一緒にした

$$\hbar c = 197\text{MeV} \cdot \text{fm} = 197\text{MeV} \cdot 10^{-13}\text{cm} \leftarrow \boxed{1\text{fm} = 10^{-13}\text{cm}} \quad (3.78)$$

を使用する。そこで

$$\frac{\Delta m^2 c^3 L}{4E\hbar} = \frac{\Delta m^2 c^3 c L}{4E\hbar c} = \frac{\Delta m^2 c^4 L}{4E\hbar c} \stackrel{\text{MeV と cm で表す}}{=} \frac{\Delta m^2 c^4 [\text{MeV}^2] L [\text{cm}]}{4E [\text{MeV}] \hbar c [\text{MeV} \cdot 10^{-13}\text{cm}]} \quad (3.79)$$

となるので、 $\frac{\Delta m^2 c^3 L}{4E\hbar}$ の単位は、 $\frac{[\text{MeV}^2][\text{cm}]}{[\text{MeV}][\text{MeV} \cdot \text{cm}]}$ になり、

- $\frac{\Delta m^2 c^3 L}{4E\hbar}$ は無次元（単位がない） $\rightarrow \sin$ の引数なので **単位はラジアン (rad)**

事がわかる。さて、**ニュートリノ振動を観測した実験**では

$$\begin{aligned} \Delta m c^2 : \text{eV} \text{ で測る} &\Rightarrow \Delta m^2 c^4 : \text{eV}^2 \text{ で測る} \\ L : \text{m} \text{ で測る} & \\ E : \text{MeV} \text{ で測る} & \end{aligned} \quad (3.80)$$

でデータ数値を導く。この数値をそのまま使うために、 $\frac{\Delta m^2 c^3 L}{4E\hbar}$ を観測値の単位

$$\begin{cases} \Delta m^2 c^4 [\text{eV}^2] \\ L [\text{m}] \\ E [\text{MeV}] \end{cases}$$

で測ることにする。そのため、数値

$$\boxed{\hbar c = 197 \text{MeV} \cdot 10^{-13} \text{cm}} \quad (3.81)$$

に注意して

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m^2 c^3 L}{4E\hbar} &= \frac{\Delta m^2 c^4 [\text{eV}^2] L [\text{m}]}{4E [\text{MeV}] \hbar c [\text{MeV} \cdot 10^{-13} \text{cm}]} = \frac{\Delta m^2 c^4 \left[(10^{-6} \text{MeV})^2 \right] L [10^2 \text{cm}]}{4E [\text{MeV}] 197 [\text{MeV} \cdot 10^{-13} \text{cm}]} \\ &= \frac{\Delta m^2 c^4 [\text{eV}^2 \text{の単位で}] L [\text{mの単位で}]}{E [\text{MeVの単位で}]} \frac{\overbrace{10^{-12} 10^2}^{=1.269}}{4 \times 197 \times 10^{-13}} \\ &= 1.27 \frac{\Delta m^2 c^4 [\text{eV}^2 \text{の単位で}] L [\text{mの単位で}]}{E [\text{MeVの単位で}]} \end{aligned}$$

と計算される。故に、

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 [\text{eV}^2] L [\text{m}]}{E [\text{MeV}]} \right) \quad (3.82)$$

あるいは大雑把に

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) \approx \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2 [\text{eV}^2] L [\text{m}]}{E [\text{MeV}]} \right) \quad (3.83)$$

を得る。

ニュートリノ振動の度合い

ここで、(3.82)において、飛行距離の長さ応じて、振動する様子をグラフに表してみる。振動する項は

$$\sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 [\text{eV}^2] L [\text{m}]}{E [\text{MeV}]} \right) \quad (3.84)$$

である。そこで、 $\frac{1.27 \Delta m^2 [\text{eV}^2] L [\text{m}]}{E [\text{MeV}]} = 1$ となる L を $L_{\text{丁度}}$ とすると

$$\frac{1.27 \Delta m^2 [\text{eV}^2] L_{\text{丁度}} [\text{m}]}{E [\text{MeV}]} = 1 \Rightarrow \frac{E [\text{MeV}]}{1.27 \Delta m^2 [\text{eV}^2]} = L_{\text{丁度}} [\text{m}] \quad (3.85)$$

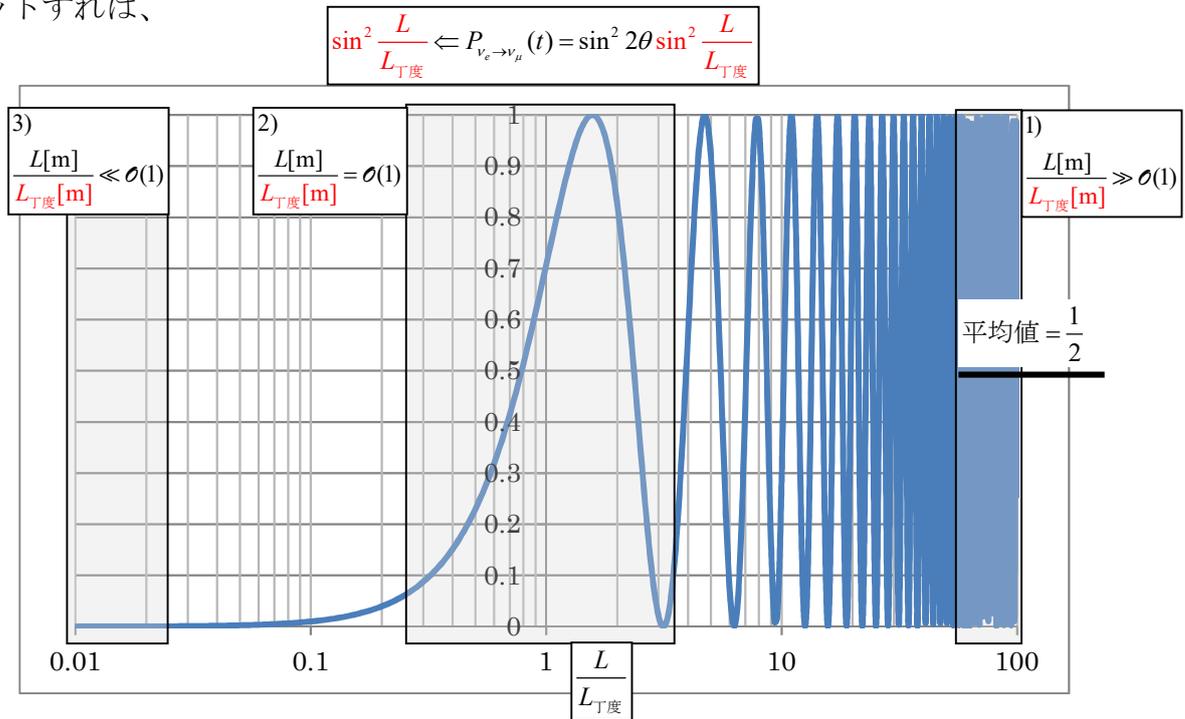
となる距離を $L_{\text{丁度}} [\text{m}]$ として、(3.84)を表すと、

$$\sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 [\text{eV}^2] L [\text{m}]}{E [\text{MeV}]} \right) = \sin^2 \left(\frac{L [\text{m}]}{L_{\text{丁度}} [\text{m}]} \right) \quad (3.86)$$

になる。この \sin カーブを

$$0.01 \leq \frac{L[\text{m}]}{L_{\text{丁度}}[\text{m}]} \leq 100 \tag{3.87}$$

でプロットすれば、



になる。

従って、グラフを参考にして、表式(3.82)よりニュートリノ混合について次のことが導かれる。

1) $\frac{L[\text{m}]}{L_{\text{丁度}}[\text{m}]} = \boxed{\pi} \Leftarrow \sin^2 \boxed{\pi} = 0$ 、つまり、

$$\Delta m^2 (\text{eV}^2) \gg \frac{E(\text{MeV})}{L(\text{m})} \tag{3.88}$$

の時。ニュートリノ生成場所 L がほんの少しずれるだけで $\frac{L[\text{m}]}{L_{\text{丁度}}[\text{m}]}$ ($= x$) が大幅に変化する。

例えば、 $x = 100\text{rad} (\gg 1)$ のとき 3%生成場所がずれると

$$x = \frac{L[\text{m}]}{L_{\text{丁度}}[\text{m}]} = 100\text{rad} \gg 1 \Rightarrow \frac{\overbrace{L(1+10\%)}^{10\%ずれる}[\text{m}]}{L_{\text{丁度}}[\text{m}]} = 100(1+10\%)\text{rad} = 110\text{rad}$$

のように、10%生成場所がずれると 10rad ($= 3\pi$ 強) ずれる。従って、 L が 0 から 10%程度の間でずれて、0 から 2π の間のある値をとることになる。一方、実験では、多くの現象の平均をとるので、確率としては

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2 x \tag{3.89}$$

において、 x は 0 から 2π の間のある値をとるので、1つのニュートリノの結果としては、平均を取り、

$$\frac{\text{個々のニュートリノの } \sin^2 x \text{ の和}}{\text{ニュートリノの総数}} = \sin^2 x \text{ の平均} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \sin^2 x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}$$
(3.90)

になる。つまり、(3.89)から

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) \Big|_{\text{生成場所の少しのズレ}} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \leq \frac{1}{2}$$

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) \Big|_{\text{生成場所の少しのズレ}} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \geq \frac{1}{2}$$
(3.91)

を観測する。最大混合値 1/2 は

$$\theta(\text{混合角}) = 45\text{度}$$

で実現される。これは

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) \geq \frac{1}{2}$$
(3.92)

のときのみ適用可能になる。また、

- ν_e が半分以下に減少する場合 $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) < \frac{1}{2}$ には適用できない

こともわかる。

$$2) \frac{L[\text{m}]}{L_{\text{丁度}}[\text{m}]} [\text{単位はrad}] = \mathcal{O}(1) \Leftarrow L_{\text{丁度}}[\text{m}] = \frac{E[\text{MeV}]}{1.27\Delta m^2[\text{eV}^2]}, \text{つまり、}$$

$$\Delta m^2(\text{eV}^2) \approx \frac{E(\text{MeV})}{L(\text{m})}$$
(3.93)

の時。この場合は、

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = \sin^2 2\theta \left[\sin^2 \frac{1.27\Delta m^2 L}{E} \right] \stackrel{\approx 1}{\approx} \sin^2 2\theta$$
(3.94)

になる。つまり、

$$\sin^2 \left[\frac{1.27\Delta m^2 L}{E} \right] \stackrel{\approx \frac{\pi}{2}}{\approx} 1 \Rightarrow \frac{1.27\Delta m^2 L}{E} \stackrel{\approx 1.57}{\approx} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\Delta m^2 L}{E} \approx 1 \Rightarrow \Delta m^2 \approx \frac{E}{L}$$
(3.95)

となり、(3.93)を導く。運良く丁度その距離で観測したという幸運に恵まれたことになる。この場合は

- ν_e が半分以下： $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) < 0.5$ に減少する場合にも適用できる（ $\sin^2 2\theta < 0.5$ の時）

ことがわかる。

$$3) \frac{L[\text{m}]}{L_{\text{丁度}}[\text{m}]} [\text{単位はrad}] \ll \mathcal{O}(1) \Leftarrow L_{\text{丁度}}[\text{m}] = \frac{E[\text{MeV}]}{1.27\Delta m^2[\text{eV}^2]}, \text{つまり、}$$

$$\Delta m^2(\text{eV}^2) \ll \frac{E(\text{MeV})}{L(\text{m})}$$
(3.96)

の時。この場合は、混合は観測にかからない。

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{1.27 \Delta m^2 L}{E} \ll 1 \quad (3.97)$$

従って、

- ニュートリノ振動現象の解析対象にはならないことになる。

以上を表にまとめておく。生成された ν_e が振動して ν_μ に変化する確率で「解析対象にはならない」場合には、

- 測定距離 L を長くする、或いは、エネルギーの低い ν_e

を観測するように、実験条件を変更し

$$\Delta m^2 \ll \frac{E}{L} \xrightarrow[L \rightarrow \text{大}]{E \rightarrow \text{小}} \Delta m^2 \approx \frac{E}{L}$$

の環境を作り出し、 $\Delta m^2(\text{eV}^2)$ の小さな値を測定できるようにする。

| $\Delta m^2(\text{eV}^2)$ | $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}(t)$ | 注意事項 |
|---|--------------------------------------|------------------------------------|
| $\gg \frac{E(\text{MeV})}{L(\text{m})}$ | $\approx \frac{1}{2} \sin^2 2\theta$ | $\frac{1}{2}$ より大きいときは 適用不可 |
| $\approx \frac{E(\text{MeV})}{L(\text{m})}$ | $\approx \sin^2 2\theta$ | $\frac{1}{2}$ より大きいときは このみ |
| $\ll \frac{E(\text{MeV})}{L(\text{m})}$ | ≈ 0 | ニュートリノ振動現象の 解析対象にはならない |

第三章問題

- 1) (3.4) : $|\psi(t)\rangle = e^{\frac{iEt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle$ を求めよ。
- 2) (3.20) : $U^\dagger U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (= I)$ を求めよ。
- 3) (3.21) : $\begin{cases} |a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1 \\ a^*b + c^*d = b^*a + d^*c = 0 \end{cases}$ を満たす事を証明せよ、
- 4) (3.23) : $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}$ を導け)
- 5) 何故、「量子力学では全体の位相は物理的に意味がない」か？
- 6) (ν_1, ν_2) は質量の固有状態である。では、 (ν_e, ν_μ) は何の固有状態か？
- 7) (3.57) : $\begin{cases} A_e(t) = \cos^2\theta e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \sin^2\theta e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \\ A_\mu(t) = -\cos\theta \sin\theta \left(e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \right) \end{cases}$ を導け。
- 8) (3.58) : $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}(t) = |A_e(t)|^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left[1 - \cos \frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} \right]$ を導け。
- 9) (3.60) の $\frac{E}{c} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2}$ に於いて、 $|\mathbf{p}|^2 \ll m^2 c^2$ の時、 $E - mc^2$ は $\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}$ になることを導け。