第 1 章 基礎事項

Ⅰ. 素粒子の種類

素粒子の種類は、素粒子場のローレンツ変換 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,3)$ に対しての変換性で決まる。代表的な素粒子の種類は、標準模型に表れる

- スカラー $\phi(x)$ ：ヒッグス粒子
- （ディラック）スピノル $\psi(x)$ ：電子やクォーク等
- ベクトル $V(x)$ ：光子・グルオン・$W^{\pm},Z$ ボゾン

である。任意の素粒子場 $\Omega(x)$ に働く演算子 $\hat{U}(\Lambda)$ に対して、

$$\Omega'(x)=\hat{U}(\Lambda)\Omega(x)\hat{U}^{-1}(\Lambda) \tag{1.1}$$

$$\Omega'(x')=\hat{U}(\Lambda)\Omega(x')\hat{U}^{-1}(\Lambda) \tag{1.2}$$

が成立する。従って（**和記号を省略**して）

$$\begin{aligned}
&\phi'(x')=\hat{U}(\Lambda)\phi(x')\hat{U}^{-1}(\Lambda)=\phi(x)\\
&\psi'(x')=\hat{U}(\Lambda)\psi_{\alpha}(x')\hat{U}^{-1}(\Lambda)=\sum_{\beta=1}^{4}S(\Lambda)_{\alpha\beta}\psi_{\beta}(x)\\
&V'^{\mu}(x')=\hat{U}(\Lambda)V^{\mu}(x')\hat{U}^{-1}(\Lambda)=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}V^{\nu}(x)\left(=\sum_{\nu=0}^{3}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}V^{\nu}(x)\right)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

の関係（ローレンツ変換）があり、

$$\begin{cases}
x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\\
S(\Lambda)=\exp\left(-\dfrac{1}{2}\theta\gamma^{0}\gamma^{1}\right)\Leftarrow\tanh\theta=\dfrac{v}{c}
\end{cases} \tag{1.4}$$

である。ここに、

$$\Sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{4}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]\left(=-\Sigma^{\nu\mu}\right) \tag{1.5}$$

$$\begin{cases}
\gamma^{0}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}_0\\ \boldsymbol{\sigma}_0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&I\\ I&0\end{pmatrix}\\
\gamma^{i}=-\gamma_{i}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}_i\\ -\boldsymbol{\sigma}_i&0\end{pmatrix}\ (i=1,2,3)
\end{cases}
\Leftarrow
\begin{cases}
\boldsymbol{\sigma}_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I\\
\boldsymbol{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0&-i\\ i&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\sigma}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}
\end{cases} \tag{1.6}$$

で表わすとき

$$\Sigma^{01}=\frac{i}{4}\left[\gamma^{0},\gamma^{1}\right]=\frac{i}{2}\gamma^{0}\gamma^{1}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}_0\\ \boldsymbol{\sigma}_0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}_1\\ -\boldsymbol{\sigma}_1&0\end{pmatrix}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\sigma}_1&0\\0&\boldsymbol{\sigma}_1\end{pmatrix} \tag{1.7}$$

なので、

$$S(\Lambda)=\exp\left(-\frac{1}{2}\theta\gamma^0\gamma^1\right)=\exp\left(i\theta\Sigma^{01}\right) \tag{1.8}$$

である。ローレンツ変換と 3 次元回転をすべて合わせると

$$\boxed{S(\Lambda)=\exp\left(-\frac{1}{2}i\theta_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right)\Leftarrow\begin{cases}\Sigma^{\mu\nu}=-\Sigma^{\nu\mu}\\ \theta_{\mu\nu}=-\theta_{\nu\mu}\end{cases}} \tag{1.9}$$

とまとめられ、回転角 $\theta_{\mu\nu}$ は、例えば

- ローレンツ変換：x 軸方向に速度 v で移動
  - $\theta_{01}=-\theta^{01}=-\theta\Leftarrow\tanh\theta=\dfrac{v}{c}$ (1.10)
- 3 次元回転：z 軸回り（1-2 平面上）に角度 θ で回転
  - $\theta_{12}=\theta^{12}=-\theta$ (1.11)

と決められる（**A.スピノル場のローレンツ変換**参照)。

ローレンツ変換は、x^μ,Λ を行列表記にすれば、

$$\overbrace{\begin{pmatrix}ct'\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}}^{x'^\mu}=\Lambda\overbrace{\begin{pmatrix}ct\\x\\y\\z\end{pmatrix}}^{x^\mu} \tag{1.12}$$

であり、その要素が

$$\boxed{\Lambda^\mu{}_\nu=(\Lambda)^\mu{}_\nu,\ \ \Lambda_\mu{}^\rho=\left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu,\ \ \delta^\rho_\nu=(I)^\rho_\nu} \tag{1.13}$$

で与えられる。特に、素粒子が x 方向に速度 v で移動している場合に、Λ は

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0\\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0\\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\left(\tanh\theta=\frac{v}{c}=\beta\right) \tag{1.14}$$

$$\begin{cases}\Lambda^0{}_0=\Lambda^1{}_1=\cosh\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \Lambda^0{}_1=\Lambda^1{}_0=-\sinh\theta=-\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases},\ \Lambda^2{}_2=\Lambda^3{}_3=1,\ \text{それ以外は}0 \tag{1.15}$$

である。従って、

$$\boxed{\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda^\mu{}_\nu=\delta^\rho_\nu} \tag{1.16}$$

を得る。Λ の行列表記では、(1.16)は、$\Lambda^{-1}\Lambda=I$ に一致する（**【問題０】**$\Lambda^{-1}\Lambda=I$ より(1.16)を導け)。

（**【問題１】**(1.10)の「x 軸方向に速度 v で移動」及び(1.11)の「x 軸回りに角度 θ で回転」のとき、

(1.3)の $\psi'(x') = S\psi(x)$ を用いて、

1） $\bar{\psi}'\gamma^0\psi' = \cosh\theta\left(\bar{\psi}\gamma^0\psi\right) - \sinh\theta\left(\bar{\psi}\gamma^1\psi\right)$ （速度 v $\left(\tanh\theta = \dfrac{v}{c}\right)$ で移動）

2） $\bar{\psi}'\gamma^2\psi' = \cos\theta\left(\bar{\psi}\gamma^2\psi\right) - \sin\theta\left(\bar{\psi}\gamma^3\psi\right)$ （角度 θ で回転）

を証明せよ）

A.スピノル場のローレンツ変換

静止系での素粒子場：$\psi(x)$ の従うディラック方程式は、静止系で採用した γ 行列

$$\boxed{\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu} I} \tag{1.17}$$

を用いて、4 行 1 列のディラックスピノル ψ の満たす運動方程式は

$$\boxed{\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0} \tag{1.18}$$

である。ディラック方程式：(1.18)から、

- 速度 v で移動する x' 系

のディラック方程式を導く。x' 系へのローレンツ変換を(1.12)の Λ を用いて、

$$\begin{cases} x^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu x'^\nu \Leftarrow x = \Lambda^{-1} x' \\ \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda^\nu{}_\mu \dfrac{\partial}{\partial x'^\nu} \Leftarrow \partial = \partial' \Lambda \end{cases} \tag{1.19}$$

である（**【問題２】**(1.12)に(1.13)を考慮して(1.19)を導け）。(1.19)により

$$\left(i\gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) = 0 \tag{1.20}$$

であるので、

$$\gamma'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{1.21}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} &i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi(x) = i\gamma'^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\psi(x) \overset{\substack{x\text{を}x'\text{で}\\ \text{表わす}}}{=} i\gamma'^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) \\ &(*)\ \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) = \gamma'^{\boxed{\nu}} \frac{\partial}{\partial x'^{\boxed{\nu}}}\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) = \gamma'^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) \end{aligned} \tag{1.22}$$

になる。ここで、(1.21)の γ'^μ は

$$\left\{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu} I \tag{1.23}$$

を満たすことがわかる（**【問題３】**(1.12)と(1.17)より(1.23)を導け）。一方、(1.23)は 4×4 行列の関係式であるので、ある **4×4 行列 S** により、

$$S^{-1}\overbrace{\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\}}^{4\times4\text{行列}} S = S^{-1} 2g^{\mu\nu} I S = 2g^{\mu\nu} I \tag{1.24}$$

を満たす。従って、従って、

$$\gamma'^{\mu} = S^{-1}\gamma^{\mu}S \tag{1.25}$$

と定義すれば、

- 自動的に$\left\{\gamma'^{\mu},\gamma'^{\nu}\right\} = 2g^{\mu\nu}I$ が成立 (1.26)

がわかる（**【問題４】**(1.24)から出発し、(1.25)を用いて(1.26)を証明せよ）。以上から

$$\boxed{\gamma'^{\mu} = S^{-1}\gamma^{\mu}S = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}} \tag{1.27}$$

を得る。

(1.27)を用いると(1.22)は

$$i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi(x) = i\gamma'^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) = iS^{-1}\gamma^{\mu}S\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) \tag{1.28}$$

従って、ディラック方程式として

$$iS^{-1}\gamma^{\mu}S\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) = \frac{mc}{\hbar}\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) \tag{1.29}$$

を得る。(1.29)より、両辺に左から S を掛けて

$$i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}S\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) = \frac{mc}{\hbar}S\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) \tag{1.30}$$

なので、x' でのディラック方程式になるには、

$$\left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi'\left(x'\right) = \psi'\left(x'\right) \tag{1.31}$$

に一致しないといけない（**【問題５】**(1.31)のγ行列がγ'^{μ}でなく、γ^{μ}なのは何故か？）。これより、

$$\psi'\left(x'\right) = S\psi\left(\Lambda^{-1}x'\right) \tag{1.32}$$

を得る。従って、$\Lambda^{-1}x'$ をで元に戻せば、ローレンツ変換を受けた状態は

$$\boxed{\psi'\left(x'\right) = S\psi\left(x\right)} \Leftarrow x' = \Lambda x \tag{1.33}$$

になる。つまり、(1.2)を用いれば、(1.3)の式：

$$\hat{U}(\Lambda)\psi_{\alpha}\left(x'\right)\hat{U}^{-1}(\Lambda) = \sum_{\beta=1}^{4}S(\Lambda)_{\alpha\beta}\psi_{\beta}(x)\left(=\sum_{\beta=1}^{4}S(\Lambda)_{\alpha\beta}\psi_{\beta}\left(\Lambda^{-1}x'\right)\right) \tag{1.34}$$

を得る。従って、任意の x に対して

$$\hat{U}(\Lambda)\psi_{\alpha}(x)\hat{U}^{-1}(\Lambda) = \sum_{\beta=1}^{4}S(\Lambda)_{\alpha\beta}\psi_{\beta}\left(\Lambda^{-1}x\right) \tag{1.35}$$

が導ける。

B.ラグランジアン

素粒子の運動は、ラグランジアン $L(t)$ から決定できる。素粒子のラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を用いて得られる $L(t)$ は

$$L(t)=\int \mathcal{L}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{L}(x,y,z,t)\,dxdydz \tag{1.36}$$

である。$L(t)$を用いた不変積分：

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}L(t)\,dt \tag{1.37}$$

は、4 次元記法：$t\to x^0=ct$に直して

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}L(t)\,dt=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{L}(x,y,z,t)\,dxdydzdx^0=\frac{1}{c}\int\mathcal{L}(x)\,d^4x \tag{1.38}$$

と表わせる。経路積分では、

$$\exp\left(i\frac{\int_{-\infty}^{\infty}L(t)\,dt}{\hbar}\right)=\exp\left(i\frac{\int\mathcal{L}(x)\,d^4x}{c\hbar}\right) \tag{1.39}$$

を用いて素粒子の運動が決められる。

Ⅱ. ラグランジアン $\mathcal{L}$ の項目

A.スカラー場

　スカラー場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ における運動量項(Kinetic term)$\mathcal{L}_K$は、時間発展を記述する。電荷のない素粒子場を、実数数場と言うが、ϕで表わすと

$$\phi^\dagger=\phi \tag{1.40}$$

を満たす（**【問題６】**(1.40)の場合に、電荷を持てないことを示せ)。実数場の$\mathcal{L}_K$は、

$$\left.\frac{\partial^2\mathcal{L}_K}{\partial\dot{\phi}\partial\dot{\phi}}\right|_{\phi=0}=1\quad\left(\dot{\phi}=\frac{\partial\phi}{\partial x^0}=\frac{\partial\phi}{\partial ct}\right) \tag{1.41}$$

で規格化するので、その解は$\mathcal{L}_K=\dfrac{1}{2}\dot{\phi}\dot{\phi}+\cdots$になる。ローレンツ変換で不変になる微分の組み合わせとして

$$\dot{\phi}\dot{\phi}\Rightarrow\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\phi\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\phi\right)-(\nabla\phi)(\nabla\phi)=\sum_{\mu=0}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi\right)\overset{\text{和記号の省略}}{\overbrace{=}}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi\right)^2=\left(\partial_\mu\phi\right)^2 \tag{1.42}$$

より

$$\mathcal{L}_K=\frac{1}{2}\dot{\phi}\dot{\phi}\Rightarrow\mathcal{L}_K=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 \tag{1.43}$$

を得る。また、質量項(Mass term)$\mathcal{L}_{mass}$は

$$\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}_K}{\partial\phi\partial\phi}\right|_{\phi=0} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \tag{1.44}$$

で規格化するので、その解として

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi\phi \tag{1.45}$$

を得る。以上から、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi\phi \tag{1.46}$$

とわかる。

電荷を持つ場合は、複素数場であり、2 つの実数場 $\phi_{1,2}$ で表わせるので、そのラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は、(1.46)より

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi_2\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi_1\phi_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi_2\phi_2 \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\partial_\mu\phi_1\right)^2 + \left(\partial_\mu\phi_2\right)^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \left(\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2\right)\right]\end{aligned} \tag{1.47}$$

であるが、複素数場として、ϕ で表わすと、任意の実数係数 κ として

$$\begin{cases}\phi = \kappa\left(\phi_1 + i\phi_2\right) \\ \phi^\dagger = \kappa\left(\phi_1 - i\phi_2\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\phi_1 = \dfrac{1}{2\kappa}\left(\phi + \phi^\dagger\right) \\ \phi_2 = \dfrac{1}{2i\kappa}\left(\phi - \phi^\dagger\right)\end{cases} \tag{1.48}$$

である。(1.47)にある $\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2$ 項は

$$\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2 = \left[\frac{1}{2\kappa}\left(\phi + \phi^\dagger\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2i\kappa}\left(\phi - \phi^\dagger\right)\right]^2 = \frac{1}{4\kappa^2}\left(2\phi^\dagger\phi - \frac{1}{i^2}2\phi^\dagger\phi\right) = \frac{1}{2\kappa^2}\phi^\dagger\phi = \left(\frac{\phi}{\sqrt{2}\kappa}\right)^\dagger \frac{\phi}{\sqrt{2}\kappa} \tag{1.49}$$

である。ここで、改めて、

$$\phi' = \frac{\phi}{\sqrt{2}\kappa} \tag{1.50}$$

とすれば、(1.48)は、

$$\begin{cases}\phi' = \dfrac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \phi'^\dagger = \dfrac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\phi_1 = \dfrac{\phi' + \phi'^\dagger}{\sqrt{2}} \\ \phi_2 = \dfrac{\phi' - \phi'^\dagger}{\sqrt{2}i}\end{cases} \tag{1.51}$$

と与えられ、従って、(1.49)は

$$\phi_1\phi_1 + \phi_2\phi_2 = \phi^\dagger\phi = |\phi|^2 \tag{1.52}$$

と表わせる。も同様であるので、(1.47)は

$$\boxed{\mathscr{L} = \left|\partial_\mu \phi\right|^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 |\phi|^2} \tag{1.53}$$

を得る。従って、(1.41)と(1.44)に代えて

$$\boxed{\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^2 \mathscr{L}_K}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{\phi}^*}\right|_{\phi=0} = 1 \quad \left(\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x^0} = \frac{\partial \phi}{\partial ct}\right) \\ &\left.\frac{\partial^2 \mathscr{L}_K}{\partial \phi \partial \phi^*}\right|_{\phi=0} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \end{aligned}} \tag{1.54}$$

を得る。

B.スピノル場

スピノル場は複素数なので、ラグランジアン密度$\mathscr{L}$は、(1.54)に倣って、1 成分のスピノル場ψ_αに対して

$$\left.\frac{\partial^2 \mathscr{L}_K}{\partial \dot{\psi}_\alpha \partial \psi^*_\alpha}\right|_{\psi=0} = i \quad \left(\dot{\psi}_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x^0} = \frac{\partial \psi}{\partial ct}\right) \tag{1.55}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \mathscr{L}_K}{\partial \psi_\alpha \partial \overline{\psi}_\alpha}\right|_{\phi=0} = -\frac{mc}{\hbar} \tag{1.56}$$

である。ここに、(1.55)では、ψ^*_αと$\dot{\psi}_\alpha$による微分。更に、(1.56)には複素共役として

$$\begin{cases} \overline{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \\ \overline{\psi}_\alpha = \displaystyle\sum_{\beta=1}^{4} \psi^*_\beta \left(\gamma^0\right)_{\beta\alpha} \end{cases} \quad \left(\gamma^0 \gamma^0 = I\right) \tag{1.57}$$

のように$\overline{\psi}$として現れるので注意する。(1.55)の解から、1 成分のスピノル場ψ_αに対して

$$\mathscr{L} = i\psi^*_\alpha \dot{\psi}_\alpha - \frac{mc}{\hbar} \overline{\psi}_\alpha \psi_\alpha + \cdots \tag{1.58}$$

を得る。$\gamma^0\gamma^0 = I$を考慮してψ^*を$\overline{\psi}$で表わすと

$$\psi^*_\alpha = \left(\psi^* \gamma^0 \gamma^0\right)_\alpha = \left(\overline{\psi}\gamma^0\right)_\alpha \tag{1.59}$$

なので

$$\mathscr{L} = i\psi^*_\alpha \dot{\psi}_\alpha - \frac{mc}{\hbar} \overline{\psi}_\alpha \psi_\alpha + \cdots = i\left(\overline{\psi}\gamma^0\right)_\alpha \dot{\psi}_\alpha - \frac{mc}{\hbar} \overline{\psi}_\alpha \psi_\alpha + \cdots = i\left(\overline{\psi}\gamma^0\right)_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^0} - \frac{mc}{\hbar} \overline{\psi}_\alpha \psi_\alpha + \cdots \tag{1.60}$$

である。ローレンツ変換性を考慮して、

$$\left(\overline{\psi}\gamma^0\right)_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^0} \Rightarrow \left(\overline{\psi}\gamma^0\right)_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^0} - \left(\overline{\psi}\gamma^i\right)_\alpha \nabla_i \psi_\alpha = \sum_{\mu=0}^{3} \left(\overline{\psi}\gamma^\mu\right)_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\mu} \overset{\text{和記号の省略}}{=} \left(\overline{\psi}\gamma^\mu\right)_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\mu} = \left(\overline{\psi}\gamma^\mu\right)_\alpha \partial_\mu \psi_\alpha$$

(1.61)

より、

$$\mathcal{L} = i\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\right)_{\alpha}\partial_{\mu}\psi_{\alpha} - \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}_{\alpha}\psi_{\alpha} \tag{1.62}$$

なので、すべての成分に拡張して、

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{4}\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\right)_{\alpha}\partial_{\mu}\psi_{\alpha} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi \\ \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{4}\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}\psi \end{cases} \tag{1.63}$$

と行列表記にすれば

$$\boxed{\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}\psi} \tag{1.64}$$

を得る。(**【問題７】**(1.64)よりラグランジュ方程式が、ディラック方程式(1.18)を導くことを示せ)。

ここで

- **ラグランジアン密度の実数条件**：ラグランジアン密度は実数である

ので、

- 少なくとも $i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$ と $\bar{\psi}\psi$ が実数である

ことを調べておかないといけない。まず、$i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$ は

$$\begin{aligned} \left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)^{*} &\overset{\substack{\left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)^{*}\text{は数なので} \\ \left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)^{*T}=\left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)^{*}}}{=} \left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)^{*T} = \left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)^{\dagger} = \left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)^{\dagger} = -i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\gamma^{\mu\dagger}\bar{\psi}^{\dagger} \\ &= -i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\gamma^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}\psi \overset{\substack{\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0} \\ \gamma^{0\dagger}=\gamma^{0}\ \left(\Leftarrow\gamma^{0}\gamma^{0}=I\right)}}{=} -i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\left(\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}\right)\gamma^{0}\psi \overset{\gamma^{0}\gamma^{0}=I}{=} -i\partial_{\mu}\psi^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{\mu}\psi \\ &= -i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \end{aligned} \tag{1.65}$$

であるが、更に、計算を進めるには、

- ラグランジアン密度は、(1.39)のように、$\int\mathcal{L}(x)d^{4}x$ から、素粒子の運動を決める

ことに注意する。そこで、(1.65)より積分を付加して、**部分積分を実行**して

$$\begin{gathered} \int\left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)^{*}d^{4}x = \int\left(-i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)d^{4}x = \int\left(+i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)d^{4}x = \int\left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)d^{4}x \\ \Uparrow \psi(x)\Big|_{x=\pm\infty,\ \text{or}\ y=\pm\infty,\ \text{or}\ z=,\pm\infty\ \text{or}\ ct=\pm\infty} = 0 \end{gathered} \tag{1.66}$$

を得るので、$\int\left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)d^{4}x$ は実数である。同様にして、

$$\left(\bar{\psi}\psi\right)^{*} = \bar{\psi}\psi \tag{1.67}$$

を得る（**【問題８】**(1.67)を示せ)。従って、

- $\int\left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)d^{4}x$ 実数である
- $\int\left(\bar{\psi}\psi\right)d^{4}x$ 実数である

事が分かる。以上から、

- $\int\left(i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-\frac{mc}{\hbar}\bar{\psi}\psi\right)d^4x$ 実数である

と保証された。

C.ベクトル場

ベクトル場は実スカラー場が４つ集まったもので、V^0,V_x,V_y,V_z の４成分ある。まず、空間成分 V_x について、(1.46)より

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2\mu_0}\left(\partial_{\mu}V_x\right)^2-\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2V_xV_x+\cdots \tag{1.68}$$

である。[1] ローレンツ変換で不変になる組み合わせとして、４成分に拡張した

$$\begin{cases}\left(\partial_{\mu}V_x\right)^2\Rightarrow-\left(\partial^{\mu}V^0\right)\left(\partial_{\mu}V^0\right)+\left(\partial^{\mu}V_x\right)\left(\partial_{\mu}V_x\right)+\left(\partial^{\mu}V_y\right)\left(\partial_{\mu}V_y\right)+\left(\partial^{\mu}V_z\right)\left(\partial_{\mu}V_z\right)\\ \qquad=-\sum_{\nu=0}^{3}\left(\partial^{\mu}V^{\nu}\right)\left(\partial_{\mu}V_{\nu}\right)\overset{\text{和記号の省略}}{=}-\left(\partial^{\mu}V^{\nu}\right)\left(\partial_{\mu}V_{\nu}\right)\\ V_xV_x\Rightarrow-V^0V^0+V_xV_x+V_yV_y+V_zV_z=-\sum_{\mu=0}^{3}V^{\mu}V_{\mu}\overset{\text{和記号の省略}}{=}-V^{\mu}V_{\mu}\end{cases} \tag{1.69}$$

より、

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2\mu_0}\left(\partial^{\mu}V^{\nu}\right)\left(\partial_{\mu}V_{\nu}\right)+\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2V^{\mu}V_{\mu} \tag{1.70}$$

である。

通常、ベクトル場では、

- 場の強さ：$V^{\mu\nu}=\partial^{\mu}V^{\nu}-\partial^{\nu}V^{\mu}\left(=-V^{\mu\nu}\right)$ （**【問題９】** $V^{\mu\nu}$ が V^{μ} のゲージ変換で不変である事を示せ。但し、V^{μ} のゲージ変換は、$V'_{\mu}=U(x)V_{\mu}U^{\dagger}(x)+iU(x)\partial_{\mu}U^{\dagger}(x)$ であり、$U(x)$ はユニタリー行列である。）
  - アーベリアン（$U(1)$ のような可換アーベル群）の場合の場の強さ
- 場の強さ：$V^{\mu\nu}=\partial^{\mu}V^{\nu}-\partial^{\nu}V^{\mu}-ig\left[V^{\mu},V^{\nu}\right]\Leftarrow V^{\mu\nu}=\sum_{i=1}^{N^2-1}\frac{\lambda^{(i)}}{2}V^{(i)\mu\nu}$ （**【問題１０】** V^{μ} のゲージ変換で不変である事：$Tr\left(V'^{\mu\nu}V'_{\mu\nu}\right)=Tr\left(V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}\right)$ を証明せよ。但し、V^{μ} のゲージ変換は、

[1] $\frac{1}{\mu_0}$ は、電磁場の場合に電磁気学の電場・磁場のエネルギー密度を当てるように規格化するためである。

$V'_\mu = U(x)V_\mu U^\dagger(x) + iU(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$ であり、$U(x)$ はユニタリー行列である。)

➢ 非アーベリアン（$SU(N)$ のような非可換アーベル群）の場合の場の強さ

- ローレンツ条件：$\partial_\mu V^\mu = 0$

を用いて記述する。従って、$\left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\mu V_\nu\right) \Rightarrow V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}$ の置き換えをする。そのためには、前と同様

- ラグランジアン密度は、(1.39)のように、$\int \mathcal{L}(x) d^4x$ から、素粒子の運動を決める

ことに注意する。$\left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\mu V_\nu\right) \Rightarrow V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}$ の置き換えを調べるには、

$$\int \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\mu V_\nu\right) d^4x \Rightarrow \int V^{\mu\nu}V_{\mu\nu} d^4x \tag{1.71}$$

を調べればよい。アーベリアンの場合には、

$$\begin{aligned} V^{\mu\nu}V_{\mu\nu} &= \left(\partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu\right)\left(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu\right) \\ &= \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\mu V_\nu\right) + \left(-\partial^\nu V^\mu\right)\left(-\partial_\nu V_\mu\right) + \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(-\partial_\nu V_\mu\right) + \left(-\partial^\nu V^\mu\right)\left(\partial_\mu V_\nu\right) \end{aligned} \tag{1.72}$$

に於て、

- μ も ν も、0,1,2,3 の和を取り、同じ結果を与える

ので、

$$V^{\mu\nu}V_{\mu\nu} = 2\left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\mu V_\nu\right) - 2\left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\nu V_\mu\right)$$

を得る。従って、

$$\int V^{\mu\nu}V_{\mu\nu} d^4x = 2\int \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\mu V_\nu\right) d^4x - 2\int \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\nu V_\mu\right) d^4x \tag{1.73}$$

を得る。第 2 項 $\int \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\nu V_\mu\right) d^4x$ は、部分積分を 2 回実行すると、$V_\mu(x)\big|_{x=y=z=ct=\pm\infty} = 0$ の性質より

∂^μ と ∂_ν の交換が起こり

$$\int \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\nu V_\mu\right) d^4x = \int \left(\partial_\nu V^\nu\right)\left(\partial^\mu V_\mu\right) d^4x \Leftarrow V_\mu(x)\big|_{x=\pm\infty,\ \mathrm{or}\ y=\pm\infty,\ \mathrm{or}\ z=,\pm\infty\ \mathrm{or}\ ct=\pm\infty} = 0 \tag{1.74}$$

が成り立つ事が分かる。ここで、「ローレンツ条件：$\partial_\mu V^\mu = 0$」を用いると、

$$\int \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\nu V_\mu\right) d^4x = \int \left(\partial_\nu V^\nu\right)\left(\partial^\mu V_\mu\right) d^4x = 0 \tag{1.75}$$

がわかる。従って、(1.73)は

$$\int V^{\mu\nu}V_{\mu\nu} d^4x = 2\int \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\mu V_\nu\right) d^4x - 2\int \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\nu V_\mu\right) d^4x = 2\int \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\mu V_\nu\right) d^4x \tag{1.76}$$

がわかる。つまり、

$$\boxed{\int V^{\mu\nu}V_{\mu\nu} d^4x = 2\int \left(\partial^\mu V^\nu\right)\left(\partial_\mu V_\nu\right) d^4x} \tag{1.77}$$

なので、(1.70)においては、$V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}=2\left(\partial^{\mu}V^{\nu}\right)\left(\partial_{\mu}V_{\nu}\right)$の置き換えができ、

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2\mu_0}\left(\partial^{\mu}V^{\nu}\right)\left(\partial_{\mu}V_{\nu}\right)+\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 V^{\mu}V_{\mu}=-\frac{1}{4\mu_0}V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}+\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 V^{\mu}V_{\mu} \tag{1.78}$$

とわかる。以上から、

$$\boxed{\mathscr{L}=-\frac{1}{4\mu_0}V^{\mu\nu}V_{\mu\nu}+\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 V^{\mu}V_{\mu}\ \left(V^{\mu\nu}=\partial^{\mu}V^{\nu}-\partial^{\nu}V^{\mu}\right)} \tag{1.79}$$

を得る。

Ⅲ. ニュートリノ

A.マヨラナ(Majorana)粒子

ニュートリノは、マヨラナ粒子である可能性が高い。マヨラナ粒子は

- 粒子と反粒子と同じある

という性質を満たしている。反粒子ψ^Cは粒子ψより、

$$\psi^C=C\overline{\psi}^T \tag{1.80}$$

で定義され、ここに

$$\boxed{\begin{array}{l} C=-i\gamma^0\gamma^2=\begin{pmatrix} G & 0\\ 0 & -G\end{pmatrix},\ G=i\sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \gamma^0=\begin{pmatrix} 0 & I\\ I & 0\end{pmatrix},\ \gamma^i=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i\\ -\sigma_i & 0\end{pmatrix}\\ C^{-1}\gamma^{\mu}C=-\gamma^{\mu T},\ C^T=-C,\ C^{\dagger}=C^{-1}\ \ (*)C^T=-C,\ C^{\dagger}=C^{-1}\Rightarrow C^*=-C^{-1}\end{array}} \tag{1.81}$$

である（**【問題１１】**(1.81)を用いてディラック方程式(1.18)よりψ^Cもディラック方程式を満たすことを示せ)。また、$C^{-1}\gamma^{\mu}C=-\gamma^{\mu T}$より、両辺のエルミート共役を取れば

$$\left(C^{-1}\gamma^{\mu}C\right)^{\dagger}=-\gamma^{\mu T\dagger}\Rightarrow C^{\dagger}\gamma^{\mu\dagger}C^{-1\dagger}=-\gamma^{\mu*}\overset{C^{\dagger}=C^{-1}}{\Rightarrow}C^{-1}\gamma^{\mu\dagger}C=-\gamma^{\mu*} \tag{1.82}$$

で、

$$\boxed{C^{-1}\gamma^{\mu\dagger}C=-\gamma^{\mu*}} \tag{1.83}$$

を得る。ψ^C（＝反粒子）は、(1.81)を用いると

$$\psi^C=-\gamma^0C\psi^* \tag{1.84}$$

と表わせる。これより

$$\psi^{C*}=-C^{-1}\gamma^{0\dagger}\psi \tag{1.85}$$

を得る（ここで、(1.83)を用いた)。或いは、

$$\overline{\psi^C}=-\psi^TC^{-1}\gamma^{0\dagger}\gamma^0 \tag{1.86}$$

である（**【問題１２】**１）(1.84)の$\psi^C=-\gamma^0C\psi^*$を示せ。２）(1.85)の$\psi^{C*}=-C^{-1}\gamma^{0\dagger}\psi$を示せ。３）(1.86)の$\overline{\psi^C}=-\psi^TC^{-1}\gamma^{0\dagger}\gamma^0$を示せ。)。つまり、

- ψ^{C*}も$\overline{\psi^C}$（＝反粒子の反粒子は粒子）はψ（＝粒子）の役割

を担うことが分かる：

$$\psi^{C*} = -C^{-1}\gamma^{0\dagger}\psi \Leftrightarrow \overline{\psi^{C}} = -\psi^{T}C^{-1}\gamma^{0\dagger}\gamma^{0} \tag{1.87}$$

をする。とくに、γ^{μ} に(1.81)の表記を取るとき、

$$\boxed{\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}} \tag{1.88}$$

が成り立つので、

$$\overline{\psi^{C}} = -\psi^{T}C^{-1} \Leftrightarrow \psi = C\overline{\psi^{C}}^{T} \tag{1.89}$$

を得る。以上から、

$$\boxed{\begin{aligned}&\psi^{C} = C\overline{\psi}^{T} \Leftrightarrow \overline{\psi} = -\psi^{CT}C^{-1}\\ &\overline{\psi^{C}} = -\psi^{T}C^{-1} \Leftrightarrow \psi = C\overline{\psi^{C}}^{T}\end{aligned}} \tag{1.90}$$

という関係がある。

B.マヨラナニュートリノ

　マヨラナニュートリノは、反粒子が粒子と同じあるという性質を満たす。マヨラナ粒子のラグランジアン密度は、(1.55)と(1.56)を参考にして、ψ（粒子）として「粒子 ν」と「反粒子の反粒子 ν^{C*} や $\overline{\nu^{C}}$」を用いて、(1.55)では「反粒子の反粒子 ν^{C*}」より

$$\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}_K}{\partial\dot{\psi}_\alpha \partial\psi^*_\alpha}\right|_{\psi=0} = i \Rightarrow \begin{cases}\left.\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_K}{\partial\dot{\nu}_\alpha \partial\nu^*_\alpha}\right|_{\psi=0} = i\\ \left.\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_K}{\partial\dot{\nu}^C_\alpha \partial\nu^{C*}_\alpha}\right|_{\psi=0} = i\end{cases} \tag{1.91}$$

に変更し、(1.56)では、「反粒子の反粒子 $\overline{\nu^{C}}$」より

$$\left.\frac{\partial^2 \mathcal{L}_K}{\partial\psi_\alpha \partial\overline{\psi}_\alpha}\right|_{\psi=0} = -m \Rightarrow \begin{cases}\left.\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_K}{\partial\nu_\alpha \partial\overline{\nu}_\alpha}\right|_{\nu=0} = \left.\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_K}{\partial\nu^C_\alpha \partial\overline{\nu^C_\alpha}}\right|_{\nu=0} = -m\\ \left.\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_K}{\partial\nu_\alpha \partial\overline{\nu^C_\alpha}}\right|_{\nu=0} = \left.\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_K}{\partial\nu^C_\alpha \partial\overline{\nu}_\alpha}\right|_{\nu=0} = -m\end{cases} \tag{1.92}$$

である。この解として、単純に(1.64)で ν を ν^{C}（$\overline{\nu}$ を $\overline{\nu^{C}}$）に置き換えた部分を追加して

$$\mathcal{L} = i\overline{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\nu + i\overline{\nu^{C}}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\nu^{C} - \frac{m_1 c}{\hbar}\overline{\nu}\nu - \frac{m_2 c}{\hbar}\overline{\nu^{C}}\nu^{C} - \frac{m_3 c}{\hbar}\overline{\nu^{C}}\nu - \frac{m_4 c}{\hbar}\overline{\nu}\nu^{C} \tag{1.93}$$

を得るが、これは**間違いになる**。この誤りを見るには、更に、(1.90)を用いて、

- $\overline{\nu^{C}}$（＝反粒子の反粒子は粒子）は ν（＝粒子）の役割をする
- $\overline{\nu}$（＝粒子の反粒子は反粒子）は ν^{C}（＝反粒子）の役割をする

を式で表わす。つまり、

$$\overline{\nu^{C}}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\nu^{C} \overset{\textbf{部分積分を実行}\text{する}}{=} \overline{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\nu \tag{1.94}$$

$$\begin{cases} \overline{\nu^C}\nu = -\nu^T C^{-1}\nu \Leftrightarrow \bar{\nu}\nu^C = -\nu^{CT}C^{-1}\nu^C \\ \bar{\nu}\nu = -\nu^{CT}C^{-1}\nu \\ \overline{\nu^C}\nu^C = \bar{\nu}\nu \end{cases} \tag{1.95}$$

を得る（**【問題１３】**「$\overline{\nu^C}\gamma^\mu\partial_\mu\nu^C = \left(\overline{\nu^C}\gamma^\mu\partial_\mu\nu^C\right)^T$ を参考にして(1.94)」と「$\overline{\nu^C}\nu^C = \left(\overline{\nu^C}\nu^C\right)^T$ 等を参考にして(1.95)」を示せ）。従って、(1.93)は

$$\mathcal{L} = 2i\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu\nu - \frac{m_1 c}{\hbar}\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu\right) - \frac{m_2 c}{\hbar}\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu\right) - \frac{m_3 c}{\hbar}\left(-\nu^T C^{-1}\nu\right) - \frac{m_4 c}{\hbar}\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu^C\right) \tag{1.96}$$

になるので、正しくは、

$$\mathcal{L} = i\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu\nu - \frac{(m_1+m_2)c}{\hbar}\overbrace{\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu\right)}^{\bar{\nu}\nu \text{ or } \overline{\nu^C}\nu^C} - \frac{1}{2}\frac{m_3 c}{\hbar}\overbrace{\left(-\nu^T C^{-1}\nu\right)}^{\overline{\nu^C}\nu} - \frac{1}{2}\frac{m_4 c}{\hbar}\overbrace{\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu^C\right)}^{\bar{\nu}\nu^C} \tag{1.97}$$

と修正される（**【問題１４】**何故、$\frac{1}{2}$ が現れるか説明せよ）。ここで、**ラグランジアン密度の実数条件**を調べると

$$\left(\bar{\nu}\nu\right)^* = \bar{\nu}\nu,\ \left(\overline{\nu^C}\nu^C\right)^* = \overline{\nu^C}\nu^C,\ \left(\overline{\nu^C}\nu\right)^* = \bar{\nu}\nu^C \tag{1.98}$$

を考慮すれば、満たしていることが分かる（**【問題１５】**(1.98)を証明せよ）。従って、質量パラメーターの表記 $m_{1,2,3,4}$ を m, m_ν に替えて、最終的に

$$\boxed{\mathcal{L} = i\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu\nu - \frac{mc}{\hbar}\overbrace{\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu\right)}^{\bar{\nu}\nu = (\bar{\nu}\nu)^* = \overline{\nu^C}\nu^C = \left(\overline{\nu^C}\nu^C\right)^*} - \frac{1}{2}\frac{m_\nu c}{\hbar}\overbrace{\left(-\nu^T C^{-1}\nu\right)}^{\overline{\nu^C}\nu} - \frac{1}{2}\frac{m_\nu c}{\hbar}\overbrace{\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu^C\right)}^{\bar{\nu}\nu^C = \left(\overline{\nu^C}\nu\right)^*}} \tag{1.99}$$

を得る。とくに、

- $\overbrace{\left(-\nu^T C^{-1}\nu\right)}^{\overline{\nu^C}\nu}$ や $\overbrace{\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu^C\right)}^{\bar{\nu}\nu^C}$ **をマヨラナ質量**

といい、

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{Majorana}} = i\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu\nu - \frac{1}{2}\frac{m_\nu c}{\hbar}\overbrace{\left(-\nu^T C^{-1}\nu\right)}^{\overline{\nu^C}\nu} - \frac{1}{2}\frac{m_\nu c}{\hbar}\overbrace{\left(-\nu^T C^{-1}\nu\right)^*}^{\bar{\nu}\nu^C = \left(\overline{\nu^C}\nu\right)^*}}$$

の様に

- マヨラナ質量のみを持つニュートリノを**マヨラナニュートリノ**

という。ここで、

- ラグランジアン密度は中性（電荷を持てない）

ので、

- マヨラナ質量は、**中性の素粒子**にのみ可能
  - スピノル場の素粒子では、ニュートリノのみ中性なのでマヨラナ質量が可能（**【問題１６】**これを説明せよ）

になる。

C.ニュートリノのマヨラナ質量項

ν と ν^C を用いるた、ニュートリノ質量項は、(1.99)より

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{mc}{\hbar}\overbrace{\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu\right)}^{\bar{\nu}\nu \text{ or } \overline{\nu^C}\nu^C} - \frac{1}{2}\frac{m_\nu c}{\hbar}\overbrace{\left(-\nu^T C^{-1}\nu\right)}^{\overline{\nu^C}\nu} - \frac{1}{2}\frac{m_\nu c}{\hbar}\overbrace{\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu^C\right)}^{\bar{\nu}\nu^C} \tag{1.100}$$

である。しかし、

- 理論的には、ν と ν^C は別の粒子として取り扱える
  - $-\frac{1}{2}\frac{\boxed{m_\nu}c}{\hbar}\left(-\nu^T C^{-1}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{\boxed{M_\nu}c}{\hbar}\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu^C\right)$

ことになる。従って、ニュートリノ質量項は

$$\boxed{\mathcal{L}_{mass} = -\frac{mc}{\hbar}\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{m_\nu c}{\hbar}\left(-\nu^T C^{-1}\nu\right) - \frac{1}{2}\frac{M_\nu c}{\hbar}\left(-\nu^{CT}C^{-1}\nu^C\right)} \tag{1.101}$$

で与えられる。この表式を簡略化して

$$\boxed{\mathcal{L}_{mass} = -\frac{mc}{\hbar}\nu^C\nu - \frac{1}{2}\frac{m_\nu c}{\hbar}\nu\nu - \frac{1}{2}\frac{M_\nu c}{\hbar}\nu^C\nu^C} \tag{1.102}$$

と表す事にする。ここで、ルールは

$$\boxed{\phi\psi \overset{ルール}{=} -\phi^T C^{-1}\psi} \tag{1.103}$$

である。ニュートリノ質量項には

- 2 種類のニュートリノ：ν と ν^C がある

ので、このよう場合には、２×２行列を使って表記でき

$$\mathcal{L}_{mass} = -\frac{1}{2}\frac{c}{\hbar}\begin{pmatrix}\nu & \nu^C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_\nu & m \\ m & m_\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu \\ \nu^C\end{pmatrix} \tag{1.104}$$

である。(1.104)の質量行列 M ：

$$M = \begin{pmatrix}m_\nu & m \\ m & M_\nu\end{pmatrix} \tag{1.105}$$

を対角化すると、

$$\begin{pmatrix}m_\nu & m \\ m & M_\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix} \tag{1.106}$$

より、

- $\det(M) = 0$ の時、$a = b = 0$ 以外の解が許される（**【問題１７】**これを証明せよ）

ので

$$\det\begin{pmatrix}m_\nu - \lambda & m \\ m & M_\nu - \lambda\end{pmatrix} = 0 \tag{1.107}$$

が必要になる。この解は、λ_+ と λ_- とすると

$$\lambda_\pm = \frac{M_\nu + m_\nu \pm \sqrt{\left(M_\nu - m_\nu\right)^2 + 4m^2}}{2} \tag{1.108}$$

であり、そのとき、固有ベクトルは

$$\left|\lambda_-\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix},\ \left|\lambda_+\right\rangle = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.109}$$

である。ここに、

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{M_\nu - m_\nu + \sqrt{\left(M_\nu - m_\nu\right)^2 + 4m^2}}{A} \\ \sin\theta = \dfrac{2m}{A} \end{cases} \quad \left(A = \sqrt{4m^2 + \left(M_\nu - m_\nu + \sqrt{\left(M_\nu - m_\nu\right)^2 + 4m^2}\right)^2}\right) \tag{1.110}$$

で与えられる（**【問題１８】**(1.109)を導け）。或いは、

$$M = M^T \tag{1.111}$$

なので、

$$U^T = U^{-1} \tag{1.112}$$

のユニタリー行列U

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.113}$$

を用いて（**【問題１９】**(1.109)「ユニタリー行列Uが(1.112)を満たす」時、(1.113)が解の一つである事を示せ）、(1.109)を導ける：

$$UMU^T = U\begin{pmatrix} m_\nu & m \\ m & M_\nu \end{pmatrix}U^T = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \tag{1.114}$$

より（**【問題２０】**(1.114)から、(1.110)を示せ）、

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U\left|\lambda_-\right\rangle \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U\left|\lambda_+\right\rangle \end{cases} \tag{1.115}$$

にて、(1.109)を再現する（**【問題２１】**(1.114)から、(1.115)を示せ）。従って、

$$\boxed{\begin{array}{l} UMU^T = U\begin{pmatrix} m_\nu & m \\ m & M_\nu \end{pmatrix}U^T = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \Leftarrow \lambda_\pm = \dfrac{M_\nu + m_\nu \pm \sqrt{\left(M_\nu - m_\nu\right)^2 + 4m^2}}{2} \\ \Leftarrow \left|\lambda_-\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix},\ \left|\lambda_+\right\rangle = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{M_\nu - m_\nu + \sqrt{\left(M_\nu - m_\nu\right)^2 + 4m^2}}{A} \\ \sin\theta = \dfrac{2m}{A} \end{cases} \quad \left(A = \sqrt{4m^2 + \left(M_\nu - m_\nu + \sqrt{\left(M_\nu - m_\nu\right)^2 + 4m^2}\right)^2}\right) \end{array}}$$

(1.116)

である。

D.軽いマヨラナニュートリノの生成

特別な場合として

$$\boxed{m_\nu = 0} \tag{1.117}$$

を考える。その時、質量$\lambda_\pm$は、(1.116)より

$$\lambda_\pm = \frac{M_\nu + m_\nu \pm \sqrt{(M_\nu - m_\nu)^2 + 4m^2}}{2} = \frac{M_\nu \pm \sqrt{M_\nu^2 + 4m^2}}{2} \tag{1.118}$$

を得る。更に

$$\boxed{M_\nu \gg m} \tag{1.119}$$

を要請する。この近似のもとで、質量$\lambda_\pm$は、(1.116)より

$$\lambda_\pm = \frac{M_\nu \pm \sqrt{M_\nu^2 + 4m^2}}{2} \approx \frac{M_\nu \pm \left(M_\nu + \frac{2m^2}{M_\nu}\right)}{2} = \begin{cases} M_\nu + \frac{m^2}{M_\nu} (= \lambda_+) \\ -\frac{m^2}{M_\nu} (= \lambda_-) \end{cases} \quad (M_\nu \gg m) \tag{1.120}$$

を得る。すなわち、２つのニュートリノの質量$m_{light,heavy}$は、$M_\nu \gg m$を考慮すると

$$\begin{cases} m_{heavy} \approx M_\nu + \frac{m^2}{M_\nu} \approx M_\nu \\ m_{light} \approx -\frac{m^2}{M_\nu} \left(= -m \frac{m}{M_\nu} \right) \ll m \end{cases} \quad (M_\nu \gg m) \tag{1.121}$$

となり（**【問題２２】** $m_{light} \approx -\frac{m^2}{M_\nu}$の質量が負になるが、この解決策を説明せよ)、

- 重いマヨラナニュートリノ：$\boxed{m_{heavy} \approx M_\nu}$ (1.122)
- 軽いマヨラナニュートリノ：$\boxed{m_{light} \approx -\frac{m^2}{M_\nu}}$ (1.123)

が得られる。従って、基準になる質量mに対して、

- $M_\nu \gg m$の関係が成立

すれば

- ニュートリノ$m_{light} \approx -\frac{m^2}{M_\nu} \ll m$が軽いのは、背後に重いニュートリノ$m_{heavy} \approx M_\nu \gg m$があるから

という物理的背景を示唆する。これを**シーソー機構**という。