

第三章 ユークリッド計量

ミンコフスキイ計量からユークリッド計量に移行する。ミンコフスキイ計量は

$$g_{\mu\nu} = \text{diag.}(1, -1, -1, -1) \Leftrightarrow \ell_M^2 = g_{\mu\nu} x_M^\mu x_M^\nu = x_M^{0,2} - \mathbf{x}_M^2$$

ユークリッド計量は、

$$g_{\mu\nu} = \text{diag.}(1, 1, 1, 1) (\equiv \delta_{\mu\nu}) \Leftrightarrow \ell_E^2 = g_{\mu\nu} x_E^\mu x_E^\nu = x_E^{0,2} + \mathbf{x}_E^2$$

である。そこで、

$$\boxed{x_M^0 = -ix_E^0 (= -ix_E^4) \quad (\text{to pure imaginary } x_M^0), \mathbf{x}_M = \mathbf{x}_E}$$

と関係付けると、

$$\ell_M^2 = x_M^{0,2} - \mathbf{x}_M^2 = (-ix_E^0)^2 - \mathbf{x}_E^2 = -(x_E^{0,2} + \mathbf{x}_E^2) = -\ell_E^2$$

このような変更を「解析接続する」という。また、運動量は、

$$p_{M0} \Leftrightarrow i\partial_{M0} = i \frac{\partial}{\partial x_M^0} = i \frac{\partial}{\partial (-ix_E^0)} = -\frac{\partial}{\partial x_E^0} = i \left(i \frac{\partial}{\partial x_E^0} \right) \Leftrightarrow ip_{E0}$$

より、

$$\boxed{p_{M0} = ip_{E0} (= ip_{E4}) \quad (\text{to pure imaginary } p_M^0), \mathbf{p}_M = \mathbf{p}_E \\ D_{M0} = iD_{E0}, \mathbf{D}_M = \mathbf{D}_E \quad (D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu)}$$

がわかる。ここで、 $p_{M0} = ip_{E0}$ であって、 $p_{M0} = -ip_{E0}$ でない（従って $x_M^0 = -ix_E^0$ であって $x_M^0 = ix_E^0$ でない）は複素積分の収束性から決まる。従って、

$$p_M x_M \equiv p_{M\mu} x_M^\mu = p_{M0} x_M^0 - \mathbf{p}\mathbf{x} = (ip_E^0)(-ix_E^0) - \mathbf{p}\mathbf{x} = p_E^0 x_E^0 - \mathbf{p}\mathbf{x} = p_E^0 x_E^0 - \mathbf{p}_E \mathbf{x}_E$$

のように、 $p_M x_M$ の表式は変わらない。

第一節：複素積分と解析接続

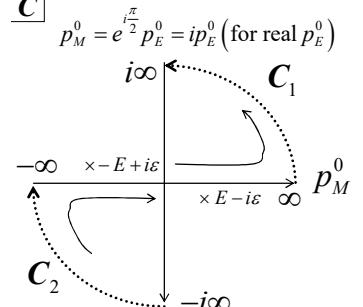
p_M^0 を含む複素平面上で閉じた積分経路 C をとると、この経路内に特異点がなければ（通常運動量空間で $E-i\varepsilon$ と $-E+i\varepsilon$ に特異点がある）、解析関数 $f(z)$ は、

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

を満たす。この経路では、図のよう

$$p_{M0} = ip_{E0}, p_M^0 = ip_E^0$$

であることがわかる。従って、



$$\oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \int_{i\infty}^{-i\infty} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0$$

なので、

- 無限遠方の C_1 と C_2 からの寄与がゼロ

であれば、

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \stackrel{\text{解析接続}}{=} - \int_{i\infty}^{-i\infty} f(z) dz = \int_{-i\infty}^{i\infty} f(z) dz}$$

という関係があることが分かる。そこで、変数変換で

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p_M^0) dp_M^0 \stackrel{\text{解析接続}}{=} \int_{-i\infty}^{i\infty} f(p_M^0) dp_M^0 \stackrel{p_M^0 = ip_E^0}{=} i \int_{-\infty}^{\infty} f(ip_E^0) dp_E^0$$

になる。最終的に、

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(p_M^0) dp_M^0 \stackrel{p_M^0 = ip_E^0}{=} i \int_{-\infty}^{\infty} f(ip_E^0) dp_E^0}$$

変換ルールは、

- 変数変換 $p_M^0 = ip_E^0$ とともに p_E^0 は実数積分のままになる。同様に、 x_M^0 を含む複素平面上で閉じた積分経路 C をとる。この経路では、図のように

$$x_{M0} = -ix_{E0}, x_M^0 = -ix_E^0$$

であることがわかる。この経路内に特異点がなければ、解析関数 $f(z)$ は、

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

従って、

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \int_{i\infty}^{-i\infty} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0$$

なので、無限遠方の C_1 と C_2 からの寄与がゼロであれば、

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \stackrel{\text{解析接続}}{=} - \int_{i\infty}^{-i\infty} f(z) dz}$$

という関係があることが分かる。そこで、変数変換で

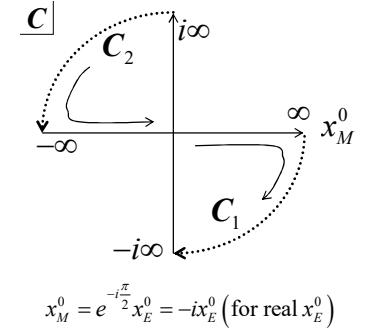
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_M^0) dx_M^0 \stackrel{\text{解析接続}}{=} - \int_{-i\infty}^{i\infty} f(x_M^0) dx_M^0 \stackrel{x_M^0 = -ix_E^0}{=} - \int_{\infty}^{-\infty} f(-ix_E^0) d(-ix_E^0) = i \int_{\infty}^{-\infty} f(-ix_E^0) dx_E^0 = -i \int_{-\infty}^{\infty} f(-ix_E^0) dx_E^0$$

になる。最終的に、

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_M^0) dx_M^0 \stackrel{x_M^0 = -ix_E^0}{=} -i \int_{-\infty}^{\infty} f(-ix_E^0) dx_E^0}$$

変換ルール、

- 変数変換 $x_M^0 = -ix_E^0$ とともに x_E^0 は実数積分のままになる。



$$x_M^0 = e^{-\frac{\pi}{2}} x_E^0 = -ix_E^0 \quad (\text{for real } x_E^0)$$

標準の

$$x_M^0 = -ix_E^0, p_M^0 = ip_E^0$$

に従って、他の物理量もユークリッド化する必要がある。スピン1の場を A_M^μ とすると、 p_M^0 と同じ変換になり

$$A_M^0 = iA_E^0, -\mathbf{A}_M = \mathbf{A}_E$$

である。一方、スピン1/2のスピノールは、 γ 行列の変換性を知る必要がある。 γ 行列は、

$$\{\gamma_M^\mu, \gamma_M^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \text{(上付き・下付き区別あり)} \Leftrightarrow \{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \text{(上付き・下付き区別無し)}$$

で定義される。標準のとり方は、

$$\gamma_M^0 = \gamma_E^0, \gamma_M^{1,2,3} = i\gamma_E^{1,2,3}$$

であり、その結果、

$$\{\gamma_M^\mu, \gamma_M^\nu\} = 2g^{\mu\nu} = 2 \times \text{diag.}(1, -1, -1, -1) \stackrel{\gamma_E^0 = \gamma_M^0, \gamma_E^{1,2,3} = -i\gamma_M^{1,2,3}}{\Rightarrow} \{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} = 2 \times \text{diag.}(1, 1, 1, 1)$$

が保証される。例えば、

$$\gamma_M^\mu D_{M\mu} = \gamma_M^0 D_{M0} + \gamma_M \mathbf{D}_M \stackrel{\gamma_M^{1,2,3} = i\gamma_E^{1,2,3}, D_M^0 = iD_E^0, \mathbf{D}_M = \mathbf{D}_E}{=} \gamma_E^0 (iD_{E0}) + (i\gamma_E) \mathbf{D}_E = i(\gamma_E^0 D_{E0} + \gamma_E \mathbf{D}_E) = i\gamma_E^\mu D_{E\mu}$$

になる。その結果、

$$\begin{aligned} (\gamma_M^\mu D_{M\mu})^2 &= \gamma_M^\mu D_{M\mu} \gamma_M^\nu D_{M\nu} = \frac{1}{2} \{\gamma_M^\mu, \gamma_M^\nu\} D_{M\mu} D_{M\nu} = g^{\mu\nu} D_{M\mu} D_{M\nu} \\ (i\gamma_E^\mu D_{E\mu})^2 &= -\gamma_E^\mu D_{E\mu} \gamma_E^\nu D_{E\nu} = -\frac{1}{2} \{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} D_{E\mu} D_{E\nu} = -\delta^{\mu\nu} D_{E\mu} D_{E\nu} \end{aligned}$$

より、正しく、

$$g^{\mu\nu} D_{M\mu} D_{M\nu} = -\delta^{\mu\nu} D_{E\mu} D_{E\nu} \left(\Leftarrow \ell_M^2 = -\ell_E^2 \right)$$

が得られる。

スカラーフィールド (ϕ)

ラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_M = |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|^2)$$

なので、

$$\int d^4x_M \mathcal{L}_M = \int d^4x_M \left(|D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|^2) \right) \stackrel{x_M^0 = -ix_E^0}{=} -i \int d^4x_E \left(-|D_{\mu E} \phi|^2 - V(|\phi|^2) \right)$$

ここに、

$$\begin{aligned} |D_\mu \phi|^2 &= |(\partial_\mu - igA_\mu)\phi|^2 = |(\partial_0 - igA_0)\phi|^2 - |(\nabla + ig\mathbf{A})\phi|^2 \stackrel{\partial_0 = i\partial_{0E}, A_0 = A_E}{=} -|(\partial_{0E} - igA_{0E})\phi|^2 - |(\nabla - ig\mathbf{A}_E)\phi|^2 \\ &= -|D_{\mu E} \phi|^2 \quad (D_{0E} = \partial_{0E} - igA_{0E}, \mathbf{D}_E = \nabla - ig\mathbf{A}_E) \end{aligned}$$

を用いた。従って、

$$\int d^4x_M \mathcal{L}_M = i \int d^4x_E \left(|D_{\mu E} \phi|^2 + V(|\phi|^2) \right)$$

或いは、

$$\boxed{\int d^4x_M \mathcal{L}_M = i \int d^4x_E \mathcal{L}_E \begin{cases} \mathcal{L}_M = |D_\mu \phi|^2 - V(|\phi|^2) \\ \mathcal{L}_E = |D_{\mu E} \phi|^2 + V(|\phi|^2) \end{cases}}$$

$$\text{スピノール } (\psi : \gamma_M^0 = \gamma_E^0, \gamma_M^{1,2,3} = i\gamma_E^{1,2,3})$$

ラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_M = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi$$

なので、

$$\int d^4x_M \mathcal{L}_M = \int d^4x_M \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \stackrel{x_M^0 = -i\gamma_E^0, D^0 = iD_E^0}{=} \int d^4x_E \bar{\psi} (-i\gamma_E^\mu D_{\mu E} - m) \psi$$

ここに、

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu D_\mu &= i(\gamma^0 D_0 + \gamma \mathbf{D}) \stackrel{\gamma^0 = \gamma_E^0, \gamma^{1,2,3} = i\gamma_E^{1,2,3}}{=} i(\gamma_E^0 iD_E^0 + (i\gamma_E) \mathbf{D}_E) = -(\gamma_E^0 D_E^0 + \gamma_E \mathbf{D}_E) = -\gamma_E^\mu D_{\mu E} \\ \mathbf{D} &= \nabla - ig(-\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{D} = \nabla + ig\mathbf{A} \stackrel{-A = A_E}{=} \nabla - igA_E = \mathbf{D}_E \Rightarrow \boxed{D_{0E} = \partial_{0E} - igA_{0E}, \mathbf{D}_E = \nabla - ig\mathbf{A}_E} \end{aligned}$$

を用いた。従って、

$$\int d^4x_M \mathcal{L}_M = i \int d^4x_E \bar{\psi} (\gamma_E^\mu D_{\mu E} + m) \psi$$

或いは、

$$\boxed{\int d^4x_M \mathcal{L}_M = i \int d^4x_E \mathcal{L}_E \begin{cases} \mathcal{L}_M = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \\ \mathcal{L}_E = \bar{\psi} (\gamma_E^\mu D_{\mu E} + m) \psi \end{cases}}$$

$$\text{ベクター } (A_\mu : A_0 = iA_{0E}, -\mathbf{A} = \mathbf{A}_E)$$

ラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^a \Lambda^a F^{b\mu\nu} \Lambda^b) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\Lambda^a \Lambda^b) F_{\mu\nu}^a F^{b\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$$

$$\text{with } \text{Tr}(\Lambda^a \Lambda^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \left(\Lambda^a = \frac{\tau^a}{2} \text{ for SU(2)} \right)$$

なので、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \Leftarrow A_\mu = (A_0, -\mathbf{A}), \partial_\mu = (\partial_0, \nabla) \\ F_{i0} &= \nabla_i A_0 - \partial_0(-\mathbf{A}_i) - ig[-\mathbf{A}_i, A_0] = \nabla_i A_0 + \partial_0 \mathbf{A}_i + ig[\mathbf{A}_i, A_0] \\ F_{0i} &= \partial_0(-\mathbf{A}_i) - \nabla_i A_0 - ig[A_0, -\mathbf{A}] = -\partial_0 \mathbf{A}_i - \nabla_i A_0 + ig[A_0, \mathbf{A}_i] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\partial_0 = i\partial_{0E}}{\substack{A_0 = iA_{0E} \\ -A_E = A}} \\
&= -(i\partial_{0E})(-A_{Ei}) - \nabla_i(iA_{E0}) + ig[iA_{E0}, -A_{Ei}] = i(\partial_{E0}A_{Ei} - \nabla_iA_{E0} - ig[A_{E0}, A_{Ei}]) \\
F^{0i} &= -F_{0i} = iF_{E0i} \\
F_{ij} &= \nabla_i(-A_j) - \nabla_j(-A_i) - ig[-A_i, -A_j] = -\nabla_iA_j + \nabla_jA_i - ig[A_i, A_j] \\
&\stackrel{\partial_0 = i\partial_{0E}}{\substack{A_0 = iA_{0E} \\ -A_E = A}} \\
&= -\nabla_i(-A_{Ej}) + \nabla_j(-A_{Ei}) - ig[(-A_{Ei}), (-A_{Ej})] = \nabla_iA_{Ej} - \nabla_jA_{Ei} - ig[A_{Ei}, A_{Ej}] = F_{Eij} \\
\Rightarrow & \boxed{\begin{cases} F_{0i} = -iF_{E0i}, \quad F^{0i} = iF_{E0i}, \quad F_{ij} = F_{Eij}, \quad F^{ij} = F_{Eij} \\ F_{E0i} = \partial_{E0}A_{Ei} - \nabla_iA_{E0} - ig[A_{E0}, A_{Ei}] (= -F_{Ei0}) \Rightarrow F_E^{\mu\nu} = \partial^\mu A_E^\nu - \partial^\nu A_E^\mu - ig[A_E^\mu, A_E^\nu] \\ F_{Eij} = \nabla_iA_{Ej} - \nabla_jA_{Ei} - ig[A_{Ei}, A_{Ej}] \end{cases}} \\
A'_0 &= UA_0U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_0U^\dagger = \stackrel{\partial_0 = i\partial_{0E}}{UiA_{E0}U^\dagger} + \frac{i}{g}Ui\partial_{0E}U^\dagger = i\left(UA_{E0}U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_{E0}U^\dagger\right) = iA'_E \\
\Rightarrow & \boxed{A'_{E0} = UA_{E0}U^\dagger + \frac{i}{g}U\partial_{E0}U^\dagger} = \frac{i}{g}U(\partial_{E0} - igA_{E0})U^\dagger = \frac{i}{g}UD_{E0}U^\dagger \\
-A'_i &= U(-A_i)U^\dagger + \frac{i}{g}U\nabla_iU^\dagger = \stackrel{-A = A_E, \nabla = \nabla_E}{UA_{Ei}U^\dagger} + \frac{i}{g}U\nabla_{Ei}U^\dagger = A'_{Ei} \\
\Rightarrow & \boxed{A'_{iE} = UA_{iE}U^\dagger + \frac{i}{g}U\nabla_iU^\dagger} = \frac{i}{g}U(\nabla_{Ei} - igA_{Ei})U^\dagger = \frac{i}{g}UD_{Ei}U^\dagger \\
F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= F_{0i}F^{0i} + F_{ij}F^{ij} = (-iF_{E0i})(iF_{E0i}) + F_{Eij}F_{Eij} = F_{E0i}F_{E0i} + F_{Eij}F_{Eij} = F_{E\mu\nu}F^{E\mu\nu} \\
\boxed{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{E\mu\nu}F^{E\mu\nu} \text{ (上付き・下付き区別無し)}}
\end{aligned}$$

を用いた。従って、

$$\int d^4x_M \mathcal{L}_M = \int d^4x_M \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \right)^{x_M^0 = -ix_E^0} = \int (-id^4x_E) \left(-\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu E}F_E^{\mu\nu}) \right) = i \int d^4x_E \mathcal{L}_E$$

或いは、

$$\boxed{\int d^4x_M \mathcal{L}_M = i \int d^4x_E \mathcal{L}_E \begin{cases} \mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\ \mathcal{L}_E = \frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu E}F_E^{\mu\nu}) \end{cases}}$$

になる。

電磁気学からの対応：

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{B}^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A^k = \epsilon^{ijk}\partial_j(-A_k) = -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}(\partial_j A_k - \partial_k A_j) \\ \mathbf{E}^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i = -(-\partial^i)A^0 - \partial^0 A^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \end{cases}
\end{aligned}$$

そこで、

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

とすると、

$$\begin{cases} \mathbf{B}^i = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk} \Rightarrow F_{jk} = -\varepsilon^{jki}\mathbf{B}^i = -\varepsilon_{0jki}\mathbf{B}^i \\ \mathbf{E}^i = F^{i0} \end{cases} \left(\varepsilon_{0jki} = \varepsilon^{jki} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{0123} = 1} \Rightarrow \boxed{\varepsilon^{0123} = -1} \right)$$

なので、

$$F_{0i} = \mathbf{E}^i, \quad F_{ij} = -\varepsilon_{0ijk}\mathbf{B}^k$$

従って、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}^1 & \mathbf{E}^2 & \mathbf{E}^3 \\ -\mathbf{E}^1 & 0 & -\mathbf{B}^3 & -\mathbf{B}^2 \\ -\mathbf{E}^2 & \mathbf{B}^3 & 0 & -\mathbf{B}^1 \\ -\mathbf{E}^3 & \mathbf{B}^2 & \mathbf{B}^1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E}^1 & -\mathbf{E}^2 & -\mathbf{E}^3 \\ \mathbf{E}^1 & 0 & -\mathbf{B}^3 & -\mathbf{B}^2 \\ \mathbf{E}^2 & \mathbf{B}^3 & 0 & -\mathbf{B}^1 \\ \mathbf{E}^3 & \mathbf{B}^2 & \mathbf{B}^1 & 0 \end{pmatrix}$$

がわかる。また、

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \quad (\varepsilon^{0123} = -1)$$

とすると、

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B}^1 & \mathbf{B}^2 & \mathbf{B}^3 \\ -\mathbf{B}^1 & 0 & -\mathbf{E}^3 & -\mathbf{E}^2 \\ -\mathbf{B}^2 & \mathbf{E}^3 & 0 & -\mathbf{E}^1 \\ -\mathbf{B}^3 & \mathbf{E}^2 & \mathbf{E}^1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{B}^1 & -\mathbf{B}^2 & -\mathbf{B}^3 \\ \mathbf{B}^1 & 0 & \mathbf{E}^3 & \mathbf{E}^2 \\ \mathbf{B}^2 & -\mathbf{E}^3 & 0 & \mathbf{E}^1 \\ \mathbf{B}^3 & -\mathbf{E}^2 & -\mathbf{E}^1 & 0 \end{pmatrix}$$

になり、

$$\text{Tr}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \text{Tr}(-2\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = 2\text{Tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{E})$$

$$\text{Tr}(F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}) = \text{Tr}(2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 4\text{Tr}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$$

とわかる。