

# 第八章 ファイマン図：量子クーロン散乱

第七章では、陽電子の散乱を取り扱った。ここでは、電子のクーロン散乱を取り扱い、更に

- 光子が量子場

のときを考える。この

- 光子によるクーロン散乱への量子補正

を考察する。S行列は、

$$S = T \exp \left( -\frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \mathcal{H}_{int}(x) \right) \quad (8.1)$$

であり

$$\mathcal{H}_{int}(x) = \mathcal{H}_{int}(\varphi_{in}(x)) = -\frac{e}{\hbar} N(\overline{\psi_{in}(x)} A_{in}(x) \psi_{in}(x)) - \frac{e}{\hbar} N(\overline{\psi_{in}(x)} A^{ext}(x) \psi_{in}(x)) \quad (8.2)$$

として、電子を記述するので  $q_\psi = -1$  にしてある。規格された電子の状態は

- 始状態：運動量  $\mathbf{p}_1$  ・ スピン  $s_1$  の電子  $\Rightarrow \boxed{|\psi_a^+\rangle = \frac{a^{(s_1)\dagger}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} |0\rangle}$  (8.3)

- 終状態：運動量  $\mathbf{p}_2$  ・ スピン  $s_2$  の電子  $\Rightarrow \boxed{|\psi_b^+\rangle = \frac{a^{(s_2)\dagger}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} |0\rangle}$  (8.4)

になる（問題 1）。

## 遷移確率

求める振幅は(7.12)と同様で、量子場の影響を見るために展開項の第 3 項まで調べる。(8.1)より

$$M \equiv \langle \psi_b^+ | T \exp \left( -\frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \mathcal{H}_{int}(x) \right) | \psi_a^+ \rangle = \langle \psi_b^+ | (I + S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)}) | \psi_a^+ \rangle \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \int d^4 x_1 T \left\{ N(\overline{\psi(x_1)} \cancel{A^{ext}(x_1)} \psi(x_1) + \overline{\psi(x_1)} \cancel{A(x_1)} \psi(x_1)) \right\} \\ S^{(2)} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \right)^2 T \left( \int d^4 x_1 N(\overline{\psi(x_1)} \cancel{A^{ext}(x_1)} \psi(x_1) + \overline{\psi(x_1)} \cancel{A(x_1)} \psi(x_1)) \right)^2 \\ S^{(3)} &= \frac{1}{3!} \left( \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \right)^3 T \left( \int d^4 x_1 N(\overline{\psi(x_1)} \cancel{A^{ext}(x_1)} \psi(x_1) + \overline{\psi(x_1)} \cancel{A(x_1)} \psi(x_1)) \right)^3 \end{aligned} \quad (8.6)$$

である。ここで  $S^{(1)}$  に対する量子補正を調べるため、

- $S^{(2,3)}$  において  $\cancel{A^{ext}(x_1)}$  を一つ含む項

を対象にする。従って、

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \right)^2 2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 T \left\{ N(\overline{\psi(x_1)} \cancel{A(x_1)} \psi(x_1)) N(\overline{\psi(x_2)} \cancel{A^{ext}(x_2)} \psi(x_2)) \right\} \\ S^{(3)} &= \frac{1}{3!} \left( \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \right)^3 3 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 T \left\{ N(\overline{\psi(x_1)} \cancel{A(x_1)} \psi(x_1)) N(\overline{\psi(x_2)} \cancel{A(x_2)} \psi(x_2)) \right\} \quad (\text{続く}) \end{aligned}$$

$$\cdot N\left(\overline{\psi(x_3)} \cancel{A^{ext}(x_3)} \psi(x_3)\right)\} \quad (8.7)$$

になる。さらに

$$\langle \psi_b^+ | S^{(2)} | \psi_a^+ \rangle = 0 \quad (8.8)$$

に注意すると（問題 2）

$$M \equiv \langle \psi_b^+ | (I + S^{(1)} + S^{(3)}) | \psi_a^+ \rangle \quad (8.9)$$

である。さて、(7.41)式を陽電子の代わりに、電子の場合に翻訳して

$$\begin{aligned} M^{(1)} &\equiv \langle \psi_b^+ | S^{(1)} | \psi_a^+ \rangle_{\text{真空偏極を除く}} = \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \int d^4 x_1 \langle \psi_b^+ | T \left\{ N\left(\overline{\psi(x_1)} \cancel{A^{ext}(x_1)} \psi(x_1)\right) \right\} | \psi_a^+ \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \int d^4 x_1 \langle \psi_b^+ | N\left(\overline{\psi(x_1)} \gamma^\lambda \psi(x_1)\right) | \psi_a^+ \rangle A_\lambda^{ext}(x_1) \\ &= i \frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^2} \overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^0 u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) \frac{Ze}{c\epsilon_0 |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \delta\left(\frac{E_2 - E_1}{c}\right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

を得る。ここで、フーリエ（逆）変換として

$$\boxed{a_\mu(q) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^4 x \exp\left(\frac{iqx}{\hbar}\right) A_\mu^{ext}(x) \quad (q = p_2 - p_1)} \quad (8.11)$$

とすると、(7.43)の

$$\int d\mathbf{x}_1 e^{\frac{iqx_1}{\hbar}} A_{\mu=0}^{ext}(\mathbf{x}_1) = \int d\mathbf{x} e^{\frac{iqx}{\hbar}} \frac{Ze}{4\pi c\epsilon_0 |\mathbf{x}|} = \frac{\hbar^2}{c\epsilon_0} \frac{Ze}{q^2} \quad (8.12)$$

を用いて、再度、(8.10)を  $A^\mu(x)$  で表すと

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= i \frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^2} \overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^0 u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) \frac{1}{c\epsilon_0} \frac{Ze}{q^2} \delta\left(\frac{E_2 - E_1}{c}\right) \\ &= i \frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^2} \overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^0 u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) \frac{1}{\hbar^2} \int d\mathbf{x} e^{\frac{iqx}{\hbar}} A_{\mu=0}^{ext}(\mathbf{x}) \delta(q^0) \\ &= i \frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\pi\hbar^3} \overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^\mu u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) (2\pi\hbar)^4 \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^4 x e^{\frac{iqx}{\hbar}} A_\mu^{ext}(x) \\ &= i 2\pi e \overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^\mu u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) a_\mu(q) \end{aligned} \quad (8.13)$$

より（問題 2）

$$M^{(1)} = 2\pi i e \overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^\lambda u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) a_\lambda(q) \quad (8.14)$$

を得る。ここで、

$$\boxed{M^{(1)} = (2\pi)^4 i e \frac{\overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda(q)} \quad (8.15)$$

と整理しておく（問題 3）。また、

$$\begin{aligned}
M^{(3)} &\equiv \langle \psi_b^+ | S^{(3)} | \psi_a^+ \rangle = \frac{1}{3!} \left( \frac{i e}{\hbar c \hbar} \right)^3 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \langle \psi_b^+ | T \left\{ N \left( \overline{\psi(x_1)} \cancel{A(x_1)} \psi(x_1) \right) N \left( \overline{\psi(x_2)} \cancel{A(x_2)} \psi(x_2) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot N \left( \overline{\psi(x_3)} \cancel{A^{ext}(x_3)} \psi(x_3) \right) \right\} | \psi_a^+ \rangle \\
&= \frac{1}{2!} \left( \frac{i e}{\hbar c \hbar} \right)^3 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \langle \psi_b^+ | T \left\{ N \left( \overline{\psi(x_1)} \cancel{A(x_1)} \psi(x_1) \right) N \left( \overline{\psi(x_2)} \cancel{A(x_2)} \psi(x_2) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot N \left( \overline{\psi(x_3)} \gamma^\rho \psi(x_3) \right) \right\} | \psi_a^+ \rangle A_\rho^{ext}(x_3)
\end{aligned} \tag{8.16}$$

である。そこで、 $T \left\{ N \left( \overline{\psi(x_1)} \cancel{A(x_1)} \psi(x_1) \right) N \left( \overline{\psi(x_2)} \cancel{A(x_2)} \psi(x_2) \right) N \left( \overline{\psi(x_3)} \gamma^\rho \psi(x_3) \right) \right\}$  は(6.30)を用いると、縮約の仕方により種々の項が出るので、

$$\begin{aligned}
&T \left( N \left( \overline{\psi_\alpha}(x_1) \psi_\beta(x_1) A_\mu(x_1) \right) N \left( \overline{\psi_\rho}(x_2) \psi_\sigma(x_2) A_\nu(x_2) \right) N \left( \overline{\psi_\tau}(x_3) \psi_\omega(x_3) \right) \right) \\
&= (\text{縮約0}) + (\text{縮約1}) + (\text{縮約2}) + (\text{縮約3})
\end{aligned} \tag{8.17}$$

とすると

$$\begin{aligned}
M^{(3)} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{i e}{\hbar c \hbar} \right)^3 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \langle \psi_b^+ | T \left\{ N \left( \overline{\psi(x_1)} \cancel{A(x_1)} \psi(x_1) \right) N \left( \overline{\psi(x_2)} \cancel{A(x_2)} \psi(x_2) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot N \left( \overline{\psi(x_3)} \gamma^\rho \psi(x_3) \right) \right\} | \psi_a^+ \rangle A_\rho^{ext}(x_3) \\
&= \frac{1}{2!} \left( \frac{i e}{\hbar c \hbar} \right)^3 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \langle \psi_b^+ | (\text{縮約0}) + (\text{縮約1}) + (\text{縮約2}) + (\text{縮約3}) | \psi_a^+ \rangle \\
&\quad (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\rho\sigma} (\gamma^\lambda)_{\tau\omega} A_\lambda^{ext}(x_3)
\end{aligned} \tag{8.18}$$

と記述するとき、(6.30)を用いて

$$(\text{縮約0}) = N \left( \overline{\psi_\alpha}(x_1) \psi_\beta(x_1) \overline{\psi_\rho}(x_2) \psi_\sigma(x_2) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \overline{\psi_\tau}(x_3) \psi_\omega(x_3) \right) \tag{8.19}$$

$$\begin{aligned}
(\text{縮約1}) &= N \left( \overline{\psi_\alpha \cdot}(x_1) \psi_\beta(x_1) \overline{\psi_\rho}(x_2) \psi_\sigma \cdot(x_2) \overline{\psi_\tau}(x_3) \psi_\omega(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
&+ N \left( \overline{\psi_\alpha \cdot}(x_1) \psi_\beta(x_1) \overline{\psi_\rho}(x_2) \psi_\sigma(x_2) \overline{\psi_\tau}(x_3) \psi_\omega \cdot(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
&+ N \left( \overline{\psi_\alpha}(x_1) \psi_\beta \cdot(x_1) \overline{\psi_\rho \cdot}(x_2) \psi_\sigma(x_2) \overline{\psi_\tau}(x_3) \psi_\omega(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
&+ N \left( \overline{\psi_\alpha}(x_1) \psi_\beta \cdot(x_1) \overline{\psi_\rho}(x_2) \psi_\sigma(x_2) \overline{\psi_\tau \cdot}(x_3) \psi_\omega(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
&+ N \left( \overline{\psi_\alpha}(x_1) \psi_\beta(x_1) \overline{\psi_\rho \cdot}(x_2) \psi_\sigma(x_2) \overline{\psi_\tau}(x_3) \psi_\omega \cdot(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
&+ N \left( \overline{\psi_\alpha}(x_1) \psi_\beta(x_1) \overline{\psi_\rho}(x_2) \psi_\sigma \cdot(x_2) \overline{\psi_\tau \cdot}(x_3) \psi_\omega(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

順序を  $\psi(x)\overline{\psi(x)}$  に整えて

$$\begin{aligned}
&= -N \left( \psi_\sigma \cdot(x_2) \overline{\psi_\alpha \cdot}(x_1) \psi_\beta(x_1) \overline{\psi_\rho}(x_2) \overline{\psi_\tau}(x_3) \psi_\omega(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
&- N \left( \psi_\omega \cdot(x_3) \overline{\psi_\alpha \cdot}(x_1) \psi_\beta(x_1) \overline{\psi_\rho}(x_2) \psi_\sigma(x_2) \overline{\psi_\tau}(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
&+ N \left( \psi_\beta \cdot(x_1) \overline{\psi_\rho \cdot}(x_2) \overline{\psi_\alpha}(x_1) \psi_\sigma(x_2) \overline{\psi_\tau}(x_3) \psi_\omega(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \quad (\text{続く} \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + N\left(\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2)\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& - N\left(\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& + N\left(\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{8.20}$$

ここで

$$\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) = N\left(A_{\mu}(x_1)A_{\nu}(x_2)\right) + A_{\mu}^{\cdot}(x_1)A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \tag{8.21}$$

である。次に、縮約が 2 つある場合を調べれば、例えば、(縮約 1)から

$$\begin{aligned}
(\text{縮約1}) & = -N\left(\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \Rightarrow -N\left(\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot\cdot}}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad - N\left(\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot\cdot}}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad - N\left(\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot\cdot}}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{8.22}$$

なので、残りも同様に縮約を追加し、独立な縮約として

$$\begin{aligned}
(\text{縮約2}) & = -N\left(\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot\cdot}}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad - N\left(\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot\cdot}}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad - N\left(\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot\cdot}}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad + N\left(\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot\cdot}}(x_1)\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot\cdot}}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad + N\left(\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot\cdot}}(x_1)\psi_{\sigma}^{\cdot\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot\cdot}}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad + N\left(\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot\cdot}}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot\cdot}}(x_2)\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\psi_{\omega}^{\cdot\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad + N\left(\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot\cdot}}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot\cdot}}(x_2)\psi_{\sigma}^{\cdot\cdot}(x_2)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad - N\left(\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\psi_{\sigma}^{\cdot\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot\cdot}}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad + N\left(\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot\cdot}}(x_2)\psi_{\omega}^{\cdot\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{8.23}$$

更に、縮約が 3 つある場合を表せば、

$$\begin{aligned}
(\text{縮約3}) & = -N\left(\psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot\cdot\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot\cdot\cdot}}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot\cdot\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad + N\left(\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot\cdot\cdot}}(x_1)\psi_{\sigma}^{\cdot\cdot\cdot}(x_2)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot\cdot\cdot}}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\
& \quad + N\left(\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3)\overline{\psi_{\alpha}^{\cdot\cdot\cdot}}(x_1)\overline{\psi_{\rho}^{\cdot\cdot\cdot}}(x_2)\psi_{\sigma}^{\cdot\cdot}(x_2)\psi_{\omega}^{\cdot\cdot\cdot}(x_3)\right)\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{8.24}$$

になる。ここで、始状態と終状態に電子が 1 個ずつしかないので、(8.21)では

$$\mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) = A_{\mu}^{\cdot}(x_1)A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \tag{8.25}$$

のみ扱えばよい（問題 4）。縮約は、(6.27)より

$$\psi_{\alpha}^{\cdot}(x)\overline{\psi}_{\beta}^{\cdot}(y) = \frac{1}{2}S_{F\alpha\beta}(x-y), \quad A_{\mu}^{\cdot}(x)A_{\nu}^{\cdot}(y) = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Delta_F(x-y) \quad (8.26)$$

を用いて書き換えることができる。ここで便宜のため、

$$\begin{aligned} D_F(x) \left( \equiv \frac{1}{2}\Delta_F(x) \right) &= \frac{i\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} d^4 p \\ K_{F\alpha\beta}(x) \left( \equiv \frac{1}{2}S_{F\alpha\beta}(x) \right) &= \left( i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar} \right)_{\alpha\beta} D_F(x) = \frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{(\not{p} + mc)_{\alpha\beta} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} d^4 p \\ D_{F\mu\nu}(x) &= -\mu_0 g_{\mu\nu} D_F(x) \Big|_{m=0} = -\frac{i\hbar^3 c \mu_0}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{g_{\mu\nu} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 + i\varepsilon} d^4 p \end{aligned} \quad (8.27)$$

を導入し

$$\psi_{\alpha}^{\cdot}(x)\overline{\psi}_{\beta}^{\cdot}(y) = K_{F\alpha\beta}(x-y), \quad A_{\mu}^{\cdot}(x)A_{\nu}^{\cdot}(y) = D_{F\mu\nu}(x-y) \quad (8.28)$$

と表す。また、運動量表示の伝搬関数として、(8.27)より

$$\begin{aligned} \Delta_F(p) &= \frac{i\hbar^3 c}{p^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \Leftarrow D_F(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \Delta_F(p) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \\ S_F(p) &= \frac{i\hbar^2 c (\not{p} + mc)}{p^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} = \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} - mc + i\varepsilon} \Leftarrow K_F(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} S_F(p) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \\ D_{F\mu\nu}(p) &= \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \Leftarrow D_{F\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} D_{F\mu\nu}(p) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \end{aligned} \quad (8.29)$$

を用いる（問題 5）。

## ファイマン図

(縮約0)と(縮約1)と(縮約3)は寄与しない。 $\psi\bar{\psi}$ の順序の添え字に整理する。例えば、(8.22)は

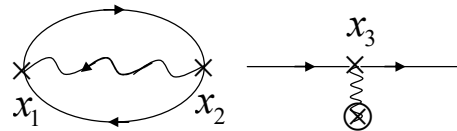
$$\begin{aligned} (\text{縮約2}) &= -N \left( \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi}_{\alpha}^{\cdot}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi}_{\rho}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi}_{\tau}^{\cdot}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\ &\quad - N \left( \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi}_{\alpha}^{\cdot}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi}_{\rho}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi}_{\tau}^{\cdot}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\ &\quad - N \left( \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi}_{\alpha}^{\cdot}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi}_{\rho}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi}_{\tau}^{\cdot}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3) \right) \mathcal{A}_{\mu\nu}(x_1, x_2) \\ &= -N \left( \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi}_{\alpha}^{\cdot}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi}_{\rho}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi}_{\tau}^{\cdot}(x_3)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1)A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \\ &\quad + N \left( \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi}_{\alpha}^{\cdot}(x_1)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi}_{\tau}^{\cdot}(x_3)\overline{\psi}_{\rho}^{\cdot}(x_2)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1)A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \\ &\quad - N \left( \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2)\overline{\psi}_{\alpha}^{\cdot}(x_1)\psi_{\omega}^{\cdot}(x_3)\overline{\psi}_{\rho}^{\cdot}(x_2)\psi_{\beta}^{\cdot}(x_1)\overline{\psi}_{\tau}^{\cdot}(x_3) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1)A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \end{aligned}$$

であり、以下、同様にして

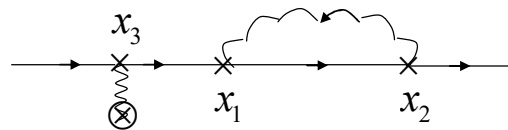
$$\begin{aligned}
& (\text{縮約2}) = -N \left( \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2) \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) \psi_{\beta}^{\cdot}(x_1) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) \psi_{\omega}(x_3) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1) A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \\
& + N \left( \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2) \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) \psi_{\beta}^{\cdot}(x_1) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \psi_{\omega}(x_3) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1) A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \\
& - N \left( \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2) \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) \psi_{\beta}(x_1) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) \psi_{\omega}^{\cdot}(x_3) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1) A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \\
& - N \left( \psi_{\beta}^{\cdot}(x_1) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \psi_{\sigma}(x_2) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) \psi_{\omega}^{\cdot}(x_3) \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1) A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \\
& + N \left( \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) \psi_{\beta}^{\cdot}(x_1) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) \psi_{\omega}(x_3) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1) A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \\
& - N \left( \psi_{\omega}^{\cdot}(x_3) \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) \psi_{\beta}^{\cdot}(x_1) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \psi_{\sigma}(x_2) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1) A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \\
& + N \left( \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) \psi_{\beta}^{\cdot}(x_1) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) \psi_{\omega}^{\cdot}(x_3) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \psi_{\sigma}(x_2) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1) A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \\
& - N \left( \psi_{\omega}^{\cdot}(x_3) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) \psi_{\beta}(x_1) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1) A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \\
& + N \left( \psi_{\sigma}^{\cdot}(x_2) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) \psi_{\beta}(x_1) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \psi_{\omega}^{\cdot}(x_3) \right) A_{\mu}^{\cdot}(x_1) A_{\nu}^{\cdot}(x_2) \\
& = -N \left( K_{F\alpha\alpha}(x_2-x_1) K_{F\beta\rho}(x_1-x_2) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) \psi_{\omega}(x_3) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\
& + N \left( K_{F\alpha\alpha}(x_2-x_1) K_{F\beta\tau}(x_1-x_3) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \psi_{\omega}(x_3) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\
& - N \left( K_{F\alpha\alpha}(x_2-x_1) \psi_{\beta}(x_1) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) K_{F\omega\rho}(x_3-x_2) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\
& - N \left( K_{F\beta\rho}(x_1-x_2) \psi_{\sigma}(x_2) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) K_{F\omega\alpha}(x_3-x_1) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\
& + N \left( \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) K_{F\beta\rho}(x_1-x_2) K_{F\sigma\tau}(x_2-x_3) \psi_{\omega}(x_3) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\
& - N \left( K_{F\omega\alpha}(x_3-x_1) K_{F\beta\rho}(x_1-x_2) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \psi_{\sigma}(x_2) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\
& + N \left( \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) K_{F\beta\tau}(x_1-x_3) K_{F\omega\rho}(x_3-x_2) \psi_{\sigma}(x_2) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\
& - N \left( K_{F\omega\rho}(x_3-x_2) K_{F\sigma\tau}(x_2-x_3) \overline{\psi_{\alpha}^{\cdot}}(x_1) \psi_{\beta}(x_1) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\
& + N \left( \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) K_{F\sigma\tau}(x_2-x_3) K_{F\omega\alpha}(x_3-x_1) \psi_{\beta}(x_1) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)
\end{aligned} \tag{8.30}$$

それぞれの項に対応するファイマン図は

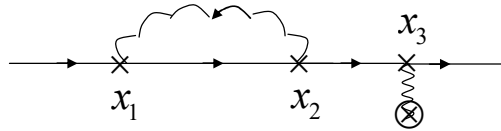
1 項目)  $-N \left( K_{F\alpha\alpha}(x_2-x_1) K_{F\beta\rho}(x_1-x_2) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) \psi_{\omega}(x_3) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)$



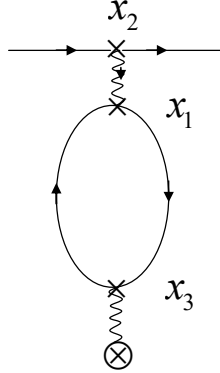
2 項目)  $N \left( K_{F\alpha\alpha}(x_2-x_1) K_{F\beta\tau}(x_1-x_3) \overline{\psi_{\rho}^{\cdot}}(x_2) \psi_{\omega}(x_3) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)$



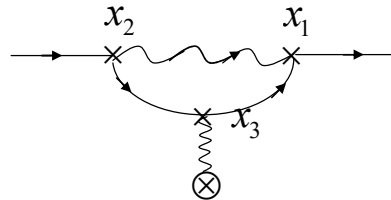
3 項目)  $-N \left( K_{F\alpha\alpha}(x_2-x_1) \psi_{\beta}(x_1) \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) K_{F\omega\rho}(x_3-x_2) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)$   
 $= N \left( \overline{\psi_{\tau}^{\cdot}}(x_3) K_{F\alpha\alpha}(x_2-x_1) K_{F\omega\rho}(x_3-x_2) \psi_{\beta}(x_1) \right) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)$



6 項目)  $\boxed{\text{注意}}$   $N\left(K_{F\omega\alpha}(x_3-x_1)K_{F\beta\rho}(x_1-x_3)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2)\right)D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)$



7 項目)  $N\left(\overline{\psi}_\alpha(x_1)K_{F\beta\tau}(x_1-x_3)K_{F\omega\rho}(x_3-x_2)\psi_\sigma(x_2)\right)D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)$



を得る（問題 6）。ここで

● 1 項目) は真空のエネルギーの補正項であるので、ここでは考えなくてよいので、問題 6 の結果も考慮して、独立な項目として

$$\begin{aligned} (\text{縮約}2) &= 2N\left(K_{F\sigma\alpha}(x_2-x_1)K_{F\beta\tau}(x_1-x_3)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\omega(x_3)\right)D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\ &+ 2N\left(K_{F\sigma\alpha}(x_2-x_1)\overline{\psi}_\tau(x_3)\psi_\beta(x_1)K_{F\omega\rho}(x_3-x_2)\right)D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\ &\boxed{\text{注意}} 2N\left(K_{F\omega\alpha}(x_3-x_1)K_{F\beta\tau}(x_1-x_3)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2)\right)D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\ &+ 2N\left(\overline{\psi}_\alpha(x_1)K_{F\beta\tau}(x_1-x_3)K_{F\omega\rho}(x_3-x_2)\psi_\sigma(x_2)\right)D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \end{aligned} \quad (8.31)$$

を得る。以上から

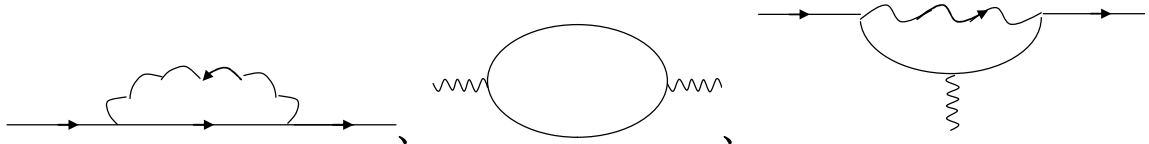
$$\begin{aligned} M^{(3)} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \right)^3 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \\ &\cdot \langle \psi_b^+ | 2N\left(K_{F\sigma\alpha}(x_2-x_1)K_{F\beta\tau}(x_1-x_3)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\omega(x_3)\right)D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\ &+ 2N\left(K_{F\sigma\alpha}(x_2-x_1)\overline{\psi}_\tau(x_3)\psi_\beta(x_1)K_{F\omega\rho}(x_3-x_2)\right)D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\ &\boxed{\text{注意}} 2N\left(K_{F\omega\alpha}(x_3-x_1)K_{F\beta\tau}(x_1-x_3)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2)\right)D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\ &+ N\left(\overline{\psi}_\alpha(x_1)K_{F\beta\tau}(x_1-x_3)K_{F\omega\rho}(x_3-x_2)\psi_\sigma(x_2)\right)D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) | \psi_a^+ \rangle \\ &\cdot (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\rho\sigma} (\gamma^\lambda)_{\tau\omega} A_\lambda^{\text{ext}}(x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2!} \left( \frac{i e}{\hbar c \hbar} \right)^3 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \\
 &\cdot \left\langle \psi_b^+ \left| 2 : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu K_F(x_2 - x_1) \gamma^\mu K_F(x_1 - x_3) \cancel{A^{ext}(x_3)} \psi(x_3) : D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \right. \right. \\
 &+ 2 : \bar{\psi}(x_3) \cancel{A^{ext}(x_3)} K_F(x_3 - x_2) \gamma^\nu K_F(x_2 - x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) : D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \left. \right. \quad (8.32)
 \end{aligned}$$

注意

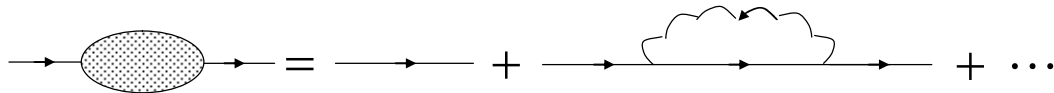
$$\begin{aligned}
 &\boxed{-} 2 : Tr \left( K_F(x_3 - x_1) \gamma^\mu K_F(x_1 - x_3) \cancel{A^{ext}(x_3)} \right) : \bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \\
 &+ : \bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu K_F(x_1 - x_3) \cancel{A^{ext}(x_3)} K_F(x_3 - x_2) \gamma^\nu \psi(x_2) : D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2) \left| \psi_a^+ \right\rangle
 \end{aligned}$$

を得る。(8.30)のグラフに含まれる部分過程の

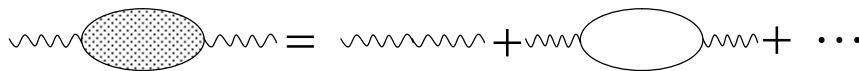


はそれぞれ

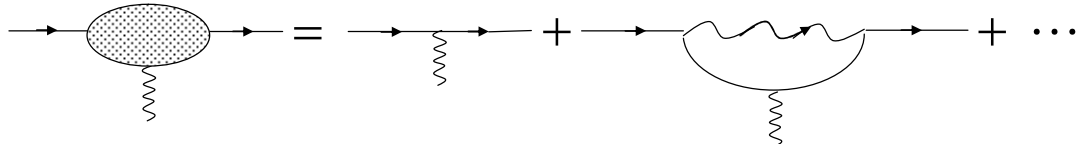
- 電子の自己エネルギーへの  $e$  の 2 次の量子補正 :



- 光子の自己エネルギーへの  $e$  の 2 次の量子補正



- 光子と電子の結合への  $e$  の 2 次の量子補正



に対応する。

## 量子効果とファイマングラフ

(8.32)の量子効果を評価するため

$$\begin{aligned}
 D_F(x) &= \frac{i\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} d^4 p, \quad K_{F\alpha\beta}(x) = \frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{(\not{p} + mc)_{\alpha\beta} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} d^4 p \\
 D_{F\mu\nu}(x) &= -\frac{i\hbar^3 c \mu_0}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{g_{\mu\nu} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 + i\epsilon} d^4 p \\
 \psi(x) &= \int \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^3 2\omega(\mathbf{p}) K}} d\mathbf{p} \sum_{i=1}^2 \left( u_\beta^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + v_\beta^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right) \\
 \bar{\psi}(x) &= \int \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^3 2\omega(\mathbf{p}) K}} d\mathbf{p} \sum_{i=1}^2 \left( \overline{u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})} a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) + \overline{v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})} b^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \right)
 \end{aligned}$$

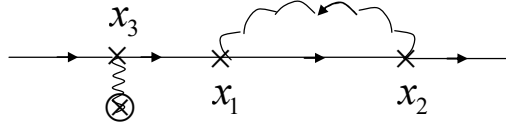


$$\begin{aligned}
|\psi_a^+\rangle &= \frac{a^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}_1)K}}|0\rangle, \quad \langle\psi_b^+| = \langle 0|\frac{a^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} \\
a_\mu(q) &= \int \frac{d^4x}{(2\pi\hbar)^4} A_\mu(x) e^{iqx}, \quad \{a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), a^{(j)}(\mathbf{p}')\} = 2\omega(\mathbf{p})K\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta^{ij}
\end{aligned}
\tag{8.33}$$

を使う。

### a. 電子の自己エネルギーを含む量子効果 1

$$\text{【2項目】 } 2N(K_{F\sigma\alpha}(x_2-x_1)K_{F\beta\tau}(x_1-x_3)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\omega(x_3))D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)$$



評価する積分は・・・

$$\begin{aligned}
M_a^{(3)} &= \frac{1}{2!} \left( \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \right)^3 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \cdot \boxed{2} \langle\psi_b^+| : K_{F\sigma\alpha}(x_2-x_1) K_{F\beta\tau}(x_1-x_3) \overline{\psi}_\rho(x_2) \psi_\omega(x_3) : \\
&\quad \cdot D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) |\psi_a^+\rangle \cdot (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\gamma^\nu)_{\rho\sigma} (\gamma^\lambda)_{\tau\omega} A_\lambda^{ext}(x_3) \\
&= \left( \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \right)^3 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \langle\psi_b^+| : \overline{\psi}(x_2) \gamma^\nu K_F(x_2-x_1) \gamma^\mu K_F(x_1-x_3) \cancel{A_\lambda^{ext}(x_3)} \psi(x_3) : |\psi_a^+\rangle D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \\
&= \left( \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \right)^3 \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} \langle 0| a^{(s2)}(\mathbf{p}_2) \\
&\quad \cdot \int \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^3 2\omega(\mathbf{p})K}} d\mathbf{p} \sum_{i=1}^2 \left( \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})} a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx_2}{\hbar}\right) + \overline{v^{(i)}(\mathbf{p})} b^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx_2}{\hbar}\right) \right) \\
&\quad \cdot \gamma^\nu \left( \int \frac{d^4k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i\hbar^2 c (\not{k}_1 + mc)}{k_1^2 - m^2 c^2 - i\varepsilon} e^{-\frac{ik_1(x_2-x_1)}{\hbar}} \right) \gamma^\mu \left( \int \frac{d^4k_2}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i\hbar^2 c (\not{k}_2 + mc)}{k_2^2 - m^2 c^2 - i\varepsilon} e^{-\frac{ik_2(x_1-x_3)}{\hbar}} \right) \cancel{A_\lambda^{ext}(x_3)} \\
&\quad \cdot \int \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^3 2\omega(\mathbf{p}')K}} d\mathbf{p}' \sum_{i'=1}^2 \left( u^{(i')}(\mathbf{p}') a^{(i')}(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{ip'x_3}{\hbar}\right) + v^{(i')}(\mathbf{p}') b^{(i')\dagger}(\mathbf{p}') \exp\left(\frac{ip'x_3}{\hbar}\right) \right) : \\
&\quad \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} a^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1) |0\rangle \left( \int \frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} e^{-\frac{ik(x_1-x_2)}{\hbar}} \right) \\
&= \left( \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \right)^3 \sqrt{(\hbar c)^2 (i\hbar^2 c)^2 \hbar^3 c \mu_0} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} \left( \int \frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} e^{-\frac{ik(x_1-x_2)}{\hbar}} \right) \\
&\quad \cdot \langle 0| a^{(s2)}(\mathbf{p}_2) : \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 2\omega(\mathbf{p})K}} \sum_{i=1}^2 \left( \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})} a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx_2}{\hbar}\right) + \overline{v^{(i)}(\mathbf{p})} b^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx_2}{\hbar}\right) \right) \\
&\quad \cdot \gamma^\nu \left( \int \frac{d^4k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i(\not{k}_1 + mc)}{k_1^2 - m^2 c^2 - i\varepsilon} e^{-\frac{ik_1(x_2-x_1)}{\hbar}} \right) \gamma^\mu \left( \int \frac{d^4k_2}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i(\not{k}_2 + mc)}{k_2^2 - m^2 c^2 - i\varepsilon} e^{-\frac{ik_2(x_1-x_3)}{\hbar}} \right) \cancel{A_\lambda^{ext}(x_3)} \\
&\quad \cdot \int \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^3 2\omega(\mathbf{p}')K}} d\mathbf{p}' \sum_{i'=1}^2 \left( u^{(i')}(\mathbf{p}') a^{(i')}(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{ip'x_3}{\hbar}\right) + v^{(i')}(\mathbf{p}') b^{(i')\dagger}(\mathbf{p}') \exp\left(\frac{ip'x_3}{\hbar}\right) \right) : a^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1) |0\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot a^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle \\
& = \left(\frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar}\right)^3 \hbar^8 c^4 \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} \left( \int \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon} e^{-\frac{ik(x_1-x_2)}{\hbar}} \right) \\
& \cdot \langle 0|a^{(s2)}(\mathbf{p}_2) : \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p})K} \sum_{i=1}^2 \left( \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})} a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \left( \frac{i\mathbf{p}x_2}{\hbar} \right) + \overline{v^{(i)}(\mathbf{p})} b^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x_2}{\hbar}\right) \right) \\
& \cdot \gamma^\nu \left( \frac{d^4 k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i(\not{k}_1 + mc)}{k_1^2 - m^2 c^2 - i\varepsilon} e^{-\frac{ik_1(x_2-x_1)}{\hbar}} \right) \gamma^\mu \left( \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i(\not{k}_2 + mc)}{k_2^2 - m^2 c^2 - i\varepsilon} e^{-\frac{ik_2(x_1-x_3)}{\hbar}} \right) A_{\lambda}^{ext}(x_3) \\
& \cdot \int \frac{d\mathbf{p}'}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}')K} \sum_{i'=1}^2 \left( u^{(i')}(\mathbf{p}') a^{(i')}(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}'x_3}{\hbar}\right) + v^{(i')}(\mathbf{p}') b^{(i')\dagger}(\mathbf{p}') \exp\left(\frac{i\mathbf{p}'x_3}{\hbar}\right) \right) : a^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle
\end{aligned} \tag{8.34}$$

である。ここに、 $\mu_0 = 1/c^2 \varepsilon_0$  を用いた。そして、積分をまとめて、 $J$  とおく・・・

$$\begin{aligned}
M_a^{(3)} & = \overbrace{\left(\frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar}\right)^3 \frac{\hbar^2}{c\varepsilon_0}}^{(ie)^3 \frac{\hbar^2}{c\varepsilon_0}} \hbar^8 c^4 \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} \\
& \cdot (-ig_{\mu\nu})(i)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi\hbar)^4} \frac{e^{-\frac{ik(x_1-x_2)}{\hbar}} e^{-\frac{ik_1(x_2-x_1)}{\hbar}} e^{-\frac{ik_2(x_1-x_3)}{\hbar}}}{(k^2 + i\varepsilon)(k_1^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)(k_2^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)} A_{\lambda}^{ext}(x_3) \\
& \cdot \left. \left( \langle 0|a^{(s2)}(\mathbf{p}_2) : \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p})K} \sum_{i=1}^2 \left( \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})} a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x_2}{\hbar}\right) + \overline{v^{(i)}(\mathbf{p})} b^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x_2}{\hbar}\right) \right) \right. \right. \\
& \cdot \gamma^\nu (\not{k}_1 + m) \gamma^\mu (\not{k}_2 + m) \gamma^\lambda \\
& \cdot \left. \int \frac{d\mathbf{p}'}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}')K} \sum_{i'=1}^2 \left( u^{(i')}(\mathbf{p}') a^{(i')}(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}'x_3}{\hbar}\right) + v^{(i')}(\mathbf{p}') b^{(i')\dagger}(\mathbf{p}') \exp\left(\frac{i\mathbf{p}'x_3}{\hbar}\right) \right) : \right. \\
& \left. a^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle \right) = \boxed{J} \\
& \equiv (ie)^3 \frac{\hbar^2}{c\varepsilon_0} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} (-ig_{\mu\nu})(-i)^2 \\
& \cdot \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi\hbar)^4} \frac{e^{-\frac{ik(x_1-x_2)}{\hbar}} e^{-\frac{ik_1(x_2-x_1)}{\hbar}} e^{-\frac{ik_2(x_1-x_3)}{\hbar}}}{(k^2 + i\varepsilon)(k_1^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)(k_2^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)} \boxed{J}
\end{aligned} \tag{8.35}$$

次に、 $N$  積を評価して

$$\begin{aligned}
J & = \langle 0|a^{(s2)}(\mathbf{p}_2) : \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p})K} \sum_{i=1}^2 \left( \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})} a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x_2}{\hbar}\right) + \overline{v^{(i)}(\mathbf{p})} b^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x_2}{\hbar}\right) \right) \\
& \cdot \gamma^\nu (\not{k}_1 + mc) \gamma^\mu (\not{k}_2 + mc) \gamma^\lambda \\
& \cdot \int \frac{d\mathbf{p}'}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}')K} \sum_{i'=1}^2 \left( u^{(i')}(\mathbf{p}') a^{(i')}(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}'x_3}{\hbar}\right) + v^{(i')}(\mathbf{p}') b^{(i')\dagger}(\mathbf{p}') \exp\left(\frac{i\mathbf{p}'x_3}{\hbar}\right) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot a^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle \leftarrow \boxed{\langle 0|b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) = b^{(i')}(\mathbf{p}')|0\rangle = 0} \\
& = \langle 0|a^{(s2)}(\mathbf{p}_2) \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}) K} \sum_{i=1}^2 \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})} a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x_2}{\hbar}\right) \gamma^\nu (\not{k}_1 + mc) \gamma^\mu (\not{k}_2 + mc) \gamma^\lambda \\
& \quad \cdot \int \frac{d\mathbf{p}'}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}') K} \sum_{i'=1}^2 u^{(i')}(\mathbf{p}') a^{(i')}(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}'x_3}{\hbar}\right) a^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle \tag{8.36}
\end{aligned}$$

である（問題 7）。更に、

$$\begin{aligned}
J & = \langle 0|a^{(s2)}(\mathbf{p}_2) \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}) K} \sum_{i=1}^2 \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})} a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x_2}{\hbar}\right) \\
& \quad \cdot \gamma^\nu (\not{k}_1 + mc) \gamma^\mu (\not{k}_2 + mc) \gamma^\lambda \int \frac{d\mathbf{p}'}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}') K} \sum_{i'=1}^2 u^{(i')}(\mathbf{p}') a^{(i')}(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}'x_3}{\hbar}\right) a^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle \\
& \quad \leftarrow \boxed{\{a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), a^{(j)}(\mathbf{p}')\} = 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{ij}} \\
& = \langle 0| \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}) K} \sum_{i=1}^2 \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})} \left(-a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(s2)}(\mathbf{p}_2) + 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \delta^{i s_2}\right) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x_2}{\hbar}\right) \\
& \quad \cdot \gamma^\nu (\not{k}_1 + mc) \gamma^\mu (\not{k}_2 + mc) \gamma^\lambda \\
& \quad \cdot \int \frac{d\mathbf{p}'}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}') K} \sum_{i'=1}^2 u^{(i')}(\mathbf{p}') \left(-a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}') a^{(s2)}(\mathbf{p}_1) + 2\omega(\mathbf{p}') K \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1) \delta^{i s_2}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}'x_3}{\hbar}\right) |0\rangle \\
& \quad \leftarrow \langle 0|a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) = a^{(i')}(\mathbf{p}_2)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1 \\
& = \langle 0| \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}) K} 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \overline{u^{(s2)}(\mathbf{p})} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x_2}{\hbar}\right) \cdot \gamma^\nu (\not{k}_1 + mc) \gamma^\mu (\not{k}_2 + mc) \gamma^\lambda \\
& \quad \cdot \int \frac{d\mathbf{p}'}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}') K} 2\omega(\mathbf{p}') K \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_1) u^{(s1)}(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}'x_3}{\hbar}\right) |0\rangle \\
& = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}_2) K} 2\omega(\mathbf{p}_2) K \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}_1) K} 2\omega(\mathbf{p}_1) K \\
& \quad \cdot \overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^\nu (\not{k}_1 + mc) \gamma^\mu (\not{k}_2 + mc) \gamma^\lambda u^{(s1)}(\mathbf{p}_1) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}_2x_2}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}_1x_3}{\hbar}\right) \tag{8.37}
\end{aligned}$$

以上から、

$$\begin{aligned}
M_a^{(3)} & = (ie)^3 \frac{\hbar^2}{c\epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_2) K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_1) K}} (-ig_{\mu\nu})(-i)^2 \\
& \quad \cdot \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi\hbar)^4} \frac{e^{\frac{ik(x_1-x_2)}{\hbar}} e^{\frac{ik_1(x_2-x_1)}{\hbar}} e^{\frac{ik_2(x_1-x_3)}{\hbar}} A_2^{ext}(x_3)}{(k^2 + i\varepsilon)(k_1^2 - m^2c^2 + i\varepsilon)(k_2^2 - m^2c^2 + i\varepsilon)} J \\
& = (ie)^3 \frac{\hbar^2}{c\epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_2) K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_1) K}} (-ig_{\mu\nu})(-i)^2 \quad (\text{続く} \dots)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi\hbar)^4} \frac{e^{\frac{ik(x_1-x_2)}{\hbar}} e^{\frac{ik_1(x_2-x_1)}{\hbar}} e^{\frac{ik_2(x_1-x_3)}{\hbar}} A_\lambda^{ext}(x_3)}{(k^2+i\varepsilon)(k_1^2-m^2c^2+i\varepsilon)(k_2^2-m^2c^2+i\varepsilon)} \\
& \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}_2) K} 2\omega(\mathbf{p}_2) K \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3} 2\omega(\mathbf{p}_1) K} 2\omega(\mathbf{p}_1) K \\
& \cdot \overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^\nu (\not{k}_1 + mc) \gamma^\mu (\not{k}_2 + mc) \gamma^\lambda u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) \exp\left(\frac{ip_2 x_2}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{ip_1 x_3}{\hbar}\right) \\
& = (ie)^3 \frac{\hbar^2}{c\varepsilon_0} (-ig_{\mu\nu}) (-i)^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \\
& \cdot \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi\hbar)^4} \frac{e^{\frac{ik(x_1-x_2)}{\hbar}} e^{\frac{ik_1(x_2-x_1)}{\hbar}} e^{\frac{ik_2(x_1-x_3)}{\hbar}} A_\lambda^{ext}(x_3)}{(k^2+i\varepsilon)(k_1^2-m^2c^2+i\varepsilon)(k_2^2-m^2c^2+i\varepsilon)} \\
& \cdot \overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^\nu (\not{k}_1 + mc) \gamma^\mu (\not{k}_2 + mc) \gamma^\lambda u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) \exp\left(\frac{ip_2 x_2}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{ip_1 x_3}{\hbar}\right) \\
& = (ie)^3 \frac{1}{\varepsilon_0 \hbar c} (-ig_{\mu\nu}) (-i)^2 \\
& \cdot \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi\hbar)^4} \frac{e^{\frac{ik(x_1-x_2)}{\hbar}} e^{\frac{ik_1(x_2-x_1)}{\hbar}} e^{\frac{ik_2(x_1-x_3)}{\hbar}} A_\lambda^{ext}(x_3)}{(k^2+i\varepsilon)(k_1^2-m^2c^2+i\varepsilon)(k_2^2-m^2c^2+i\varepsilon)} \tag{8.38} \\
& \cdot \frac{\overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \gamma^\nu (\not{k}_1 + mc) \gamma^\mu (\not{k}_2 + mc) \gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp\left(\frac{ip_2 x_2}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{ip_1 x_3}{\hbar}\right)
\end{aligned}$$

を得る。ここで

$$\boxed{\int d^4 x e^{\frac{ikx}{\hbar}} = (2\pi\hbar)^4 \delta(k)} \tag{8.39}$$

を用いるために、 $x_{1,2,3}$  積分を実行する。

$$\begin{aligned}
M_a^{(3)} & = (ie)^3 \frac{1}{\varepsilon_0 \hbar c} (-ig_{\mu\nu}) (-i)^2 \\
& \cdot \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi\hbar)^4} \frac{e^{\frac{ik(x_1-x_2)}{\hbar}} e^{\frac{ik_1(x_2-x_1)}{\hbar}} e^{\frac{ik_2(x_1-x_3)}{\hbar}} A_\lambda^{ext}(x_3)}{(k^2+i\varepsilon)(k_1^2-m^2c^2+i\varepsilon)(k_2^2-m^2c^2+i\varepsilon)} \\
& \cdot \frac{\overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \gamma^\nu (\not{k}_1 + mc) \gamma^\mu (\not{k}_2 + mc) \gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp\left(\frac{ip_2 x_2}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{ip_1 x_3}{\hbar}\right) \\
& = (ie)^3 \frac{1}{\varepsilon_0 \hbar c} (-ig_{\mu\nu}) (-i)^2 \cdot \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi\hbar)^4} \leftarrow \boxed{a_\mu(q) = \int \frac{d^4 x}{(2\pi\hbar)^4} A_\mu(x) e^{\frac{iqx}{\hbar}}} \\
& \cdot \frac{e^{\frac{i(-k-k_1-k_2)x_1}{\hbar}} e^{\frac{i(k-k_1+p_2)x_2}{\hbar}} e^{\frac{i(k_2-p_1)x_3}{\hbar}} A_\lambda^{ext}(x_3)}{(k^2+i\varepsilon)(k_1^2-m^2c^2+i\varepsilon)(k_2^2-m^2c^2+i\varepsilon)} \frac{\overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \gamma^\nu (\not{k}_1 + m) \gamma^\mu (\not{k}_2 + m) \gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2!} (ie)^3 \frac{1}{\epsilon_0 \hbar c} (-ig_{\mu\nu}) (-i)^2 \\
 &\cdot \int \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi\hbar)^4} \frac{\delta(-k+k_1-k_2) (2\pi\hbar)^4 \delta(k-k_1+p_2)}{(k^2+i\epsilon)(k_1^2-m^2c^2+i\epsilon)(k_2^2-m^2c^2+i\epsilon)} \\
 &\cdot (2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{ext}(k_2-p_1) \frac{\overline{u^{(s_2)}(p_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \gamma^\nu (\not{k}_1 + mc) \gamma^\mu (\not{k}_2 + mc) \gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \\
 &= (ie)^3 \frac{1}{\epsilon_0 \hbar c} (-ig_{\mu\nu}) (-i)^2 \int d^4 k d^4 k_2 \frac{\delta(p_2-k_2)}{(k^2+i\epsilon)((k+p_2)^2-m^2c^2+i\epsilon)(k_2^2-m^2c^2+i\epsilon)} \\
 &\cdot a_\lambda^{ext}(k_2-p_1) \frac{\overline{u^{(s_2)}(p_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \gamma^\nu (\not{k} + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{k}_2 + m) \gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \\
 &= (ie)^3 \frac{1}{\epsilon_0 \hbar c} (-ig_{\mu\nu}) (-i)^2 \int d^4 k \frac{1}{(k^2+i\epsilon)((k+p_2)^2-m^2c^2+i\epsilon)(p_2^2-m^2c^2+i\epsilon)} \\
 &\cdot a_\lambda^{ext}(p_2-p_1) \frac{\overline{u^{(s_2)}(p_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \gamma^\nu (\not{k} + \not{p}_2 + mc) \gamma^\mu (\not{p}_2 + mc) \gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}}
 \end{aligned} \tag{8.40}$$

以上から

$$\begin{aligned}
 M_a^{(3)} &= (ie)^3 \frac{1}{\epsilon_0 \hbar c} (-ig_{\mu\nu}) (-i)^2 \int d^4 k \frac{1}{(k^2+i\epsilon)((k+p_2)^2-m^2+i\epsilon)(p_2^2-m^2+i\epsilon)} \\
 &\cdot a_\lambda^{ext}(p_2-p_1) \frac{\overline{u^{(s_2)}(p_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \gamma^\nu (\not{k} + \not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p}_2 + m) \gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}}
 \end{aligned} \tag{8.41}$$

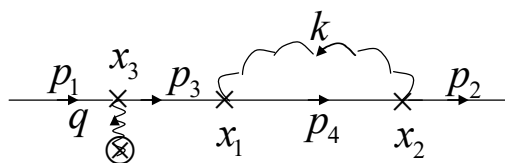
になる。これを(8.15)と比較するため、

$$\begin{aligned}
 M_a^{(3)} &= (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s_2)}(p_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2-p_1) \\
 \Gamma^\lambda &= \frac{1}{\epsilon_0 \hbar c} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k} + \not{p}_2 + m)}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \frac{i(\not{p}_2 + m)}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^\lambda \leftarrow 4 \times 4 \text{行列}
 \end{aligned} \tag{8.42}$$

とまとめる。 $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$  のときに  $M_a^{(1)}$  を与える。

==ファイマングラフからの評価==

この結果を、グラフから導いてみる。グラフに運動量を書き入れると・・・



である。ルールは

- 内線の 4 次元運動量（ここでは  $q, k, p_3, p_4$ ）はそれぞれに 4 次元積分と 4 元運動量保存則：

$(2\pi)^4 \delta(4\text{元運動量})$  の形で取り入れる。

- 内線には、対応する伝搬関数： $S_F(p) = \frac{i\hbar^2 c (\not{p} + mc)}{p^2 - m^2 c^2 + i\epsilon}$ ,  $D_{F\mu\nu}(p) = \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$
- 入・出電子（フェルミオン）には、対応する波動関数  $\sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \times \frac{u^{(s)}(\mathbf{p})}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left( = \frac{\sqrt{\hbar c} u^{(s)}(\mathbf{p})}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \right)$
- 入・出光子（ボゾン）には、対応する波動関数  $\sqrt{\frac{c\mu_0}{\hbar}} \times \frac{e^{(\lambda)}(\mathbf{p})}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left( = \frac{\sqrt{\hbar c \mu_0} e^{(\lambda)}(\mathbf{p})}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \right)$
- 電子（フェルミオン）のループは  $Tr$ 、及び、- を付ける。<sup>注意</sup>
- 電子と光子のバーテックスには、 $i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu$  ( $q_\psi = -e$ )
- 外場  $\otimes$   <sup>$\otimes q$</sup>  には  $(2\pi\hbar)^4 a_\mu^{ext}(q)$

になる。ちなみに、【第 7 章ファイマン図：クーロン散乱】にあてはめると・・・

$$\begin{array}{c}
 \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \times \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \quad \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \times \frac{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 e^- \quad \quad \quad e^- \\
 \downarrow p_1 \quad \quad \downarrow p_2 \\
 \quad \quad \quad x \\
 \quad \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\
 \quad \quad \quad q \quad \quad \otimes \\
 (2\pi\hbar)^4 a_\mu^{ext}(q) \Rightarrow \quad i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu (2\pi\hbar)^4 \delta(p_2 - q - p_1)
 \end{array}$$

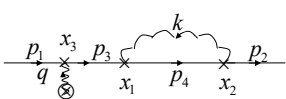
であるので、グラフの左から順にルールに従って、式として右から記述する。、このグラフの

- 内線に現れる運動量は  $q$  なので  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi\hbar)^4}$

が積分になるので

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^4 q}{(2\pi\hbar)^4} \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} \overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu (2\pi\hbar)^4 a_\mu^{ext}(q) (2\pi\hbar)^4 \delta(p_2 - q - p_1) \right) \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} u^{(s1)}(\mathbf{p}_1) \\
 & = (2\pi)^4 i e \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \gamma^\mu \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\mu^{ext}(p_2 - p_1)
 \end{aligned} \tag{8.43}$$

になり、(8.15)と一致することがわかる。

これらをグラフ  にあてがうと・・・

$$\sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \times \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{i\hbar^2 c (\not{\mathbf{p}}_3 + mc)}{p_3^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ p_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ k \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ p_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \otimes \\ i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma_\mu \end{array} \begin{array}{c} \otimes \\ i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu \end{array} \begin{array}{c} \otimes \\ i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\nu \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \uparrow \\ p_2 \end{array} \Rightarrow \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \times \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ (2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{\text{ext}}(q) \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ i\hbar^2 c (\not{\mathbf{p}}_4 + mc) \\ p_4^2 - m^2 c^2 + i\epsilon \end{array}$$

このグラフの

- 内線に現れる運動量は  $q, k, p_3, p_4$  なので  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 p_4}{(2\pi\hbar)^4}$

が積分になる。また、

- 運動量保存則は  $(2\pi\hbar)^4 \delta(q + p_1 - p_3)$ 、 $(2\pi\hbar)^4 \delta(p_4 - p_3 - k)$ 、 $(2\pi\hbar)^4 \delta(p_4 - p_2 - k)$

になる。グラフの左から順にルールに従って、式として右から記述すると

$$\sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} u^{(s_2)}(\mathbf{p}_4) \int \frac{d^4 q}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 p_3}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 p_4}{(2\pi\hbar)^4} \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

$$\cdot \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\nu (2\pi\hbar)^4 \delta(p_4 - p_2 - k) \right) \frac{i\hbar^2 c (\not{\mathbf{p}}_4 + mc)}{p_4^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu (2\pi\hbar)^4 \delta(p_4 - p_3 - k) \right) \quad (8.44)$$

$$\cdot \frac{i\hbar^2 c (\not{\mathbf{p}}_3 + mc)}{p_3^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\lambda (2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{\text{ext}}(q) (2\pi\hbar)^4 \delta(q + p_1 - p_3) \right) \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)$$

になる。これを計算すれば、(8.41)に等しいことがわかる（問題8）。一方、 $k$ 積分を残せば

$$\sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\nu \right) \frac{i\hbar^2 c (\not{\mathbf{p}}_2 + mc)}{p_2^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu \right)$$

$$\cdot \frac{i\hbar^2 c (\not{\mathbf{k}} + \not{\mathbf{p}}_2 + mc)}{(k + p_2)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\lambda (2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{\text{ext}}(p_2 - p_1) \right) \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3}} u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1) \quad (8.45)$$

ので、**特別に、**

- 運動量保存則の積分の影響は、今回の一連のグラフでは無視できることがわかる。従って、**各点で運動量保存則を加味したグラフ：**

$$\sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \times \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{i\hbar^2 c (\not{\mathbf{p}}_2 + mc)}{p_2^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ p_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ k \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ p_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \otimes \\ i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma_\mu \end{array} \begin{array}{c} \otimes \\ i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu \end{array} \begin{array}{c} \otimes \\ i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\nu \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \uparrow \\ p_2 \end{array} \Rightarrow \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \times \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}}$$

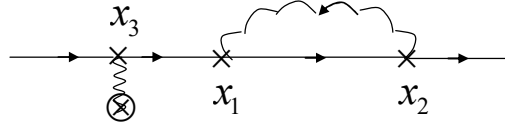
$$\begin{array}{c} \downarrow \\ (2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{\text{ext}}(p_2 - p_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ i\hbar^2 c (\not{\mathbf{K}} + \not{\mathbf{p}}_2 + mc) \\ (k + p_2)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon \end{array}$$

を考えれば良い。従って、

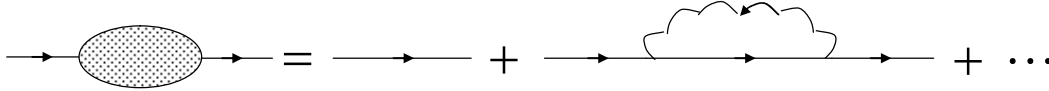
- バーテックスでは、矢印の方向に従って 4 次元運動量保存である。

==電子の自己エネルギー==

(8.42)で評価したファイマン図



には、電子の自己エネルギー



といわれる部分が含まれている。通常、量子効果の部分は、

$$-i \frac{\Sigma(p)}{\hbar^2 c} = \text{loop diagram}$$

で表す。<sup>1</sup> この自己エネルギー  $\Sigma(p)$  は、対応ルールに従って評価すると、

$$-i\Sigma(p) = \frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k} + \not{p} + mc)}{(k+p)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \quad (8.46)$$

になる（問題 9）。この表式を用いると(8.42)は

$$\Gamma^\lambda = -i\Sigma(p_2) \frac{i(\not{p}_2 + mc)\gamma^\lambda}{p_2^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \quad (8.47)$$

と書き換えられる。従って、(8.42)より

$$M_a^{(3)} = (2\pi)^4 ie \frac{u^{(s_2)}(p_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} (-i\Sigma(p_2)) \frac{i(\not{p}_2 + mc)\gamma^\lambda}{p_2^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \frac{u^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1) \quad (8.48)$$

になる。

(8.46)の積分を実行する。(8.46)より、

$$-i\Sigma(p) = -\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + mc) \gamma_\mu}{((k+p)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon)(k^2 + i\epsilon)} \quad (8.49)$$

において、定番の公式

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(b+(a-b)x)^2} \quad (8.50)$$

を用いると

<sup>1</sup>  $-i \frac{\Sigma(p)}{\hbar^2 c}$  のとき、 $\Sigma(p)$  が  $mc$  に対する補正項になり、 $mc \rightarrow mc + \Sigma(p)$  の置き換えをする。つまり、

$$S_F(p) = \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} - mc + i\epsilon} = \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} + i\epsilon} + \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} + i\epsilon} \frac{mc}{i\hbar^2 c} \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} + i\epsilon} + \dots \text{なので、} \frac{mc}{i\hbar^2 c} = -i \frac{mc}{\hbar^2 c} \Rightarrow -i \frac{\Sigma(p)}{\hbar^2 c} \text{ に対応する。}$$



$$\frac{1}{((k+p)^2 - m^2c^2 + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)} = \int_0^1 dx \frac{1}{\left[ k^2 + ((k+p)^2 - m^2c^2 - k^2)x + i\varepsilon \right]^2} \quad (8.51)$$

なので

$$-i\Sigma(p) = -\frac{e^2}{\hbar c \varepsilon_0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + mc) \gamma_\mu}{\left[ k^2 + ((k+p)^2 - m^2c^2 - k^2)x + i\varepsilon \right]^2} \quad (8.52)$$

である。一方、(8.151)を用いて

$$\gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + mc) \gamma_\mu = -2(\not{k} + \not{p}) + 4mc \quad (8.53)$$

より

$$-i\Sigma(p) = -\frac{e^2}{\hbar c \varepsilon_0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{-2(\not{k} + \not{p}) + 4mc}{\left[ k^2 + ((k+p)^2 - m^2c^2 - k^2)x + i\varepsilon \right]^2} \quad (8.54)$$

を得る。ここで  $k$  積分を実行するため

$$k^2 + ((k+p)^2 - m^2c^2 - k^2)x = k^2 + 2kpx + (p^2 - m^2c^2)x = (k+xp)^2 - (m^2c^2 - (1-x)p^2)x \quad (8.55)$$

より、変数変換  $k' = k + xp$  を行い、改めて  $k'$  を  $k$  と見なおして

$$-i\Sigma(p) = -\frac{e^2}{\hbar c \varepsilon_0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{-2(\not{k} + (1-x)\not{p}) + 4mc}{\left[ k^2 - (m^2c^2 - (1-x)p^2)x + i\varepsilon \right]^2} \quad (8.56)$$

ここで

$$\bullet \quad k \text{ の奇関数の寄与は } 0 \text{ になる} \quad (8.57)$$

ので（問題 10）

$$-i\Sigma(p) = -\frac{e^2}{\hbar c \varepsilon_0} \int_0^1 dx \left[ -2(1-x)\not{p} + 4mc \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[ k^2 - (m^2c^2 - (1-x)p^2)x + i\varepsilon \right]^2} \quad (8.58)$$

ここで、 $k$  積分は、(8.166)を用いて

$$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[ k^2 - (m^2c^2 - (1-x)p^2)x + i\varepsilon \right]^2} \stackrel{\substack{k^0 = ik_E^0 \\ k^2 = -k_E^2, \varepsilon=0}}{=} i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[ -k_E^2 - (m^2c^2 - (1-x)p^2)x \right]^2} \quad (8.59)$$

と Euclid 化する。(8.58)は、

$$-i\Sigma(p) = -\frac{e^2}{\hbar c \varepsilon_0} \int_0^1 dx \left[ -2(1-x)\not{p} + 4mc \right] I \text{ with } I = i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[ k_E^2 + (m^2c^2 - (1-x)p^2)x \right]^2} \quad (8.60)$$

さらに、 $n$  次元化して(8.172)を用いると

$$I = i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[ k_E^2 + (m^2c^2 - (1-x)p^2)x \right]^2} \stackrel{k_E^2 = r^2}{=} \lim_{n \rightarrow 4} i \int \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} r^{n-1} dr \frac{1}{\left[ r^2 + (m^2c^2 - (1-x)p^2)x \right]^2} \quad (8.61)$$

ここで

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{n-1}}{\left[r^2 + (m^2 c^2 - (1-x)p^2)x\right]^2} dr = \int_0^{\infty} \frac{r^{2\alpha-1}}{(b+ar^2)^{\alpha+\beta}} dr \Bigg|_{\substack{2\alpha=n, \alpha+\beta=2 \\ a=1, b=(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x}} \quad (8.62)$$

なので、(8.180)より

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{r^{2\alpha-1}}{(b+ar^2)^{\alpha+\beta}} dr \Bigg|_{\substack{2\alpha=n, \alpha+\beta=2 \\ a=1, b=(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x}} &= \frac{1}{2} \frac{B(\alpha, \beta)}{a^\alpha b^\beta} \Bigg|_{\substack{2\alpha=n, \alpha+\beta=2 \\ a=1, b=(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{B\left(\frac{n}{2}, 2-\frac{n}{2}\right)}{\left[(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x\right]^{2-\frac{n}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(2)} \frac{1}{2\left[(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x\right]^{2-\frac{n}{2}}} \end{aligned} \quad (8.63)$$

を用いて

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow 4} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} i \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{2\left[(m^2 - (1-x)p^2)x\right]^{2-\frac{n}{2}} \Gamma(2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow 4} \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) = \frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{2} i \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{2\left[(m^2 - (1-x)p^2)x\right]^{2-\frac{n}{2}} \Gamma(2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow 4} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\left[(m^2 - (1-x)p^2)x\right]^{2-\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(2)} \end{aligned} \quad (8.64)$$

ここで、公式として

$$\boxed{\int d^4k \frac{1}{(k^2 - A + i\varepsilon)^2} = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{A^{2-\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(2)}} \quad (8.65)$$

を得る (Appendix4:n 次元積分参照)。更に、(8.169)を用いて

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow 4} \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\left[(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x\right]^{2-\frac{n}{2}}} = \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{2-\frac{n}{2}} - \gamma - \ln\left[(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x\right] \right) \\ &= \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma - \ln\left[(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x\right] \right) \end{aligned} \quad (8.66)$$

になる (問題 1 1)。ここで

- 4次元時空（ $n=4$ ）では $\frac{2}{4-n}$ は発散する

ことがわかる。これから、

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) &= -\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \int_0^1 dx \left[ -2(1-x) \not{p} + 4mc \right] I \\ &= -\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \int_0^1 dx \left[ -2(1-x) \not{p} + 4mc \right] \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma - \ln \left[ (m^2 c^2 - (1-x)p^2)x \right] \right) \end{aligned} \quad (8.67)$$

を得る。更に、発散項とオイラー数 $\gamma$ の項のパラメータ積分（ $x$ 積分）を実行して

$$\begin{aligned} -\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left[ -2(1-x) \not{p} + 4mc \right] \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) &= -\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) \left[ -2 \left( x - \frac{x^2}{2} \right) \not{p} + 4mcx \right]_0^1 \\ &= -\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) \left[ -2 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \not{p} + 4mc \right] = -\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) (4mc - \not{p}) \end{aligned} \quad (8.68)$$

である。ここで、

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

なので、(8.68)は

$$-\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left[ -2(1-x) \not{p} + 4mc \right] \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) = \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) (\not{p} - 4mc) \quad (8.69)$$

と計算できる。最終的に

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) &= \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) (\not{p} - 4mc) - i\Sigma_R(p) \\ -i\Sigma_R(p) &= \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \int_0^1 dx \left[ -2(1-x) \not{p} + 4mc \right] \ln \left[ (m^2 c^2 - (1-x)p^2)x \right] \end{aligned} \quad (8.70)$$

を得る。以上をまとめると・・・

$$\begin{aligned} M_a^{(3)} &= (2\pi)^4 ie \frac{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1) \\ \Gamma^\lambda &= -i\Sigma(p_2) \frac{i(\not{p}_2 + mc)\gamma^\lambda}{p_2^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \Leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \\ -i\Sigma(p) &= -\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + mc)\gamma_\mu}{((k+p)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon)(k^2 + i\epsilon)} \Leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \\ &= \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) (\not{p} - 4mc) - i\Sigma_R(p) \\ -i\Sigma_R(p) &= \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \int_0^1 dx \left[ -2(1-x) \not{p} + 4mc \right] \ln \left[ (m^2 c^2 - (1-x)p^2)x \right] \end{aligned} \quad (8.71)$$

である。

### ==電子の質量の繰り込み==

さて、 $\Sigma(p)$ には、 $n=4$ で発散する (diverge) 項

$$-i\Sigma_{\text{発散}}(p) = \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \frac{2}{4-n} (\not{p} - 4mc) \quad (8.72)$$

を含む。この発散を取り除くために、

- 繰り込み (renormalization:再規格化)

をおこなう。特に、自己エネルギーに現れる発散を取り除くことを

- 質量の繰り込み (mass renormalization)

という。これは、再定義された新しいラグランジアンとして

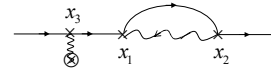
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} \left( i\not{D} - \frac{(m + \delta m)c}{\hbar} \right) \psi \quad (8.73)$$

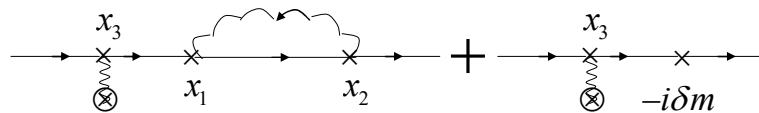
を採用することになる。相互作用として

$$\mathcal{H}_{in}(x) = \dots + \frac{\delta m \cdot c}{\hbar} \bar{\psi}_{in} \psi_{in} + \dots \quad (8.74)$$

で与えられる。ここで、観測される質量は

- 観測される質量(有限の値) :  $m_{obs} = m + \delta m + \text{量子効果}$

で再定義される。この効果は、 に対して



という 2 つのグラフを評価することになる。その結果

$$\Gamma^\lambda = (-i\Sigma(p_2) - i\delta m \cdot c) \frac{i(\not{p}_2 + mc)\gamma^\lambda}{p_2^2 - m^2c^2 + i\varepsilon} = -i(\Sigma(p_2) + \delta m \cdot c) \frac{i(\not{p}_2 + mc)\gamma^\lambda}{p_2^2 - m^2c^2 + i\varepsilon} \quad (8.75)$$

が再評価された値になる。

さて、「繰り込み」では、 $\Sigma(p)$ に対して

- $\Sigma(p) + \delta m \cdot c = \text{有限値}$

になるように  $\delta m$  を決定する。そのため

- 繰り込み点

を設定する必要がある。通常

- $\not{p} = mc$  で設定するのを on-shell 繰り込み :  $\Sigma(\not{p} = mc) + \delta m \cdot c = \text{有限値}$

という。繰り込み点の  $\not{p}$  の値は何でも良い。この点を例えば観測されている質量  $m$  ではなく、別の値  $\mu$  とすると、 $\Sigma_{\text{finite}}(p)$  は(8.79)とは異なる。しかし、実際の物理はこのような人為的な取

り方によらないはずである。この「繰り込み点の人為的設定に依らない」ことを数学で表現するとき**繰り込み群**と呼ばれる。但し

$$\bullet \text{ 一度決めたら同じ処方に従う} \quad (8.76)$$

ことになる。この処方に従うと

$$\begin{aligned} \delta m \cdot c &= -\Sigma(\not{p} = mc) \Leftarrow -\Sigma(p) = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) (\not{p} - 4mc) - \Sigma_R(p) \\ &\Leftarrow -\Sigma_R(p) = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \int_0^1 dx \left[ -2(1-x)\not{p} + 4mc \right] \ln \left[ (m^2 c^2 - (1-x)p^2)x \right] \end{aligned} \quad (8.77)$$

で評価され

$$\delta m \cdot c = -\frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) 3mc + \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \int_0^1 dx 2(1+x)mc \ln(m^2 c^2 x^2) \quad (8.78)$$

とである（問題 1 2-A）。あるいは、 $\delta m$  は、

$$\delta m \cdot c = -\frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) 3mc - \Sigma_R(\not{p} = mc)$$

である。従って、繰り込み後の  $\Sigma(p)$  は

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(p) &\equiv \Sigma(p) + \delta m \cdot c = \Sigma(p) - \Sigma(\not{p} = mc) \\ &= -\frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) (\not{p} - 4mc) + \Sigma_R(p) - \left[ -\frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) (-3mc) + \Sigma_R(\not{p} = mc) \right] \\ &= -\frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \boxed{\gamma}^{\text{Euler数}} \right) (\not{p} - mc) + \Sigma_R(p) - \Sigma_R(\not{p} = mc) \\ \Sigma_R(p) - \Sigma_R(\not{p} = mc) &\Leftarrow \Sigma_R(p) = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \int_0^1 dx \left[ -2(1-x)\not{p} + 4mc \right] \ln \left[ (m^2 c^2 - (1-x)p^2)x \right] \\ &= -\frac{\alpha_{em}}{4\pi} \int_0^1 dx \left( \left[ -2(1-x)\not{p} + 4mc \right] \ln \left[ (m^2 c^2 - (1-x)p^2)x \right] - \left[ 2(1+x)mc \right] \ln(m^2 c^2 x^2) \right) \\ &= -\frac{\alpha_{em}}{4\pi} \int_0^1 dx \left( \left[ -2(1-x)\not{p} + 4mc \right] \ln \left[ (m^2 c^2 - (1-x)p^2)x \right] - \left[ -2(1-x)\not{p} + 4mc \right] \ln(m^2 c^2 x^2) \right. \\ &\quad \left. + \left[ -2(1-x)\not{p} + 4mc \right] \ln(m^2 c^2 x^2) - \left[ 2(1+x)mc \right] \ln(m^2 c^2 x^2) \right) \Bigg|_{0 \text{を足す}} \\ &= -\frac{\alpha_{em}}{4\pi} \int_0^1 dx \left( \left[ -2(1-x)\not{p} + 4mc \right] \ln \left[ \frac{(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x}{m^2 c^2 x^2} \right] + 2(-1+x)(\not{p} - mc) \ln(m^2 c^2 x^2) \right) \\ &= -\frac{\alpha_{em}}{2\pi} \int_0^1 dx \left( \left[ -(1-x)\not{p} + 2mc \right] \ln \left[ \frac{(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x}{m^2 c^2 x^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - (1-x)(\not{p} - mc) \ln(m^2 c^2 x^2) \right) \end{aligned} \quad (8.79)$$

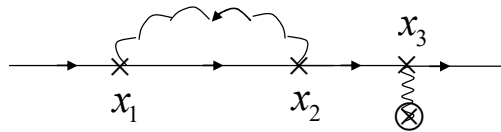
と与えられる。つまり

$$\tilde{\Sigma}(p) = -\frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \frac{\text{Euler数}}{\Gamma} \right) (\not{p} - mc) - \frac{\alpha_{em}}{2\pi} \int_0^1 dx \left[ \begin{array}{l} [-(1-x)\not{p} + 2mc] \ln \left[ \frac{(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x}{m^2 c^2 x^2} \right] \\ -(1-x)(\not{p} - mc) \ln(m^2 x^2) \end{array} \right] \quad (8.80)$$

を得る（問題 1 2 - B）。

### b. 電子の自己エネルギーを含む量子効果 2

【3 項目】  $N(\overline{\psi}_\tau(x_3) K_{F_{\sigma\alpha}}(x_2 - x_1) K_{F_{\rho\beta}}(x_3 - x_2) \psi_\beta(x_1)) D_{F_{\mu\nu}}(x_1 - x_2)$



対応ルール

$$\sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \times \frac{u^{(s1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \quad \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad \frac{i\hbar^2 c (\not{p}_1 + mc)}{p_1^2 - m^2 c^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow k \\ \uparrow p_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{loop} \\ \downarrow k+p_1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \uparrow p_1 \\ \otimes \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \uparrow p_2 \\ \otimes \end{array} \Rightarrow \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \times \frac{u^{(s2)}(p_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}}$$

$$\frac{i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu}{i\hbar^2 c (\not{k} + \not{p}_1 + mc)} \quad \frac{i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\nu}{(2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1)} \quad \frac{i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\lambda}{(k + p_1)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon}$$

に従って評価する積分は・・・グラフの左から順にルールに従って、式として右から記述すると

$$\sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{u^{(s2)}(p_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\lambda (2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1) \right) \frac{i\hbar^2 c (\not{p}_1 + mc)}{p_1^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \quad (8.81)$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\nu \right) \frac{i\hbar^2 c (\not{k} + \not{p}_1 + mc)}{(k + p_1)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu \right) \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{u^{(s1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}}$$

になる。(8.46)を用いて、(8.15)と比較のため

$$M_b^{(3)} = (2\pi)^4 i e \frac{u^{(s2)}(p_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{\gamma^\lambda (\not{p}_1 + mc)}{p_1^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \Sigma(p_1) \frac{u^{(s1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1) \quad (8.82)$$

とすれば

$$M_b^{(3)} = (2\pi)^4 i e \frac{u^{(s2)}(p_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma^\lambda \frac{u^{(s1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1) \quad (8.83)$$

$$\Gamma^\lambda = \frac{i\gamma^\lambda (\not{p}_1 + mc)}{p_1^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (-i\Sigma(p_1)) \leftarrow 4 \times 4 \text{行列}$$

を得る。「a. 電子の自己エネルギーを含む量子効果 1」と同じなので

$$\begin{aligned}
 M_b^{(3)} &= (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1) \\
 \Gamma^\lambda &= \frac{i\gamma^\lambda (\not{p}_1 + mc)}{p_1^2 - m^2c^2 + i\varepsilon} (-i\Sigma(p_1)) \Leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \\
 -i\Sigma(p) &= -\frac{e^2}{\varepsilon_0 \hbar c} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + mc) \gamma_\mu}{((k+p)^2 - m^2c^2 + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)} \Leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \\
 &= \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) (\not{p} - 4mc) - i\Sigma_R(p) \\
 -i\Sigma_R(p) &= \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \int_0^1 dx [-2(1-x) \not{p} + 4mc] \ln[(m^2c^2 - (1-x)p^2)x]
 \end{aligned} \tag{8.84}$$

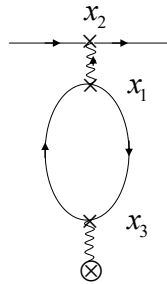
を得る。ここで、繰り込みを行うのであるが、(8.76)に注意して

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p) &= -\frac{e^2}{\varepsilon_0 \hbar c} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + mc) \gamma_\mu}{((k+p)^2 - m^2c^2 + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)} \Leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \\
 &= \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) (\not{p} - 4mc) - i\Sigma_R(p)
 \end{aligned} \tag{8.85}$$

である。

### c. 光子の自己エネルギーを含む量子効果

【6 項目】  $\square$  <sup>注意</sup>  $N(K_{F\alpha\alpha}(x_3 - x_1) K_{F\beta\rho}(x_1 - x_2) \overline{\psi}_\rho(x_2) \psi_\sigma(x_2)) D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2)$



対応ルール

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \times \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Leftarrow p_1 &\xrightarrow{i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu} p_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \times \frac{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \\
 \frac{i\hbar^2 c (\not{k} + \not{p}_2 - \not{p}_1 + mc)}{(k + p_2 - p_1)^2 - m^2c^2 + i\varepsilon} \Leftarrow &\xrightarrow{i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\nu} k \Rightarrow \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{(p_2 - p_1)^2 + i\varepsilon} \\
 &\xrightarrow{i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\lambda} \Downarrow (2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1)
 \end{aligned}$$

に従って評価する積分は・・・グラフの下から順にルールに従って、式として右から記述すると

$$\sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{\overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{(p_2 - p_1)^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu \right) \overset{\text{注意}}{\square} \int \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{i\hbar^2 c (\not{k} + \not{p}_2 - \not{p}_1 + mc)}{(k + p_2 - p_1)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \right. \\ \left. \cdot \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\nu \right) \frac{i\hbar^2 c (\not{k} + mc)}{k^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\lambda \right) \right\} (2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{\text{ext}}(p_2 - p_1) \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \quad (8.86)$$

になる。従って、対応する振幅は

$$M_c^{(3)} = \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{\overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{(p_2 - p_1)^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu \right) \\ \cdot \overset{\text{注意}}{\square} \int \frac{d^4 k}{(2\pi\hbar)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{i\hbar^2 c (\not{k} + \not{p}_2 - \not{p}_1 + mc)}{(k + p_2 - p_1)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\nu \right) \frac{i\hbar^2 c (\not{k} + mc)}{k^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\lambda \right) \right\} \\ \cdot (2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{\text{ext}}(p_2 - p_1) \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \\ = (2\pi)^4 \frac{c \mu_0}{\hbar} (ie)^3 (-ig_{\mu\nu}) (i)^2 \overset{\text{注意}}{\square} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{\not{k} + \not{p}_2 - \not{p}_1 + mc}{(k + p_2 - p_1)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{\not{k} + mc}{k^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \gamma^\lambda \right\} \\ \cdot a_\lambda^{\text{ext}}(p_2 - p_1) \frac{1}{(p_2 - p_1)^2 + i\epsilon} \frac{\overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \gamma^\mu \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \quad (8.87)$$

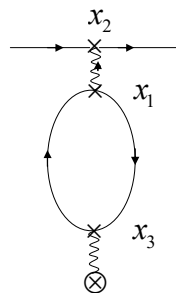
なので、 $\mu_0 = 1/c^2 \epsilon_0$  を使い、(8.15)と比較のため

$$M_c^{(3)} = (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{\text{ext}}(p_2 - p_1) \quad (8.88) \\ \Gamma^\lambda = \overset{\text{注意}}{\square} \frac{\alpha_{em}}{4\pi^3} \int d^4 k \text{Tr} \left\{ \frac{\not{k} + \not{p}_2 - \not{p}_1 + mc}{(k + p_2 - p_1)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \gamma^\mu \frac{\not{k} + mc}{k^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \gamma^\lambda \right\} \frac{-i}{(p_2 - p_1)^2 + i\epsilon} \gamma_\mu$$

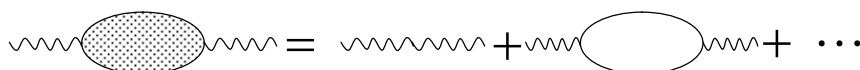
と書き換える（問題 1 3）。

==光子の自己エネルギー==

(8.86)で評価したファイマン図



には、光子の自己エネルギー





といわれる部分が含まれている。通常、量子効果の部分をも、

$$\frac{i\Pi^{\mu\nu}(q)}{\hbar^3 c \mu_0} = \text{diagram}$$

で表す（10章参照）。この自己エネルギー  $\Pi_{\mu\nu}(q)$  は、対応ルールに従って評価すると、

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = \square \frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{i(\not{k} + \not{q} + mc)}{(k+q)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k} + mc)}{k^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\nu) \right\} \quad (8.89)$$

になる（問題 1 4）。この表式を用いると(8.88)は

$$\Gamma^\lambda = -i\gamma_\mu \frac{i\Pi^{\mu\lambda}(p_2 - p_1)}{(p_2 - p_1)^2 + i\epsilon} \leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \quad (8.90)$$

と書き換えられる。従って、(8.15)と比較のため

$$M_c^{(3)} = (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s_2)}(p_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1) \quad (8.91)$$

とまとめられる（問題 1 5）。(8.89)の積分を実行し、

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q) &= (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \Pi(q) \text{ where } i\Pi(q) = \frac{i\alpha_{em}}{3\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) + i\Pi_R(q) \\ i\Pi_R(q) &= -\frac{2i\alpha_{em}}{\pi} \int_0^1 dx (1-x)x \ln [m^2 c^2 + (1-x)x(-q^2)] \end{aligned} \quad (8.92)$$

を得る（問題 1 6）。以上をまとめると・・・

$$\begin{aligned} M_c^{(3)} &= (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s_2)}(p_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(q) \quad (q = p_2 - p_1) \\ \Gamma^\lambda &= -i\gamma_\mu \frac{i\Pi^{\mu\lambda}(q)}{q^2 + i\epsilon} \leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \end{aligned} \quad (\text{続く})$$

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(q) &= -\frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{i(\not{k} + \not{q} + mc)}{(k+q)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k} + mc)}{k^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\nu) \right\} \\ &= (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) i\Pi(q) \\ i\Pi(q) &= \frac{i\alpha_{em}}{3\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) + i\Pi_R(q) \\ i\Pi_R(q) &= -\frac{2i\alpha_{em}}{\pi} \int_0^1 dx (1-x)x \ln [m^2 c^2 + (1-x)x(-q^2)] \end{aligned} \quad (8.93)$$

である。

ここで、複雑な積分(8.89)が

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \Pi(q) \quad (8.94)$$

$$q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q) = 0 \tag{8.95}$$

を満たす。逆に、(8.95)の解が(8.94)になる。そこで(8.89)の積分が、(8.95)を満たすことを示す。調べる式は

$$\begin{aligned} q_\mu i\Pi^{\mu\nu}(q) &= -\frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{i}{\not{k} + \not{q} - mc + i\epsilon} (ie\not{q}) \frac{i}{\not{k} - mc + i\epsilon} (ie\gamma^\nu) \right\} \\ &= -\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{k} - mc + i\epsilon} - \frac{1}{\not{k} + \not{q} - mc + i\epsilon} \right) \gamma^\nu \end{aligned} \tag{8.96}$$

である（問題 17-A）。ここで、

- 積分結果が有限であれば・・・（実際には発散する!!!）

2 番目の積分で変数変換

$$k' = k + p \tag{8.97}$$

が行える（問題 17-B）ので、

$$q_\mu i\Pi^{\mu\nu}(q) = -\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{k} - mc + i\epsilon} \right) - \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{k}' - mc + i\epsilon} \right) \right\} \gamma^\nu = 0$$

が証明できる。そのままでは、発散するが、

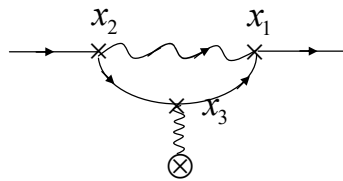
- 繰り込みを実行し、積分関数を正則化すれば、積分は有限になる
- ので、 $\Pi^{\mu\nu}(q)$  は、一般的に

$$\boxed{\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \Pi(q)} \tag{8.98}$$

と表わされる。

### d. 光子と電子の結合を含む量子効果

$$\text{【7 項目】 } N(\overline{\psi}_\alpha(x_1) K_{F\beta\tau}(x_1-x_3) K_{F\omega\rho}(x_3-x_2) \psi_\sigma(x_2)) D_{F\mu\nu}(x_1-x_2)$$



対応ルール

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} &\leftarrow p_1 \xrightarrow{p_2} \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \\ &\xrightarrow{p_1-k} \frac{i\hbar^2 c (\not{p}_1 - \not{k} + mc)}{(p_1-k)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \leftarrow p_1-k \xrightarrow{p_2-k} \frac{i\hbar^2 c (\not{p}_2 - \not{k} + mc)}{(p_2-k)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \\ &\xrightarrow{k} \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \xrightarrow{k} \end{aligned}$$

$\otimes \downarrow i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\lambda$   
 $(2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{\text{ext}}(p_2 - p_1)$

に従って評価する積分は・・・グラフの左から順にルールに従って、式として右から記述すると

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \\
 & \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi\hbar)^4} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\nu \right) \frac{i\hbar^2 c (\not{p}_2 - \not{k} + mc)}{(p_2 - k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\lambda \right) \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu \right) \frac{i\hbar^2 c (\not{p}_1 - \not{k} + mc)}{(p_1 - k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \\
 & \cdot (2\pi\hbar)^4 a_\lambda^{ext}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}}
 \end{aligned} \tag{8.99}$$

になる。従って、対応する振幅は

$$\begin{aligned}
 M_d^{(3)} &= \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \\
 & \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\nu \right) \frac{i\hbar^2 c (\not{p}_2 - \not{k} + mc)}{(p_2 - k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\lambda \right) \left( i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma^\mu \right) \frac{i\hbar^2 c (\not{p}_1 - \not{k} + mc)}{(p_1 - k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \\
 & \cdot (2\pi)^4 a_\lambda^{ext}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \sqrt{\frac{c}{\hbar^2}} \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \\
 & = (2\pi)^4 \frac{(ie)^3}{\hbar c \varepsilon_0} (-ig_{\mu\nu}) (i)^2 \frac{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \gamma^\nu \frac{\not{p}_2 - \not{k} + mc}{(p_2 - k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \gamma^\lambda \frac{\not{p}_1 - \not{k} + mc}{(p_1 - k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \gamma^\mu \right\} \\
 & \cdot \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)
 \end{aligned} \tag{8.100}$$

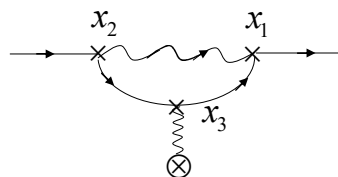
なので、(8.15)と比較のため

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 M_d^{(3)} &= (2\pi)^4 ie \frac{u^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma^\lambda \frac{u^{(s_1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \\
 \Gamma^\lambda &= -i \frac{\alpha_{em}}{4\pi^3} \int d^4k \left\{ \gamma^\mu \frac{\not{p}_2 - \not{k} + mc}{(p_2 - k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \gamma^\lambda \frac{\not{p}_1 - \not{k} + mc}{(p_1 - k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \gamma^\mu \right\} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}
 \end{aligned}
 } \tag{8.101}$$

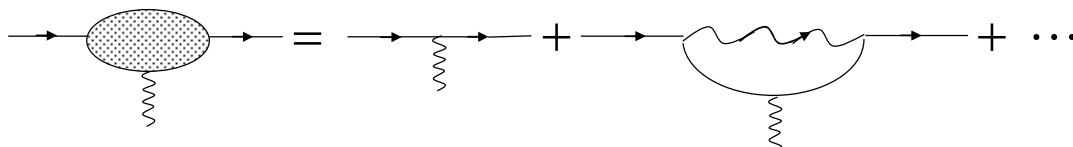
と書き換えることができる。

**==光子と電子の結合への補正==**

(8.101)で評価したファイマン図



には、光子と電子の結合（バーテックス）



といわれる部分が含まれている。通常、量子効果の部分を、

$$\Lambda^\mu(p_2, p_1) = \text{---} \xrightarrow{p_1} \text{---} \xrightarrow{p_2} \text{---}$$

で表す。この光子と電子の結合への補正  $\Lambda^\mu(p_2, p_1)$  は、対応ルールに従って評価すると

$$\Lambda^\lambda(p_2, p_1) = \frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{p}_2 - \not{k} + mc)}{(p_2 - k)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \boxed{\gamma^\lambda} \frac{i(\not{p}_1 - \not{k} + mc)}{(p_1 - k)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad (8.102)$$

になる（問題 18）。この表式を用いると(8.101)は

$$\boxed{\Gamma^\lambda = \Lambda^\lambda(p_2, p_1)} \Leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \quad (8.103)$$

と書き換えられる。従って、

$$M_d^{(3)} = (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s_2)}(p_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Lambda^\lambda(p_2, p_1) \frac{u^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_{\lambda}^{ext}(p_2 - p_1) \quad (8.104)$$

になる（問題 19）。(8.102)の積分を実行し、

$$\Lambda^\mu(p_1, p_2) = \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) \gamma^\mu + \Lambda_R^\mu(p_2, p_1) \quad A = \lambda^2 + (qy - p_2)^2 y^2$$

$$\Lambda_R^\mu(p_2, p_1) = \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 dx \frac{1}{A} \left[ \begin{array}{l} (\not{p}_1 + (\not{x} - \not{p}_2)y) \gamma^\mu (\not{p}_2 + (\not{x} - \not{p}_2)y) \\ -2mc(p_1 + p_2 + 2(qx - p_2)y)^\mu + (m^2 c^2 - A \ln A) \gamma^\mu \end{array} \right] \quad (8.105)$$

を得る（問題 20）。以上をまとめると・・・

$$M_d^{(3)} = (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s_2)}(p_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Lambda^\lambda(p_2, p_1) \frac{u^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_{\lambda}^{ext}(p_2 - p_1)$$

$$\Lambda^\lambda(p_2, p_1) = \frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{p}_2 - \not{k} + mc)}{(p_2 - k)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \gamma^\lambda \frac{i(\not{p}_1 - \not{k} + mc)}{(p_1 - k)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma_\nu)$$

$$= \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) \gamma^\lambda + \Lambda_R^\lambda(p_2, p_1) \Leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \quad A = \lambda^2 + (qx - p_2)^2 y^2$$

$$\Lambda_R^\lambda(p_2, p_1) = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{A} \left[ \begin{array}{l} (\not{p}_1 + (\not{x} - \not{p}_2)y) \gamma^\lambda (\not{p}_2 + (\not{x} - \not{p}_2)y) \\ -2mc(p_1 + p_2 + 2(qx - p_2)y)^\lambda + (m^2 c^2 - A \ln A) \gamma^\lambda \end{array} \right]$$

(8.106)

である。

## On-shell の取り扱い

さて、 $M_{a,b,c,d}^{(3)}$  の振幅の中で、 $M_{a,b}^{(3)}$  は注意を要する。つまり、

$$M_{a,b}^{(3)} = (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma_{a,b}^\lambda \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \quad (8.107)$$

とすると、

$$\Gamma_a^\lambda = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} \right) (\not{\mathbf{p}}_2 - 4mc) \frac{(\not{\mathbf{p}}_2 + mc)\gamma^\lambda}{p_2^2 - m^2c^2 + i\varepsilon} \quad (8.108)$$

$$\Gamma_b^\lambda = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} \right) \frac{\gamma^\lambda (\not{\mathbf{p}}_1 + mc)}{p_1^2 - m^2c^2 + i\varepsilon} (\not{\mathbf{p}}_1 - 4mc)$$

である。ところで、on-shell 条件

$$\not{\mathbf{p}}_1 u^{(s1)}(\mathbf{p}_1) = mc u^{(s1)}(\mathbf{p}_1), \quad \overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)} \not{\mathbf{p}}_2 = mc \overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)} \quad (8.109)$$

を用いると、 $\Gamma_a^\lambda$  は

$$\begin{aligned} \overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)} \Gamma_a^\lambda u^{(s1)}(\mathbf{p}_1) &= \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} \right) \overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)} (4mc - \not{\mathbf{p}}_2) \frac{(\not{\mathbf{p}}_2 + mc)\gamma^\lambda}{p_2^2 - m^2c^2 + i\varepsilon} u^{(s1)}(\mathbf{p}_1) \\ &= \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} \right) \overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)} 3mc \frac{(\not{\mathbf{p}}_2 + mc)\gamma^\lambda}{p_2^2 - m^2c^2 + i\varepsilon} u^{(s1)}(\mathbf{p}_1) \\ &= \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} \right) \overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)} 3mc \frac{2mcy^\lambda}{0+i\varepsilon} u^{(s1)}(\mathbf{p}_1) \rightarrow \boxed{\infty \text{ at } \varepsilon=0} \end{aligned} \quad (8.110)$$

の如く、発散してしまう。 $\Gamma_b^\lambda$  も同様である。これを制御するためには、たびたび行ったように

- $t = \pm\infty$  では相互作用はない

という仮定を定式化する必要がある。そのため、

- 時間間隔  $T (\rightarrow \infty)$  の間で値を持つような関数  $g(t)$

を用いて、相互作用項

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{int}(x) &= -g(x) \left[ \frac{e}{\hbar} N(\overline{\psi_{in}(x)} A_{in}(x) \psi_{in}(x)) + \frac{e}{\hbar} N(\overline{\psi_{in}(x)} A^{ext}(x) \psi_{in}(x)) \right] \\ &\quad + [g(x)]^2 \frac{\delta m \cdot c}{\hbar} N(\overline{\psi_{in}(x)} \psi_{in}(x)) \end{aligned} \quad (8.111)$$

とする。ここで、

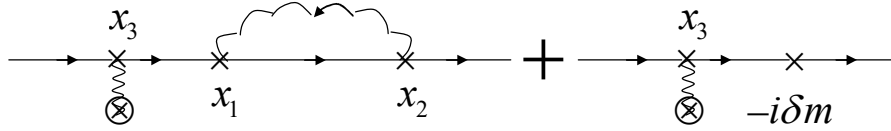
$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\Gamma_0) e^{-ix\Gamma} d\Gamma_0 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\Gamma_0) e^{-i\Gamma_0 t} d\Gamma_0 \Leftarrow \Gamma^\mu = (\Gamma_0, 0, 0, 0) \\ \text{with } g(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\Gamma_0) d\Gamma_0 = 1 \end{aligned} \quad (8.112)$$

となる  $g(x)$  を用いる。つまり

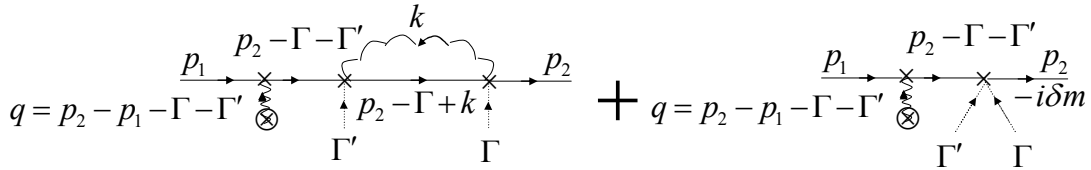
- $G(\Gamma_0)$  は  $\delta$  関数 ( $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Gamma_0) d\Gamma_0 = 1$ ) に近い

ことがわかる。

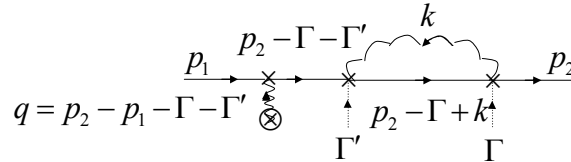
$M_a^{(3)}$  は、



であるが、(8.111)を用いると、



と表すことができる。そこで



に対して

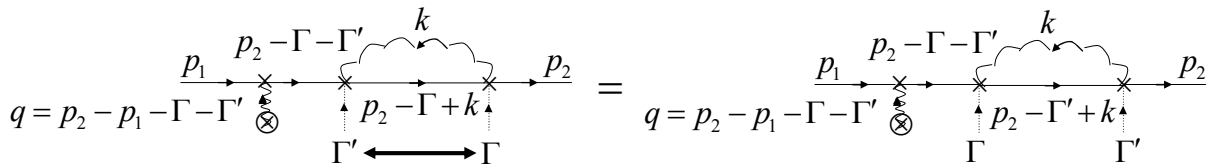
$$M_{a-\text{量子効果}}^{(3)} = (2\pi)^4 ie \int G(\Gamma_0) d\Gamma_0 G(\Gamma'_0) d\Gamma'_0 \cdot \frac{\overline{u^{(s_2)}(p_2)} \Gamma^\lambda u^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{\text{ext}}(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma') \tag{8.113}$$

$$\Gamma^\lambda = -i\Sigma(p_2 - \Gamma) \frac{i(\not{p}_2 - \not{\Gamma} - \not{\Gamma}' + mc)\gamma^\lambda}{(p - \Gamma - \Gamma')^2 - m^2c^2 + i\varepsilon} \tag{8.114}$$

を得る。これを

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \Gamma_0, \Gamma'_0 \rightarrow 0 \tag{8.115}$$

で評価することになる。ところで、 $\Gamma$  と  $\Gamma'$  を入れ替えても同じなので・・・



である。そこで、(8.114)は

$$\Gamma^\lambda = -i \frac{\Sigma(p_2 - \Gamma) + \Sigma(p_2 - \Gamma')}{2} \frac{i(\not{p}_2 - \not{\Gamma} - \not{\Gamma}' + mc)\gamma^\lambda}{(p - \Gamma - \Gamma')^2 - m^2c^2 + i\varepsilon} \tag{8.116}$$

と評価できる。

さて、

$$-i\Sigma(p_2 - \Gamma) = -\frac{e^2}{\hbar c \varepsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p}'_2 - \not{\Gamma}' + mc) \gamma_\mu}{((k + p_2 - \Gamma)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)} \quad (8.117)$$

は、(8.153)を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\not{k} + \not{p}'_2 - \not{\Gamma}' + mc}{(k + p_2 - \Gamma)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} &= \frac{1}{\not{k} + \not{p}'_2 - \not{\Gamma}' - mc^2 + i\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\not{k} + \not{p}'_2 - mc + i\varepsilon} - \frac{1}{\not{k} + \not{p}'_2 - mc + i\varepsilon} (-\not{\Gamma}') \frac{1}{\not{k} + \not{p}'_2 - mc + i\varepsilon} + \boxed{\dots} \quad (8.118) \\ &= \frac{\not{k} + \not{p}'_2 + mc}{(k + p_2)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} + \frac{\not{k} + \not{p}'_2 + mc}{(k + p_2)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \gamma^\lambda \frac{\not{k} + \not{p}'_2 + mc}{(k + p_2)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \Gamma_\lambda \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p_2 - \Gamma) &= -\frac{e^2}{\hbar c \varepsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p}'_2 - \not{\Gamma}' + mc) \gamma_\mu}{((k + p_2 - \Gamma)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)} \\ &= -\frac{e^2}{\hbar c \varepsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p}'_2 + mc) \gamma_\mu}{((k + p_2)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p}'_2 + mc) \gamma^\lambda (\not{k} + \not{p}'_2 + mc) \gamma_\mu}{((k + p_2)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)((k + p_2)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)} \Gamma_\lambda \right] \quad (8.119) \\ &= -i\Sigma(p_2) - \frac{e^2}{\hbar c \varepsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p}'_2 + mc) \gamma^\lambda (\not{k} + \not{p}'_2 + mc) \gamma_\mu}{((k + p_2)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)((k + p_2)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)} \Gamma_\lambda \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \Lambda^\lambda(p_2, p_1) &= -i \frac{e^2}{\hbar c \varepsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{p}'_2 - \not{k} + mc) \gamma^\lambda (\not{p}'_1 - \not{k} + mc) \gamma_\mu}{((p_2 - k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)((p_1 - k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)} \\ &= -i \frac{e^2}{\hbar c \varepsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{p}'_2 + \not{k} + mc) \gamma^\lambda (\not{p}'_1 + \not{k} + mc) \gamma_\mu}{((p_2 + k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)((p_1 + k)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)} \quad (8.120) \end{aligned}$$

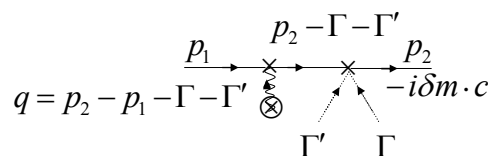
なので、

$$\Sigma(p_2 - \Gamma) = \Sigma(p_2) - i\Lambda^\lambda(p_2, p_2) \Gamma_\lambda \text{ as } \Gamma_\lambda \rightarrow 0 \quad (8.121)$$

を得る。従って、

$$\boxed{-i \frac{\Sigma(p_2 - \Gamma) + \Sigma(p_2 - \Gamma')}{2} = -i\Sigma(p_2) - i\Lambda^\lambda(p_2, p_2) \frac{\Gamma_\lambda + \Gamma'_\lambda}{2} \text{ as } \Gamma_\lambda \text{ \& } \Gamma'_\lambda \rightarrow 0} \quad (8.122)$$

である。同様に



より

$$M'_{a-\delta m}{}^{(3)} = (2\pi)^4 ie \int G(\Gamma_0) d\Gamma_0 G(\Gamma'_0) d\Gamma'_0 \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma^\lambda \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma') \quad (8.123)$$

$$\Gamma^\lambda = -i\delta m \cdot c \frac{i(\not{p}_2 - \not{X}' - \not{X}' + mc)\gamma^\lambda}{(p_2 - \Gamma - \Gamma')^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \quad (8.124)$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} M'_{a-\text{量子効果}}{}^{(3)} + M'_{a-\delta m}{}^{(3)} &= (2\pi)^4 ie \int G(\Gamma_0) d\Gamma_0 G(\Gamma'_0) d\Gamma'_0 \\ &\cdot \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left( -i \frac{\Sigma(p_2 - \Gamma) + \Sigma(p_2 - \Gamma')}{2} - i\delta m \cdot c \right) \frac{i(\not{p}_2 - \not{X}' - \not{X}' + mc)\gamma^\lambda}{(p_2 - \Gamma - \Gamma')^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \\ &\cdot \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma') \end{aligned} \quad (8.125)$$

を得る。(8.122)を用いて

$$\begin{aligned} M'_{a-\text{量子効果}}{}^{(3)} + M'_{a-\delta m}{}^{(3)} &= (2\pi)^4 ie \int G(\Gamma_0) d\Gamma_0 G(\Gamma'_0) d\Gamma'_0 \\ &\cdot \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left( -i\Sigma(p_2) - \boxed{i\Lambda^\nu(p_2, p_2) \frac{\Gamma_\nu + \Gamma'_\nu}{2}} - i\delta m \cdot c \right) \frac{i(\not{p}_2 - \not{X}' - \not{X}' + mc)\gamma^\lambda}{(p_2 - \Gamma - \Gamma')^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \\ &\cdot \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma') \end{aligned} \quad (8.126)$$

ここで、

- $\Sigma(p_2)$  は発散する

ので、(8.77)の質量の繰り込みを行うと、今の場合、 $\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}(\not{p}_2 - mc) = 0$ なので、 $\not{p}_2 = mc$ より

$$\begin{aligned} M'_{a-\text{量子効果}}{}^{(3)} + M'_{a-\delta m}{}^{(3)} &= (2\pi)^4 ie \int G(\Gamma_0) d\Gamma_0 G(\Gamma'_0) d\Gamma'_0 \\ &\cdot \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left( \overbrace{-i\Sigma(p_2) + i\Sigma(\not{p}_2 = mc)}^{\delta m \cdot c = -\Sigma(\not{p}_2 = mc) \text{でこの項は、}\not{p}_2 = mc \text{より0}} - i\Lambda^\nu(p_2, p_2) \frac{\Gamma_\nu + \Gamma'_\nu}{2} \right) \\ &\cdot \frac{i(\not{p}_2 - \not{X}' - \not{X}' + mc)\gamma^\lambda}{(p_2 - \Gamma - \Gamma')^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma') \end{aligned} \quad (8.127)$$

を得る。(8.127)は、(8.106)より、まだ $\Lambda^\nu(p_2, p_2)$ による発散項を含み、発散項は

$$\Lambda^\lambda(p_2, p_1) = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) \gamma^\mu + \text{finite} \quad (8.128)$$

より



$$\begin{aligned}
M_a^{(3)} + M_{a-\delta m}^{(3)} \Big|_{\text{発散}} &= (2\pi)^4 ie \int G(\Gamma_0) d\Gamma_0 G(\Gamma'_0) d\Gamma'_0 \\
&\cdot \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left( -i \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) \gamma^\nu \frac{\Gamma_\nu + \Gamma'_\nu}{2} \right) \frac{i(\not{\mathbf{p}}_2 - \not{\mathbf{X}}' - \not{\mathbf{X}}' + mc) \gamma^\lambda}{(p_2 - \Gamma - \Gamma')^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \\
&\cdot \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma')
\end{aligned} \tag{8.129}$$

で表される。ここで、

$$\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)} (\not{\mathbf{p}}_2 - mc) = 0 \tag{8.130}$$

を用いて、 $\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)} (\not{\mathbf{p}}_2 - mc) = 0$ を追加して

$$\begin{aligned}
M_a^{(3)} + M_{a-\delta m}^{(3)} \Big|_{\text{発散}} &= (2\pi)^4 ie \int G(\Gamma_0) d\Gamma_0 G(\Gamma'_0) d\Gamma'_0 \\
&\cdot \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left( -i \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) \left( \frac{\not{\mathbf{p}}_2 - mc - \not{\mathbf{X}}' - \not{\mathbf{X}}'}{2} \right) \right) \frac{i(\not{\mathbf{p}}_2 - \not{\mathbf{X}}' - \not{\mathbf{X}}' + mc) \gamma^\lambda}{(p_2 - \Gamma - \Gamma')^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \\
&\cdot \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma')
\end{aligned} \tag{8.131}$$

更に

$$(\not{\mathbf{p}}_2 - mc - \not{\mathbf{X}}' - \not{\mathbf{X}}') (\not{\mathbf{p}}_2 - \not{\mathbf{X}}' - \not{\mathbf{X}}' + mc) = (p_2 - \Gamma - \Gamma')^2 - m^2 c^2 \tag{8.132}$$

より、分母と相殺して

$$\begin{aligned}
M_a^{(3)} + M_{a-\delta m}^{(3)} \Big|_{\text{発散}} &= (2\pi)^4 ie \int G(\Gamma_0) d\Gamma_0 G(\Gamma'_0) d\Gamma'_0 \\
&\cdot \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left( -i \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) \left( -\frac{1}{2} \right) \right) (i\gamma^\lambda) \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma') \Big|_{\Gamma_0 = \Gamma'_0 = 0}
\end{aligned} \tag{8.133}$$

を得る。従って、(8.112)より

$$\int G(\Gamma_0) d\Gamma_0 G(\Gamma'_0) d\Gamma'_0 = 1 \tag{8.134}$$

なので、

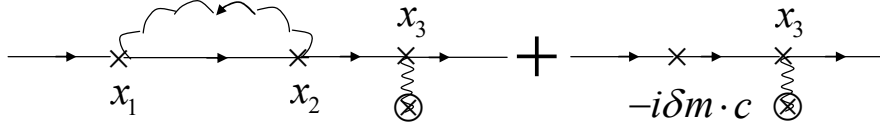
$$\begin{aligned}
M_a^{(3)} + M_{a-\delta m}^{(3)} \Big|_{\text{発散}} &= (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left( i \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma \right) \frac{1}{2} \right) (i\gamma^\lambda) \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1) \\
&= (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma_{a-\text{発散}}^\lambda \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1)
\end{aligned} \tag{8.135}$$

より、

$$\boxed{\Gamma_{a\text{-発散}}^\lambda = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \frac{2}{4-n} \gamma^\lambda} \quad (8.136)$$

を得る。

同様にして



に対して、

$$\begin{aligned} M_{b\text{-量子効果}}^{(3)} + M_{b\text{-}\delta m}^{(3)} &= (2\pi)^4 ie \int G(\Gamma_0) d\Gamma_0 G(\Gamma'_0) d\Gamma'_0 \\ &\cdot \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)} i\gamma^\lambda (\not{p}'_1 + \not{X}' + \not{X}' + mc)}{\sqrt{(2\pi)^3} (p_1 + \Gamma + \Gamma')^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \left( -i\Sigma(p_1) - i\Lambda^\nu(p_1, p_1) \frac{\Gamma_\nu + \Gamma'_\nu}{2} - i\delta m \cdot c \right) \\ &\cdot \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1 - \Gamma - \Gamma') \end{aligned} \quad (8.137)$$

従って、発散項は

$$M_b^{(3)} + M_{b\text{-}\delta m}^{(3)} \Big|_{\text{発散}} = (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma_{b\text{-発散}}^\lambda \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1) \quad (8.138)$$

において

$$\boxed{\Gamma_{b\text{-発散}}^\lambda = -\frac{1}{2} \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \frac{2}{4-n} \gamma^\lambda} \quad (8.139)$$

である（問題 2 1）。

## 発散する量子効果

これらの評価から、発散部分： $\frac{2}{4-n} \xrightarrow{n=4} \infty$ を取り出してみる。振幅は

$$M^{(3)} = (2\pi)^4 ie \frac{\overline{u^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}}{\sqrt{(2\pi)^3}} \Gamma^\lambda \frac{u^{(s1)}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{(2\pi)^3}} a_\lambda^{ext}(p_2 - p_1) \quad (8.140)$$

であり、(8.136)、(8.139)、(8.93)、及び(8.106)より

$$\begin{aligned} \Gamma_a^\lambda &= -\frac{1}{2} \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \frac{2}{4-n} \gamma^\lambda \\ \Gamma_b^\lambda &= -\frac{1}{2} \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \frac{2}{4-n} \gamma^\lambda \\ \Gamma_c^\lambda &= -\frac{\alpha_{em}}{3\pi} \gamma^\lambda \frac{2}{4-n} \\ \Gamma_d^\lambda &= \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \frac{2}{4-n} \gamma^\mu \end{aligned} \quad (8.141)$$

と評価できる。ここで、

$$\Gamma_a^\lambda + \Gamma_b^\lambda + \Gamma_d^\lambda = 0 \quad (8.142)$$

が導かれることに注意しよう。このように、ひとつひとつの項は発散するが、いくつか集めるとその発散項が偶然消えることが起こる。これは、

- ゲージ不変性

の結果であることが知られている。これは、元を辿れば、(8.122)のような

- 「電子の自己エネルギーを含む量子効果」と「光子と電子の結合を含む量子効果」の特殊な関係

に起因している。これを一般化したものを

- **ワード・高橋の恒等式**

という。

==ワード・高橋の恒等式==

ワード・高橋の恒等式は量子電磁気学のゲージ不変性を端的に表わした公式になっている。一般的に

$$-i \frac{\Sigma(p)}{\hbar^2 c} = \text{diagram} \quad \Lambda_\mu(p, p) = \text{diagram}$$

(Left diagram: A fermion line with momentum p entering a shaded oval loop and exiting with momentum p. Right diagram: A fermion line with momentum p entering a shaded oval loop with a photon line (wavy) attached to the bottom, labeled with momentum q=0 and index mu.)

を用いて

$$-\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu} = \Lambda_\mu(p, p) \quad (8.143)$$

と与えられる。

2 次の量子効果までに限れば「ワード・高橋の恒等式」は次のように求められる。まず、(8.46) は、(8.29)を用いて書き換えると

$$\Sigma(p) = -i \frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{S_F(k+p)}{\hbar^2 c} \gamma^\mu \frac{D_{F\mu\nu}(k)}{\hbar^3 c \mu_0} \quad (8.144)$$

なので、(8.144)を  $p^\mu$  で微分して

$$\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu} = -i \frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{\partial S_F(k+p)}{\hbar^2 c \partial p^\mu} \gamma^\mu D_{F\mu\nu}(k) \frac{D_{F\mu\nu}(k)}{\hbar^3 c \mu_0} \quad (8.145)$$

を得る（問題 2 2）。 $\frac{\partial S_F(k+p)}{\partial p^\mu}$  は  $S_F(p) S_F^{-1}(p) = I$  及び  $S_F^{-1}(p) = \frac{1}{i\hbar^2 c} (\gamma_\mu p^\mu - m)$  より得られる

$$\frac{\partial S_F(p)}{\hbar^2 c \partial p^\mu} = i \frac{S_F(p)}{\hbar^2 c} \gamma_\mu \frac{S_F(p)}{\hbar^2 c} \quad (8.146)$$

を用いる。(8.146)を(8.145)に代入して

$$\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu} = \frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{S_F(k+p)}{\hbar^2 c} \gamma_\mu \frac{S_F(k+p)}{\hbar^2 c} \gamma^\nu \frac{D_{F\mu\nu}(k)}{\hbar^3 c \mu_0} \quad (8.147)$$

これに対応するファイマン図（問題 2 3）より、(8.102)の

$$\Lambda^\lambda(p_2, p_1) = \frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (ie\gamma^\nu) \frac{S_F(p_2 - k)}{\hbar^2 c} \gamma^\lambda \frac{S_F(p_1 - k)}{\hbar^2 c} (ie\gamma^\mu) \frac{D_{F\mu\nu}(k)}{\hbar^3 c \mu_0} \quad (8.148)$$

に関連付くことがわかる。(8.148)より、

$$\Lambda_\mu(p, p) = -\frac{e^2}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{S_F(p - k)}{\hbar^2 c} \gamma_\mu \frac{S_F(p - k)}{\hbar^2 c} \gamma^{\nu'} \frac{D_{F\mu\nu}(k)}{\hbar^3 c \mu_0} \gamma^{\mu'} \quad (8.149)$$

なので、 $D_{F\mu\nu}(-k) = D_{F\mu\nu}(k)$  を考慮して

$$-\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu} = \Lambda_\mu(p, p) \quad (8.150)$$

がわかる。

Appendix1:  $\gamma$  行列の演算

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \gamma_\mu &= 4 (= n) \\
\gamma^\mu \not{a} \gamma_\mu &= -2 \not{a} (= (2-n) \not{a}) \\
\gamma^\mu \not{a} \not{b} \gamma_\mu &= 4ab (= 4ab + (n-4) \not{a} \not{b}) \\
\gamma^\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\mu &= -2 \not{c} \not{b} \not{a} (= -2 \not{c} \not{b} \not{a} + (n-4) \not{a} \not{b} \not{c})
\end{aligned} \tag{8.151}$$

$$\begin{aligned}
Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\
Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \\
Tr(\underbrace{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}}_{\text{奇数個の}\gamma}) &= 0
\end{aligned} \tag{8.152}$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \quad (\gamma_5^2 = I; \varepsilon^{0123} = 1; \varepsilon_{0123} = -1)$$

$$Tr(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} - \dots \tag{8.153}$$

## Appendix2: パラメータ積分

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(b+(a-b)x)^2} \tag{8.154}$$

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{(b+(a-b)x)^{\alpha+\beta}}$$

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{(c+(b-c)y+(b-a)xy)^3} \tag{8.155}$$

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta c^\gamma} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} y^{\alpha+\beta-1} (1-y)^{\gamma-1}}{(c+(b-c)y+(a-b)xy)^{\alpha+\beta+\gamma}}$$

$$\frac{1}{abcd} = 3! \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{1}{(d+(c-d)z+(b-c)yz+(a-b)xyz)^4} \tag{8.156}$$

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} y^{\alpha+\beta-1} (1-y)^{\gamma-1} z^{\alpha+\beta+\gamma-1} (1-z)^{\delta-1}}{(d+(c-d)z+(b-c)yz+(a-b)xyz)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}$$

## Appendix3: Euclid 化による積分

(8.49) の様に  $1/(p^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)$  から

- $p^{02} = p^2 + m^2 c^2$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) の極

がある場合の計算方法として

- ユークリッド化

という方法がある。これは、

- $p^2 = p^{02} - \mathbf{p}^2$  の代わりに通常のベクトルの大きさ  $p^{02} + \mathbf{p}^2$  にする

という方法である。数学的には

- $p^0$  を純虚数に見なおすことに対応する。つまり、

$$p^0 = ip_E^0 \tag{8.157}$$

とすれば

$$p^2 = p^{02} - \mathbf{p}^2 = -(p_E^{02} + \mathbf{p}^2) \tag{8.158}$$

となり、

- $p_E^{02} + \mathbf{p}^2$  がベクトルの大きさ

になる。この結果、

$$\begin{aligned} \odot \frac{1}{p^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} &= \frac{1}{p^{02} - (\mathbf{p}^2 + m^2 c^2) + i\epsilon} \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} \frac{1}{p^{02} - (\mathbf{p}^2 + m^2 c^2)} \xrightarrow{p^{02} = \mathbf{p}^2 + m^2 c^2} \infty \\ \odot \frac{1}{-p_E^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} &= \frac{1}{-(p_E^{02} + \mathbf{p}^2 + m^2 c^2) + i\epsilon} \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{p_E^{02} + \mathbf{p}^2 + m^2 c^2} \neq \infty \end{aligned} \tag{8.159}$$

のように、 $p_E^{02} + \mathbf{p}^2 + m^2 c^2 \neq 0$  for  $m \neq 0$  なので

- 見かけ上極がなくなる

ことになる。従って

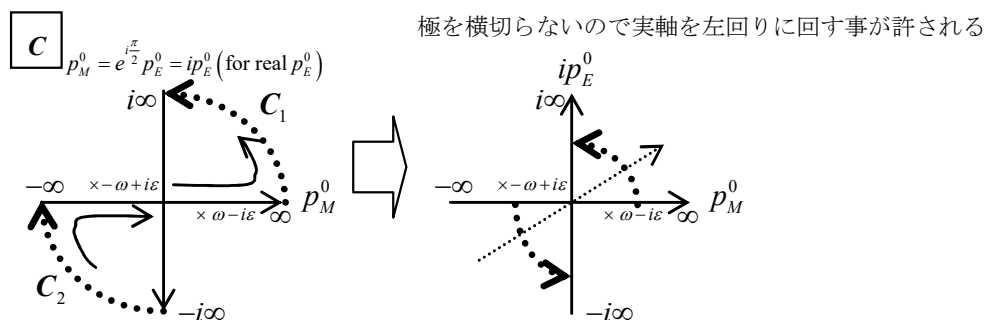
$$\frac{1}{p^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{-p_E^2 - m^2 c^2} \quad (\epsilon \text{ が不要になる}) \tag{8.160}$$

がわかる。

さて、 $1/(p^2 - m^2 c^2 + i\epsilon)$  の場合、実軸上の  $p^0$  積分を(6.52)のように

$$\omega - i\epsilon \quad (\epsilon \rightarrow 0) \tag{8.161}$$

という技巧を用いた。(8.157)の置換は、実軸上積分の虚軸上積分への変更に対応する。つまり、



のように  $-\omega + i\varepsilon$  と  $\omega - i\varepsilon$  の極を含まない様にとると、コーシーの定理より、

- 非積分関数が極を持たないとき・・・

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz + \oint_{C_1} f(z) dz + \int_{i\infty}^{-i\infty} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0 \quad (8.162)$$

を得る。もし

- 無限遠方の  $C_1$  と  $C_2$  からの寄与がゼロ（ほとんどの場合に正しい）

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz = 0 \quad (8.163)$$

であれば、(8.162)より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = -\int_{i\infty}^{-i\infty} f(z) dz = \int_{-i\infty}^{i\infty} f(z) dz \quad (8.164)$$

という関係があることが分かる。そこで、変数変換で

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p^0) dp^0 = \int_{-i\infty}^{i\infty} f(p^0) dp^0 \stackrel{p^0 = ip_E^0}{=} i \int_{-\infty}^{\infty} f(ip_E^0) dp_E^0 \quad (8.165)$$

になる。最終的に、

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(p^0) dp^0 \stackrel{p^0 = ip_E^0}{=} i \int_{-\infty}^{\infty} f(ip_E^0) dp_E^0} \quad (8.166)$$

を得る。

## Appendix4:n 次元積分

4 次元積分を実行すると、発散する積分が現れる。そこで n 次元（ユークリッド）積分に拡張して見かけ上この発散を無くする計算方法を

- ‘tHooft の n 次元法

という。物理では n=4 にする。この場合の積分公式を導く。そのために、まず、

- n 次元法で利用する n=4 での発散項を制御

する必要がある。そこで、次の  $\Gamma$  関数（Appendix5:  $\Gamma$  関数の性質参照）を含む関係式

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\Gamma(t)}{A^t} - \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} (= f'(0)) \Leftarrow f(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{A^t} \quad (8.167)$$

を利用する（問題 2 4）。従って、

$$f'(0) = -\gamma - \ln A \quad (\gamma = -\Gamma'(1) \cong 0.57721 56649 \text{ はオイラー数である}) \quad (8.168)$$

を得る（問題 2 5）。n 次元積分で利用する公式

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma(t)}{A^t} = \frac{1}{t} - \gamma - \ln A} \quad (8.169)$$

を得る。実際には

$$\lim_{n \rightarrow 4} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)}{A^{2 - \frac{n}{2}}} = \frac{2}{4 - n} - \gamma - \ln A \quad (8.170)$$

として計算に現れる。更に

$$\lim_{n \rightarrow 4} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right)}{A^{1 - \frac{n}{2}}} = \frac{2A}{2-n} \left( \frac{2}{4-n} - \gamma - \ln A \right) \quad (8.171)$$

である。また、 $n$ 次元積分で半径  $r$  の体積素 ( $dV$ ) は、 $\Gamma$  関数を用いて

$$dV = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} r^{n-1} dr \left( = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^{n-1} dr \right) \quad (dV = 2\pi^2 r^3 dr \text{ for } n=4) \quad (8.172)$$

と表せる。良く使用する公式は

$$\int d^4k \frac{1}{(k^2 - A + i\varepsilon)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow 4} (-1)^\alpha \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{A^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\int d^4k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - A + i\varepsilon)^\alpha} \left( = \frac{1}{n} g_{\mu\nu} \int d^4k \frac{k^2}{(k^2 - A)^\alpha} \right) = \lim_{n \rightarrow 4} (-1)^\alpha (-g_{\mu\nu}) \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{A^{\alpha - 1 - \frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{n}{2}\right)}{2\Gamma(\alpha)} \quad (8.173)$$

$$\int d^4k \frac{(k^2)^\beta}{(k^2 - A + i\varepsilon)^\alpha} = (-1)^{\alpha+\beta} \lim_{n \rightarrow 4} \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{A^{\alpha - \beta - \frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\alpha - \beta - \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\beta + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

である。また、

$$\int d^4k \frac{\overset{\text{奇数個の } k}{k^{\mu_1} \cdots k^{\mu_n}}}{(k^2 - A + i\varepsilon)^\alpha} = 0 \quad (8.174)$$

である。

## Appendix5: $\Gamma$ 関数の性質

ガンマ関数は

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (8.175)$$

で定義され

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (8.176)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n=1, 2, \dots), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (8.177)$$

の性質を持つ。

## Appendix6: Beta 関数の性質



ベータ関数  $B(x, y)$  は

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^{2x-1}}{(1+t^2)^{x+y}} dt \quad (8.178)$$

で定義される。また、ガンマ関数と

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (8.179)$$

の関係がある。この応用として、(8.154)式を得るのであるが、

$$\frac{B(x, y)}{a^x b^y} = \int_0^1 \frac{t^{x-1} (1-t)^{y-1}}{[b + (a-b)t]^{x+y}} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{t^{2x-1}}{(b + at^2)^{x+y}} dt \quad (8.180)$$

がわかる（問題 26）。

## Appendix7:光子の自己エネルギーのテンソル構造

光子の自己エネルギーは、(8.93)より

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \Pi(q) \quad (8.181)$$

で表わされる。ここで、 $q$  は光子の運動量である。従って、 $x$  表示に移すと・・・

$$q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu} \Rightarrow (i\partial)^\mu (i\partial)^\nu - (i\partial)^2 g^{\mu\nu} = -\partial^\mu \partial^\nu + \partial^2 g^{\mu\nu} \quad (8.182)$$

と期待される。これが、

$$F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (8.183)$$

に対応する表示になることを見してみる。つまり、

$$\Pi^{\mu\nu}(q) \text{ は } F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \text{ への補正} \quad (8.184)$$

である。

まず、対応する振幅として

$$I = \langle \text{光子}^{(s_2)}(p_2) | \int d^4x : -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) : | \text{光子}^{(s_1)}(p_1) \rangle \quad (s_1, s_2 = \text{横波成分}) \quad (8.185)$$

を考える。<sup>2</sup> ここに

$$| \text{光子}^{(s_1)}(p_1) \rangle = \frac{a^{(s_1)\dagger}(p_1)}{\sqrt{2\omega(p_1)K}} |0\rangle, \quad \langle \text{光子}^{(s_2)}(p_2) | = \langle 0 | \frac{a^{(s_2)}(p_2)}{\sqrt{2\omega(p_2)K}} \quad (8.186)$$

ここで

<sup>2</sup> ここは対応を調べるために便宜的に考えるだけで、 $F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)$  は  $\mathcal{H}_{0in}$  に含まれ、 $\mathcal{H}_{in}$  には含まれていないので S 行列(8.1)には含まれていないことに注意する。

$$\begin{aligned}
a_\mu(\mathbf{p}) &= \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)}(\mathbf{p}), \quad a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^{(\lambda)*}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) \\
\left[ a^{(s_2)}(\mathbf{p}), a^{(s_1)\dagger}(\mathbf{p}') \right] &= 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{s_1 s_2} \\
A_\mu(x) &= \int A \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( a_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) + a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right) \Leftarrow A = \sqrt{\frac{\hbar^2 c \mu_0}{(2\pi\hbar)^3 K}}
\end{aligned} \tag{8.187}$$

$$F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 2(\partial^\mu A^\nu \cdot \partial_\mu A_\nu - \partial^\nu A^\mu \cdot \partial_\nu A_\mu)$$

より

$$\begin{aligned}
I &= \left\langle \text{光子}^{(s_2)}(p_2) \left| \int d^4x : -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) : \right| \text{光子}^{(s_1)}(p_1) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2} \left\langle \text{光子}^{(s_2)}(p_2) \left| : \int d^4x G(x) (\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\nu A^\mu \cdot \partial_\nu A_\mu) : \right| \text{光子}^{(s_1)}(p_1) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2} \langle 0 | \frac{a^{(s_2)}(p_2)}{\sqrt{2\omega(p_2)} K} \int d^4x \\
&\quad \left( \begin{array}{l} \partial^\mu \int \frac{A d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( a^\nu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) + a^{\nu\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right) \\ \cdot \partial_\mu \int \frac{A d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( a_\nu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) + a_{\nu}^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right) \\ - \partial^\nu \int \frac{A d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( a^\mu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) + a^{\mu\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right) \\ \cdot \partial_\mu \int \frac{A d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( a_\nu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) + a_{\nu}^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right) \end{array} \right) : \frac{a^{(s_1)\dagger}(p_1)}{\sqrt{2\omega(p_1)} K} | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{8.188}$$

この計算を更に続けて

$$I = -\frac{1}{2} \frac{1}{\hbar^2 c \varepsilon_0} \frac{e_\mu^{(s_2)*}(p_2)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(p_2)}} (p_1^2 g^{\mu\nu} - p_1^\mu p_1^\nu) (2\pi\hbar)^4 \delta(p_2 - p_1) \frac{e_\nu^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(p_1)}} \tag{8.189}$$

を得る（問題 27）。従って

$$\begin{aligned}
&\left\langle \text{光子}^{(s_2)}(p_2) \left| \int d^4x : -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) : \right| \text{光子}^{(s_1)}(p_1) \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{\hbar^2 c \varepsilon_0} \frac{e_\mu^{(s_2)*}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(p_1)}} (p_1^2 g^{\mu\nu} - p_1^\mu p_1^\nu) (2\pi\hbar)^4 \delta(p_2 - p_1) \frac{e_\nu^{(s_1)}(p_1)}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(p_1)}}
\end{aligned} \tag{8.190}$$

を得る。つまり、 $F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)$  は  $p_1^2 g^{\mu\nu} - p_1^\mu p_1^\nu$  に比例する項になっていることがわかる。従って、(8.181)より(8.184)が確認できた。

## 第 8 章問題

- 0) (8.3)の理由を示せ。  
 1) (8.8)を示せ。  
 2) (8.13)より(8.14)を導け。  
 3) (8.15)を導け。  
 4)  $\mathcal{A}(x_1, x_2) = N(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2))$  のときに、どのような始状態と終状態が、寄与するかを示せ。

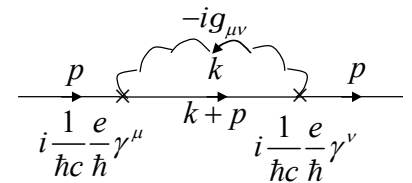
5) (8.29)において  $S_F(p) = \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} - mc + i\varepsilon}$  を導け。

- 6) A) (8.30)の 4・5・8 項目) のファイマン図を示せ。  
 B) (8.24)の(縮約3)に対応するファイマン図を示せ。

7)  $b^{(i)}(\mathbf{p}), b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}')$  の項が効かないことを証明せよ。

8) (8.44)が(8.41)に等しいことを示せ。

9) A) (8.46)の  $\Sigma(p)$  の次元を次元解析により求めよ。



B) 参考グラフの 2 カ所の  $\times$  点で**運動量保存則を加味した**グラフから(8.46)を導け。

1 0) (8.57)を示せ。

1 1) (8.66)に習って  $\lim_{n \rightarrow 4} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right)}{A^{1 - \frac{n}{2}}}$  を計算せよ。(8.176)を用いる。

1 2) A) (8.78)を導け。

B) (8.80)を導け。

1 3) (8.88)を示せ。

1 4) (8.89)を示せ。

1 5) (8.91)を(8.34)~(8.42)に習って  $N(K_{F\omega\alpha}(x_3 - x_1)K_{F\beta\rho}(x_1 - x_2)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2))D_{F\mu\nu}(x_1 - x_2)$  を

実際に計算して導き出せ示せ。

1 6) (8.92)を導け。

【使う公式】

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(b + (a-b)x)^2}$$

$$\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right)$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}), \quad Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

$$Tr(\underbrace{\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}}_{\text{奇数個の } \gamma}) = 0, \quad \int d^4k \frac{k_\mu}{(k^2 - A)^\alpha} = 0$$

$$\int d^4k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - A)^\alpha} = \frac{1}{n} g_{\mu\nu} \int d^4k \frac{k^2}{(k^2 - A)^\alpha}$$

## 【途中経過】

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\{\not{k}\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu\}}{(k^2 - A + i\varepsilon)^2} = \frac{8i\pi^{\frac{n}{2}} A g^{\mu\nu}}{(2-n)(2\pi)^4} \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{A^{\frac{n}{2}}} \quad (A = m^2 c^2 + (1-x)x(-q^2))$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\{\left((1-x)\not{\not{q}} + mc\right)\gamma^\mu \left(-x\not{\not{q}} + mc\right)\gamma^\nu\}}{(k^2 - A + i\varepsilon)^2}$$

$$= \frac{4i\pi^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^4} \left[ (1-x)(-x)(2q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) + m^2 c^2 g^{\mu\nu} \right] \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{A^{\frac{n}{2}}}$$

1 7) A) (8.96)を導け。【ヒント】  $\not{q} = \not{k} + \not{q}' - mc + i\varepsilon - (\not{k} - mc + i\varepsilon)$  を使うと良い。

B) i) 次の積分：  $\Delta(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x+a) - f(x)]$  を  $f(x+a)$  のテーラー展開を用いて、

$$\Delta(a) = a[f(\infty) - f(-\infty)] + \frac{a^2}{2}[f'(\infty) - f'(-\infty)] + \dots$$

を示せ。

ii) 通常は変数の置き換えにより  $\Delta(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx [f(x+a) - f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) - \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = 0$  で

あるが、この結果と比較して変数変換が許される場合を説明せよ。

iii) ii) の結果と異なる積分の例として i) を用いて

$$\Delta^\mu(a) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[ \frac{k^\mu + a^\mu}{((k+a)^2 - m^2 c^2)^2} - \frac{k^\mu}{(k^2 - m^2 c^2)^2} \right] = -\frac{a^\mu}{32\pi^2}$$

を導け。変数変換が許される場合があるので注意をする。

【ヒント】  $\frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = g^{\mu\nu}$  及び(8.173)

1 8) (8.102)を導け。

1 9) (8.104)を導け。

2 0) (8.105)を導け。

【使う公式】 1 6) 参照

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx dy \frac{1}{(c + (b-c)y + (a-b)xy)^3}$$

$$\gamma^\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\mu = -2 \not{c} \not{b} \not{a}, \gamma^\mu \not{a} \not{b} \gamma_\mu = 4ab$$

## 【途中経過】

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu \not{k} \gamma^\mu \not{k} \gamma_\nu}{(k^2 - A + i\varepsilon)^3} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{A^{\frac{n}{2}}} \gamma^\mu \quad (A = (qx - p_2)^2 y^2)$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{p}_2 + (\not{q}x - \not{p}_2)y + mc) \gamma^\mu (\not{p}_1 + (\not{q}x - \not{p}_2)y + mc) \gamma_\nu}{(k^2 - A + i\varepsilon)^3}$$

$$= \frac{i}{(4\pi)^2} A \left[ (\not{p}_1 + (\not{q}x - \not{p}_2)y) \gamma^\mu (\not{p}_2 + (\not{q}x - \not{p}_2)y) \right]$$

$$= \frac{i}{(4\pi)^2} A \left[ -2mc(p_1 + p_2 + 2(qx - p_2)y)^\mu + m^2 c^2 \gamma^\mu \right]$$

2 1) (8.136)の導出の仕方にならって、(8.139)を導け。

2 2) (8.145)を導け

2 3) (8.147)に対応するをファイマン図描け

2 4) (8.167)において、 $f(t) = \frac{\Gamma(t+1)}{A'}$  を導け

2 5) (8.168)を導け

2 6) (8.180)について

A)  $s = \frac{t}{1-t}$  の変数変換を用いて、(8.180)の  $t$  を  $s$  で置き換えた積分を導け。

B)  $at^2 = bT^2$  の変数変換を用いて、(8.180)の  $t$  積分を  $T$  積分で表し(8.178)と比較して(8.180)の左辺のベータ関数の表式を導け。

2 7) (8.189)を導け。