

第七章 ファイマン図：クーロン散乱

ここでは、S 行列の計算方法を解説し、ファイマン図と対比する。例として電子（或いは陽電子）の電磁相互作用を考える：

$$S = T \exp \left(-\frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \mathcal{H}_{int}(x) \right) \text{ with } \mathcal{H}_{int}(x) = \mathcal{H}_{int}(\varphi_{in}(x)) = \frac{eq_{\psi}}{\hbar} N(\overline{\psi_{in}(x)} \mathcal{A}_{in}(x) \psi_{in}(x)) \quad (7.1)$$

である。ここで、 $A_{in}^{\mu}(x)$, $\psi_{in}(x)$ は自由場の方程式を満たすので

$$\varphi_A(x) = \varphi_A^{(+)}(x) + \varphi_A^{(-)}(x) \Leftarrow \begin{cases} \varphi_A^{(+)}(x) = \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a_A(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \\ \varphi_A^{(-)}(x) = \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a_A^{\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\begin{cases} a(\mathbf{p}) \\ a^{\dagger}(\mathbf{p}) \end{cases} \text{ for scalar } \varphi = \phi \Leftarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3 K}} \\ \begin{cases} a_{A=\alpha}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^2 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \\ a_{A=\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \end{cases} \text{ for spinor } \varphi = \psi \Leftarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{2\hbar c \omega(\mathbf{p})}{(2\pi\hbar)^3 K}} \quad (7.3) \\ \begin{cases} a_{A=\mu}(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^4 e_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) \\ a_{A=\mu}^{\dagger}(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^4 e_{\mu}^{(\lambda)*}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) \end{cases} \text{ for vector } \varphi = A \Leftarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\hbar^2 c \mu_0}{(2\pi\hbar)^3 K}}$$

を用いることができる。¹ ここに、(7.2)と(7.3)より、電子に対して

$$\begin{cases} \psi(x) = \int \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^3 2\omega(\mathbf{p}) K}} d\mathbf{p} \sum_{i=1}^2 \left(u_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + v_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right) \\ \overline{\psi}(x) = \int \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^3 2\omega(\mathbf{p}) K}} d\mathbf{p} \sum_{i=1}^2 \left(\overline{u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p})} a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) + \overline{v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p})} b^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \right) \end{cases} \quad (7.4)$$

である。

クーロン場による散乱

まず最初に、簡単化のため、

- 電荷 Ze の原子核のクーロン場による陽電子散乱

を考察する。これはクーロン反発力による散乱である。クーロン反発力による散乱を見るために電子ではなく陽電子による散乱を考えている。クーロン場の場合、光子は量子場ではない。つまり、時間依存性が無く

¹ 場の演算子の添え字 in は省略されている。必要なときには明示する。

$$A^0 = \frac{Ze}{4\pi c\epsilon_0 r}, \mathbf{A} = 0 \quad (7.5)$$

である（問題 1）。この解を

$$A^\mu(x) = A^{ext\ \mu}(x) \equiv \left(\frac{Ze}{4\pi c\epsilon_0 r}, 0, 0, 0 \right), A_\mu(x) = A_\mu^{ext}(x) \equiv \left(\frac{Ze}{4\pi c\epsilon_0 r}, 0, 0, 0 \right) \quad (7.6)$$

と置く。そこで、1 次の項を実際に計算してみる。1 次の項は、陽電子の電荷 $+e$ に対応して、 $q_\psi = 1$ にとると

$$S^{(1)} = -\frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \int d^4 x_1 T \left\{ N \left(\overline{\psi(x_1)} A^{ext}(x_1) \psi(x_1) \right) \right\} = -\frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \int d^4 x_1 T \left\{ N \left(\overline{\psi(x_1)} \gamma^\mu \psi(x_1) \right) \right\} A_\mu^{ext}(x_1) \quad (7.7)$$

で与えられる。「第 5 章相互作用表示」において

- $S_{ab} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_b^+ | V_+(t) | \psi_a^+ \rangle$ において、 $|\psi_{a,b}^+\rangle$ も $V_+(t)$ も in-自由場の量で決定される

ことがわかっているのので、始状態と終状態として、

$$H_{0in}(0) | \psi_{a,b}^+ \rangle = E | \psi_{a,b}^+ \rangle \quad (7.8)$$

を満たす自由場の状態をとることができる。自由場の詳細は「第 2 章～第 4 章」で与えてあるので、(3.25)の表記を用いて、「始状態：運動量 \mathbf{p}_1 ・スピン $s1$ の陽電子 $\Rightarrow | \psi_a^+ \rangle = b^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1) | 0 \rangle$ 」及

び「終状態：運動量 \mathbf{p}_2 ・スピン $s2$ の陽電子 $\Rightarrow | \psi_b^+ \rangle = b^{(s2)\dagger}(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle$ 」とする。ところが

- $|\psi_{a,b}^+\rangle$ は規格化されている

ので

$$\{ b^{(i)}(\mathbf{p}), b^{(j)\dagger}(\mathbf{p}') \} = 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{ij} \quad (7.9)$$

に注意して

$$\langle 0 | \{ b^{(i)}(\mathbf{p}), b^{(j)\dagger}(\mathbf{p}') \} | 0 \rangle = \langle 0 | b^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(j)\dagger}(\mathbf{p}') | 0 \rangle = 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{ij} \quad (7.10)$$

従って、

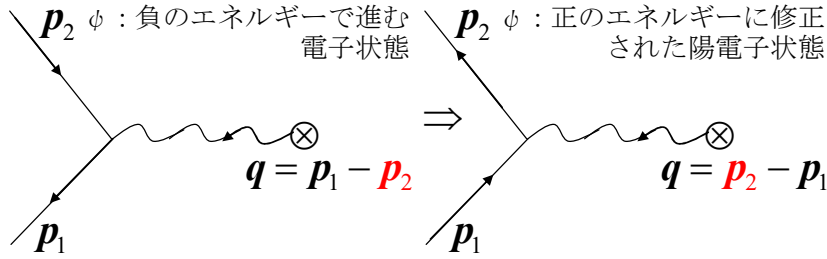
$$\frac{\langle 0 | b^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(j)\dagger}(\mathbf{p}') | 0 \rangle}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})K} \sqrt{2\omega(\mathbf{p}')K}} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{ij} \quad (7.11)$$

を得る。そのとき、規格された状態は

- 始状態：運動量 \mathbf{p}_1 ・スピン $s1$ の陽電子 $\Rightarrow \boxed{|\psi_a^+(\mathbf{p}_1)\rangle = \frac{b^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} | 0 \rangle}$

- 終状態：運動量 \mathbf{p}_2 ・スピン $s2$ の陽電子 $\Rightarrow \boxed{|\psi_b^+(\mathbf{p}_2)\rangle = \frac{b^{(s2)\dagger}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} | 0 \rangle}$

になる。ここで、(7.7)のファイマン図は



である。

求める振幅は

$$M \equiv \langle \psi_b^+(\mathbf{p}_2) | (I + S^{(1)}) | \psi_a^+(\mathbf{p}_1) \rangle \quad (7.12)$$

であり、クーロン散乱の部分は

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= \langle \psi_b^+(\mathbf{p}_2) | S^{(1)} | \psi_a^+(\mathbf{p}_1) \rangle = -\frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \int d^4 x_1 \langle \psi_b^+(\mathbf{p}_2) | T \left\{ N \left(\overline{\psi}(x_1) A^{ext}(x_1) \psi(x_1) \right) \right\} | \psi_a^+(\mathbf{p}_1) \rangle \\ &= -\frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \langle 0 | \frac{b^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} \int d^4 x_1 T \left\{ N \left(\overline{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \right) \right\} A_\mu^{ext}(x_1) \frac{b^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} | 0 \rangle \end{aligned} \quad (7.13)$$

である。ここで、(6.28)を用いて

$$T \left\{ N \left(\overline{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \right) \right\} = N \left(\overline{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \right) + \overline{\psi}_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_1) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \quad (7.14)$$

縮約は、(6.26)より

$$\overline{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) \equiv \langle 0 | T \left(\overline{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) \right) | 0 \rangle = \frac{1}{2} S_{F_{\beta\alpha}}(x-y) \quad (7.15)$$

で与えられるので

$$T \left\{ N \left(\overline{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \right) \right\} = N \left(\overline{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \right) + \frac{1}{2} S_{F_{\beta\alpha}}(0) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} = N \left(\overline{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} (S_F(0) \gamma^\mu) \quad (7.16)$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \langle 0 | \frac{b^{(s2)}(\mathbf{p}_2)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} \int d^4 x_1 N \left(\overline{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1) \right) A_\mu^{ext}(x_1) \frac{b^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1)}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} | 0 \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} \text{Tr} (S_F(0) \gamma^\mu) \int d^4 x_1 A_\mu^{ext}(x_1) \langle 0 | b^{(s2)}(\mathbf{p}_2) b^{(s1)\dagger}(\mathbf{p}_1) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (7.17)$$

また、 $b^{(s2)}(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle = 0$ に注意して

$$\{ b^{(i)}(\mathbf{p}), b^{(j)\dagger}(\mathbf{k}) \} = 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \delta^{ij} \quad (7.18)$$

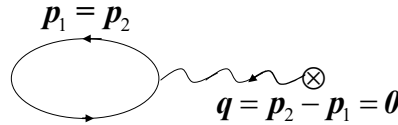
を用いて、第2項を書き換えると

$$\begin{aligned} \langle 0|b^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)b^{(s_1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle &= \langle 0|(-b^{(s_1)\dagger}(\mathbf{p}_1)b^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) + 2\omega(\mathbf{p}_1)K\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\delta^{s_1s_2})|0\rangle \\ &\stackrel{b^{(s_2)}(\mathbf{p}_2)|0\rangle=0}{=} 2\omega(\mathbf{p}_1)K\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\delta^{s_1s_2}\langle 0|0\rangle \end{aligned} \quad (7.19)$$

になる。従って、(7.17)は

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} \langle 0|b^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) \int d^4x_1 N(\overline{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)) A_\mu^{ext}(x_1) b^{(s_1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} Tr(S_F(0)\gamma^\mu) \int d^4x_1 A_\mu^{ext}(x_1) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \delta^{s_1s_2} \langle 0|0\rangle \end{aligned} \quad (7.20)$$

になる。ここの第2項のファイマン図は



で表される。 $S_F(0)$ が発散するので、このままでは、クーロン散乱は発散してしまう。これは、「繰り込み」により、取り除かれ第1項からの有限の値として計算することができる。ここで

$$M'^{(1)} = -\frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_1)K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(\mathbf{p}_2)K}} \langle 0|b^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) \int d^4x_1 N(\overline{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)) A_\mu^{ext}(x_1) b^{(s_1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle \quad (7.21)$$

とすると、(7.4)より、

$$\begin{aligned} N(\overline{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)) &\equiv \overline{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1) : \\ &= \int \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^3}} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})K} \sum_{i=1}^2 \left(\overline{u}_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x_1}{\hbar}\right) + \overline{v}_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x_1}{\hbar}\right) \right) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \quad (7.22) \\ &\int \sqrt{\frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^3}} \frac{d\mathbf{p}'}{2\omega(\mathbf{p}')K} \sum_{i'=1}^2 \left(u_\beta^{(i')}(\mathbf{p}') a^{(i')}(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}'x_1}{\hbar}\right) + v_\beta^{(i')}(\mathbf{p}') b^{(i')\dagger}(\mathbf{p}') \exp\left(\frac{i\mathbf{p}'x_1}{\hbar}\right) \right) : \end{aligned}$$

なので、 N 積の規約に従い生成演算子を左に、消滅演算子を右にして、

$$\begin{aligned} &\langle 0|b^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) N(\overline{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)) b^{(s_1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle \\ &= \frac{\hbar c}{2(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\exp\left(\frac{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')x_1}{\hbar}\right) d\mathbf{p}d\mathbf{p}'}{K\sqrt{\omega(\mathbf{p})\omega(\mathbf{p}')}} \sum_{i=1}^2 \overline{u}_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) \sum_{i'=1}^2 u_\beta^{(i')}(\mathbf{p}') \langle 0|b^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i')}(\mathbf{p}') b^{(s_1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle \\ &\quad + \frac{\hbar c}{2(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\exp\left(-\frac{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')x_1}{\hbar}\right) d\mathbf{p}d\mathbf{p}'}{K\sqrt{\omega(\mathbf{p})\omega(\mathbf{p}')}} \sum_{i=1}^2 \overline{v}_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) \sum_{i'=1}^2 u_\beta^{(i')}(\mathbf{p}') \langle 0|b^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) b^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i')}(\mathbf{p}') b^{(s_1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle \\ &\quad + \frac{\hbar c}{2(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\exp\left(\frac{i(\mathbf{p}+\mathbf{p}')x_1}{\hbar}\right) d\mathbf{p}d\mathbf{p}'}{K\sqrt{\omega(\mathbf{p})\omega(\mathbf{p}')}} \sum_{i=1}^2 \overline{u}_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) \sum_{i'=1}^2 v_\beta^{(i')}(\mathbf{p}') \langle 0|b^{(s_2)}(\mathbf{p}_2) a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) b^{(i')\dagger}(\mathbf{p}') b^{(s_1)\dagger}(\mathbf{p}_1)|0\rangle \end{aligned}$$

$$-\frac{\hbar c}{2(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\exp\left(-\frac{i(p-p')x_1}{\hbar}\right) dp dp'}{K\sqrt{\omega(p)\omega(p')}} \sum_{i=1}^2 \overline{v_\alpha^{(i)}(p)} \sum_{i'=1}^2 v_\beta^{(i')}(p') \langle 0 | b^{(s_2)}(p_2) b^{(i')\dagger}(p') b^{(i)}(p) b^{(s_1)\dagger}(p_1) | 0 \rangle$$
(7.23)

を得る。ここで

$$a^{(i)}(p')|0\rangle = 0, \quad \langle 0 | a^{(i)\dagger}(p) = 0$$
(7.24)

等に注意して

$$\langle 0 | b^{(s_2)}(p_2) N(\overline{\psi_\alpha(x_1)} \psi_\beta(x_1)) b^{(s_1)\dagger}(p_1) | 0 \rangle = -\frac{\hbar c}{2(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\exp\left(-\frac{i(p-p')x_1}{\hbar}\right) dp dp'}{K\sqrt{\omega(p)\omega(p')}}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^2 \overline{v_\alpha^{(i)}(p)} \sum_{i'=1}^2 v_\beta^{(i')}(p') \langle 0 | b^{(s_2)}(p_2) b^{(i')\dagger}(p') b^{(i)}(p) b^{(s_1)\dagger}(p_1) | 0 \rangle$$
(7.25)

を得る（問題 2）。 $b^{(s_2)}(p_2) b^{(i')\dagger}(p')$ と $b^{(i)}(p) b^{(s_1)\dagger}(p_1)$ に(7.18)を用いて

$$\langle 0 | b^{(s_2)}(p_2) N(\overline{\psi_\alpha(x_1)} \psi_\beta(x_1)) b^{(s_1)\dagger}(p_1) | 0 \rangle$$

$$= -\frac{2K\sqrt{\omega(p_1)\omega(p_2)}\hbar c}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{i(p-p')x_1}{\hbar}\right) \overline{v_\alpha^{(s_1)}(p_1)} v_\beta^{(s_2)}(p_2)$$
(7.26)

を得る（問題 3）。以上から、

$$M^{(1)} = -\frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \sqrt{\frac{1}{2\omega(p_1)K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(p_2)K}} \langle 0 | b^{(s_2)}(p_2) \int d^4x_1 N(\overline{\psi(x_1)} \gamma^\mu \psi(x_1)) A_\mu^{ext}(x_1) b^{(s_1)\dagger}(p_1) | 0 \rangle$$

$$= -\frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \sqrt{\frac{1}{2\omega(p_1)K}} \sqrt{\frac{1}{2\omega(p_2)K}} \int d^4x_1 (-1) \left[\frac{2K\sqrt{\omega(p_1)\omega(p_2)}\hbar c}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{i(p-p')x_1}{\hbar}\right) \right]$$

$$= \frac{i}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^3} \overline{v_\alpha^{(s_1)}(p_1)} \gamma^\mu v_\beta^{(s_2)}(p_2) \int d^4x_1 \exp\left(-\frac{i(p_1-p_2)x_1}{\hbar}\right) A_\mu^{ext}(x_1)$$
(7.27)

と計算できる。

x_1 の積分 $\int d^4x_1 \exp\left(-\frac{i(p_1-p_2)x_1}{\hbar}\right) A_\mu^{ext}(x_1)$ は

$$q = p_2 - p_1$$
(7.28)

なので

$$\int d^4x_1 \exp\left(-\frac{i(p_1-p_2)x_1}{\hbar}\right) A_\mu^{ext}(x_1) = \int d^4x_1 e^{\frac{iqx_1}{\hbar}} A_\mu^{ext}(x_1) = \int c dt_1 e^{\frac{iq_0 ct_1}{\hbar}} \int d\mathbf{x}_1 e^{-\frac{iq\mathbf{x}_1}{\hbar}} A_\mu^{ext}(\mathbf{x}_1)$$
(7.29)

になるので

$$\delta(q_0) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx^0 e^{\frac{iq_0 x^0}{\hbar}} \quad (x_0 = ct_1) \quad (7.30)$$

を用いて

$$\int d^4x_1 \exp\left(-\frac{i(p_1 - p_2)x_1}{\hbar}\right) A_\mu^{\text{ext}}(x_1) = 2\pi\hbar\delta(q_0) \int dx_1 e^{\frac{iqx_1}{\hbar}} A_\mu^{\text{ext}}(x_1) \quad (7.31)$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= \frac{i}{\hbar} \frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \overline{v^{(s1)}(p_1)} \gamma^\mu v^{(s2)}(p_2) \int d^4x_1 \exp\left(-\frac{i(p_1 - p_2)x_1}{\hbar}\right) A_\mu^{\text{ext}}(x_1) \\ &= i \frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \overline{v^{(s1)}(p_1)} \gamma^\mu v^{(s2)}(p_2) 2\pi\hbar\delta(q_0) \int dx_1 e^{\frac{iqx_1}{\hbar}} A_\mu^{\text{ext}}(x_1) \\ &= i \frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \overline{v^{(s1)}(p_1)} \gamma^\mu v^{(s2)}(p_2) \int dx_1 e^{\frac{iqx_1}{\hbar}} A_\mu^{\text{ext}}(x_1) \delta(q_0) \end{aligned} \quad (7.32)$$

となる。 $A_\mu^{\text{ext}}(x_1)$ のフーリエ変換にあたる $\int dx_1 e^{\frac{iqx_1}{\hbar}} A_\mu^{\text{ext}}(x_1)$ は、 $\mu=0$ のみ値があるので(7.5)を用いて

$$\int dx_1 e^{\frac{iqx_1}{\hbar}} A_{\mu=0}^{\text{ext}}(x_1) = \frac{Ze}{c\epsilon_0} \int_0^\infty r dr \int_{-1}^1 e^{\frac{iqrt}{\hbar}} dt \quad (|q|=q) \quad (7.33)$$

と変形できる（問題 4 - A）。この積分は、 r についての被積分関数 $re^{-\epsilon r}$ で発散するので(5.54)のように

$$\int dx_1 e^{\frac{iqx_1}{\hbar}} A_{\mu=0}^{\text{ext}}(x_1) = \frac{Ze}{2c\epsilon_0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty re^{-\epsilon r} dr \int_{-1}^1 e^{\frac{iqrt}{\hbar}} dt \quad (7.34)$$

として $r \rightarrow \infty$ で 0 になるように正則化をする。その結果、

$$\frac{Ze}{2c\epsilon_0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty re^{-\epsilon r} dr \int_{-1}^1 e^{\frac{iqrt}{\hbar}} dt = \frac{Ze}{c\epsilon_0} \frac{\hbar}{q} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dre^{-\epsilon r} \sin \frac{q}{\hbar} r \quad (7.35)$$

を得る（問題 4 - B）。 $\int_0^\infty dre^{-\epsilon r} \sin qr$ を実行して

$$\frac{Ze}{c\epsilon_0} \frac{\hbar}{q} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dre^{-\epsilon r} \sin \frac{q}{\hbar} r = \frac{\hbar^2}{c\epsilon_0} \frac{Ze}{q^2} \quad (q^2 = q^2) \quad (7.36)$$

より（問題 4 - C）

$$\int dx_1 e^{\frac{iqx_1}{\hbar}} A_{\mu=0}^{\text{ext}}(x_1) = \int dx e^{\frac{iqx}{\hbar}} \frac{Ze}{4\pi c\epsilon_0 |x|} = \frac{\hbar^2}{c\epsilon_0} \frac{Ze}{q^2} \quad (7.37)$$

を得る。以上から、(7.33)より

$$\begin{aligned}
 M^{(1)} &= i \frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \overline{v^{(s1)}(\mathbf{p}_1)} \gamma^\mu v^{(s2)}(\mathbf{p}_2) \int d\mathbf{x}_1 e^{-\frac{iq\mathbf{x}_1}{\hbar}} A_\mu^{ext}(\mathbf{x}_1) \delta(q_0) \\
 &= i \frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \overline{v^{(s1)}(\mathbf{p}_1)} \gamma^\mu v^{(s2)}(\mathbf{p}_2) \frac{\hbar^2 Ze}{c\epsilon_0 \mathbf{q}^2} \delta(q_0) \\
 &= i \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^2} \overline{v^{(s1)}(\mathbf{p}_1)} \gamma^0 v^{(s2)}(\mathbf{p}_2) \frac{1}{c\epsilon_0} \frac{Ze}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \delta\left(\frac{E_2 - E_1}{c}\right)
 \end{aligned} \tag{7.38}$$

である。陽電子の粒子場は $\psi^C(x) = C\overline{\psi(x)}^T$ なので

$$u^C(p) = C\overline{v(p)}^T \tag{7.39}$$

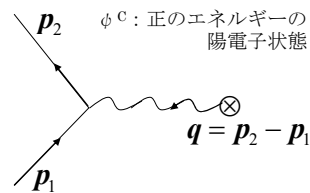
になる（問題 5—A・B）。従って、

$$\overline{v^{(s1)}(\mathbf{p}_1)} \gamma^\mu v^{(s2)}(\mathbf{p}_2) = -\overline{u^{C(s2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^\mu u^{C(s1)}(\mathbf{p}_1) \tag{7.40}$$

を得る（問題 5—C）。故に

$$M^{(1)} = -i \frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^2} \overline{u^{C(s2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^0 u^{C(s1)}(\mathbf{p}_1) \frac{1}{c\epsilon_0} \frac{Ze}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \delta\left(\frac{E_2 - E_1}{c}\right) \tag{7.41}$$

このとき、ファイマン図は



になる。

散乱断面積

さて、確率振幅は $|M^{(1)}|^2$ で与えられるが、実際に計算するのは

$$\bullet \text{ 単位時間当たりの確率振幅} = \frac{|M^{(1)}|^2}{\text{経過時間}} = \omega_{1 \rightarrow 2}$$

になる。 $|M^{(1)}|^2$ は

$$|M^{(1)}|^2 = \left| i \frac{e}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^2} \overline{u^{C(s2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^0 u^{C(s1)}(\mathbf{p}_1) \frac{1}{c\epsilon_0} \frac{Ze}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^2} \delta\left(\frac{E_2 - E_1}{c}\right) \right|^2 \tag{7.42}$$

で与えられる。これは、

$$|M^{(1)}|^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \left(\frac{Ze^2}{\epsilon_0 \hbar c} \right)^2 \delta^2\left(\frac{E_2 - E_1}{c}\right) \left| \overline{u^{C(s2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^0 u^{C(s1)}(\mathbf{p}_1) \right|^2 \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^4} \tag{7.43}$$

になる。ここで、 $\delta^2\left(\frac{E_2 - E_1}{c}\right)$ は注意を要する。最終的に、エネルギーを変数にして求めるので、

$$\delta\left(\frac{E_2 - E_1}{c}\right) = c\delta(E_2 - E_1) \quad (7.44)$$

を用いる。そのとき、

$$\delta^2\left(\frac{E_2 - E_1}{c}\right) = c^2\delta(E_2 - E_1) \lim_{E_2 \rightarrow E_1} \delta(E_2 - E_1) \quad (7.45)$$

が成り立つ。(7.30)を参考にして、経過時間を T とすると

$$\delta(E_2 - E_1) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dt e^{\frac{i(E_2 - E_1)t}{\hbar}} = \frac{1}{2\pi\hbar} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{\frac{i(E_2 - E_1)t}{\hbar}} dt$$

なので

$$\lim_{E_2 \rightarrow E_1} \delta(E_2 - E_1) = \frac{1}{2\pi\hbar} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{T}{2\pi\hbar} \quad (7.46)$$

を得る（問題 6）。(7.43)に代入すれば

$$\left|M^{(1)}\right|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{c^2 T}{2\pi\hbar} \frac{1}{(2\pi)^4} \left(\frac{Ze^2}{\hbar c \epsilon_0}\right)^2 \delta(E_2 - E_1) \left|u^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2) \gamma^0 u^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1)\right|^2 \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^4} \quad (7.47)$$

と計算できる。ところで、単位時間あたりの遷移確率は

$$\boxed{\omega_{1 \rightarrow 2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\left|M^{(1)}\right|^2}{T}} \quad (7.48)$$

なので、

$$\text{spin} = \frac{1}{2} \text{ or } -\frac{1}{2} \rightarrow \text{spin} = \frac{1}{2} \text{ or } -\frac{1}{2} \quad (7.49)$$

$$\omega_{1 \rightarrow 2} = \frac{c^2}{(2\pi)^5 \hbar} \left(\frac{Ze^2}{\epsilon_0 \hbar c}\right)^2 \delta(E_2 - E_1) \left|u^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2) \gamma^0 u^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1)\right|^2 \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^4}$$

になる。ここで微細構造定数

$$\boxed{\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}} \quad (7.50)$$

を用いて

$$\boxed{\omega_{1 \rightarrow 2} = \tilde{\omega}_{1 \rightarrow 2} \delta(E_2 - E_1) \Leftarrow \tilde{\omega}_{1 \rightarrow 2} = \frac{4Z^2 \alpha^2 c^2}{(2\pi)^3 \hbar} \left|u^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2) \gamma^0 u^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1)\right|^2 \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^4}} \quad (7.51)$$

である。

散乱を考えるが、実際には多数の e^+ が入射され、散乱された e^+ のすべてスピン状態が現れることになる。この状況を踏まえ

- 入射のスピンのについて平均する
- 散乱についてはスピンの和を取る

これを(7.51)に用いて

$$\text{spin} = \text{平均} \rightarrow \text{spin} = \frac{1}{2} \& -\frac{1}{2} \quad (7.52)$$

$$\text{求める量} : \bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \omega_{1 \rightarrow 2} \delta(E_2 - E_1) = \omega \delta(E_2 - E_1)$$

を得る。ここで、

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \omega_{1 \rightarrow 2}$$

を求める。従って

$$\frac{1}{2} \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \omega_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \frac{4Z^2 \alpha^2 c^2}{(2\pi)^3 \hbar} \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^4} \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \left| \overline{u^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^0 u^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1) \right|^2 \quad (7.53)$$

を計算することになる。スピンの和の部分は

$$\begin{aligned} \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \left| \overline{u^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^\mu u^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1) \right|^2 &= \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \overline{u^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1)} \gamma^0 u^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2) \overline{u^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^0 u^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1) \\ &= \sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \sum_{\alpha', \beta'=1}^2 \overline{u_\alpha^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1)} (\gamma^0)_{\alpha\beta} u_\beta^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2) \overline{u_{\alpha'}^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2)} (\gamma^0)_{\alpha'\beta'} u_{\beta'}^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1) \\ &= \sum_{\alpha, \beta'=1}^2 \sum_{\alpha', \beta=1}^2 (\gamma^0)_{\alpha\beta} (\gamma^0)_{\alpha'\beta'} \sum_{s_1=1}^2 \overline{u_{\beta'}^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1)} u_\alpha^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1) \sum_{s_2=1}^2 u_\beta^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2) \overline{u_{\alpha'}^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \end{aligned} \quad (7.54)$$

において、(3.115)の

$$\sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) \overline{u_\beta^{(i)}(\mathbf{p})} = \left(\frac{\not{\mathbf{p}} + mc}{2p^0} \right)_{\alpha\beta} \Big|_{p^0=E(\mathbf{p})/c} = \left(\frac{\not{\mathbf{p}}c + mc^2}{2E} \right)_{\alpha\beta} \quad (7.55)$$

を $u^{C(s_1, s_2)}(\mathbf{p}_{1,2})$ に用いると、

$$\sum_{s_1=1}^2 \sum_{s_2=1}^2 \left| \overline{u^{C(s_2)}(\mathbf{p}_2)} \gamma^0 u^{C(s_1)}(\mathbf{p}_1) \right|^2 = \text{Tr} \left(\gamma^0 \frac{\not{\mathbf{p}}_1 c + mc^2}{2E_1} \gamma^0 \frac{\not{\mathbf{p}}_2 c + mc^2}{2E_2} \right) \quad (7.56)$$

を得る（問題7）。以上から、

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \frac{4Z^2 \alpha^2 c^2}{(2\pi)^3 \hbar} \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^4} \text{Tr} \left(\gamma^0 \frac{\not{\mathbf{p}}_1 c + mc^2}{2E_1} \gamma^0 \frac{\not{\mathbf{p}}_2 c + mc^2}{2E_2} \right) \Big|_{E=E_1=E_2} \\ &= \frac{Z^2 \alpha^2 c^2}{2(2\pi)^3 \hbar} \frac{1}{E_1 E_2} \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^4} \text{Tr} \left(\gamma^0 (\not{\mathbf{p}}_1 + mc) \gamma^0 (\not{\mathbf{p}}_2 + mc) \right) \end{aligned} \quad (7.57)$$

になる。これより、 $\bar{\omega}$ にするには、(7.52)より、

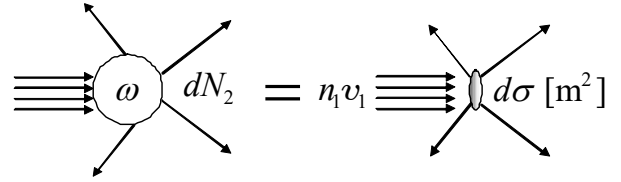
- エネルギー保存則： $\delta(E_2 - E_1)$

が追加される。

この ω から微分断面積 $d\sigma$ を求めることができる。微分断面積は

- 単位時間・単位面積あたりにぶつかる粒子を散乱する確率を表す

量である。これは、単位時間当りの遷移確率に終状態の粒子数 dN_2 を掛けたものに等しくなるので



$$\text{終状態に散乱される個数} = n_1 v_1 d\sigma (1 \rightarrow 2) = \bar{\omega} dN_2 = \omega \delta(E_2 - E_1) dN_2 \quad (7.58)$$

を得る（問題 8）。ここで、 n_1 は粒子密度、 v_1 は粒子の速度である。粒子密度は(7.11)より

$$n_1 = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\langle \psi_a^+ | \psi_a^+ \rangle}{V} \text{ with } \langle \psi_a^+ | \psi_a^+ \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left(\frac{i(\mathbf{p} - \mathbf{p})\mathbf{x}}{\hbar}\right) d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} V \quad (7.59)$$

より、

$$n_1 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \quad (7.60)$$

である。一方、 dN_2 は

$$dN_2 = d\mathbf{p}_2 \quad (7.61)$$

である。² 以上を用いて

$$\boxed{d\sigma(1 \rightarrow 2) = \frac{1}{n_1 v_1} \omega dN_2 \delta(E_2 - E_1) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{v_1} \omega d\mathbf{p}_2 \delta(E_2 - E_1)} \quad (7.62)$$

を得る。従って

$$\begin{aligned} d\sigma(1 \rightarrow 2) &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{v_1} \omega d\mathbf{p}_2 \delta(E_2 - E_1) \\ &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{v_1} \frac{Z^2 \alpha^2 c^4}{2(2\pi)^3 \hbar E_1 E_2 |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^4} \text{Tr}(\gamma^0 (\not{\mathbf{p}}_1 + mc) \gamma^0 (\not{\mathbf{p}}_2 + mc)) d\mathbf{p}_2 \delta(E_2 - E_1) \\ &= \frac{Z^2 \alpha^2 \hbar^2 c^4}{2} \frac{1}{v_1 E_1 E_2 |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^4} \text{Tr}(\gamma^0 (\not{\mathbf{p}}_1 + mc) \gamma^0 (\not{\mathbf{p}}_2 + mc)) d\mathbf{p}_2 \delta(E_2 - E_1) \end{aligned} \quad (7.63)$$

になる。今、

- \mathbf{p}_1 を基準にして、 \mathbf{p}_2 のなす角を θ とする

$$\bullet \begin{cases} d\mathbf{p}_2 = |\mathbf{p}_2|^2 d|\mathbf{p}_2| d\Omega \\ |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1| = 2|\mathbf{p}_1| \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (7.64)$$

² この粒子数は $\int |\psi_a^+ \rangle d\mathbf{p} \langle \psi_a^+ | = I$ より $d\mathbf{p}$ に一致する。仮に、 $|\phi_b^+ \rangle = b^{(s)\dagger}(\mathbf{p})|0\rangle$ とすれば、 $\int |\phi_a^+ \rangle \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})K} d\mathbf{p} \langle \phi_a^+ | = I$

になるので、 $dN = \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})K} d\mathbf{p}$ である。

を得る（問題 9）。従って、

$$\begin{aligned} d\sigma(1 \rightarrow 2) &= \frac{Z^2 \alpha^2 \hbar^2 c^4}{2} \frac{1}{v_1 E_1 E_2} \frac{1}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|^4} \text{Tr}(\gamma^0(\not{\mathbf{p}}_1 + mc)\gamma^0(\not{\mathbf{p}}_2 + mc)) d\mathbf{p}_2 \delta(E_2 - E_1) \\ &= \frac{Z^2 \alpha^2 \hbar^2 c^4}{2} \frac{1}{v_1 E_1 E_2} \frac{1}{16|\mathbf{p}_1|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \text{Tr}(\gamma^0(\not{\mathbf{p}}_1 + mc)\gamma^0(\not{\mathbf{p}}_2 + mc)) d|\mathbf{p}_2| d\Omega \delta(E_2 - E_1) \end{aligned} \quad (7.65)$$

である。Tr を計算するため Appendix(7.76)と(7.77)を用いて

$$\text{Tr}(\gamma^0(\not{\mathbf{p}}_1 + mc)\gamma^0(\not{\mathbf{p}}_2 + mc)) = 8 \frac{E_2}{c} \frac{E_1}{c} \left(1 - \frac{v_2}{c} \frac{v_1}{c} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (7.66)$$

を得る（問題 10）。これより

$$\begin{aligned} d\sigma(1 \rightarrow 2) &= \frac{Z^2 \alpha^2 \hbar^2 c^4}{2} \frac{1}{v_1 E_1 E_2} \frac{1}{16|\mathbf{p}_1|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 8 \frac{E_1}{c} \frac{E_2}{c} \left(1 - \frac{v_1}{c} \frac{v_2}{c} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) d|\mathbf{p}_2| d\Omega \delta(E_2 - E_1) \\ &= \frac{Z^2 \alpha^2 \hbar^2 c^2}{4|\mathbf{p}_1|^2 v_1 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \frac{v_1}{c} \frac{v_2}{c} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) d|\mathbf{p}_2| d\Omega \delta(E_2 - E_1) \end{aligned} \quad (7.67)$$

ここで

$$\frac{dE_2}{d|\mathbf{p}_2|} = v_2 \quad (7.68)$$

を用いて（問題 11）

$$d\sigma(1 \rightarrow 2) = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4|\mathbf{p}_1|^2 v_1 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \frac{v_1}{c} \frac{v_2}{c} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \frac{dE_2}{v_2} d\Omega \delta(E_2 - E_1) \quad (7.69)$$

を得る。ここで、微分記号が dE_2 & $d\Omega$ の 2 つあるので、(7.69)を $d^2\sigma$ とし、

$$d^2\sigma(1 \rightarrow 2) = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4|\mathbf{p}_1|^2 v_1 v_2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \frac{v_1}{c} \frac{v_2}{c} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) dE_2 d\Omega \delta(E_2 - E_1) \quad (7.70)$$

と表す。これから、 E_2 積分を実行して単位立体角当たりの断面積

- 微分断面積

が、

$$\begin{aligned} d\sigma(1 \rightarrow 2) &= \int d^2\sigma(1 \rightarrow 2) = \int_0^\infty \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4|\mathbf{p}_1|^2 v_1 v_2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \frac{v_1}{c} \frac{v_2}{c} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) dE_2 d\Omega \delta(E_2 - E_1) \\ &= \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4|\mathbf{p}_1|^2 v_1 v_1 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \frac{v_1}{c} \frac{v_1}{c} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) d\Omega = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4|\mathbf{p}_1|^2 v_1^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) d\Omega \end{aligned} \quad (7.71)$$

より

$$\boxed{\frac{d\sigma(1 \rightarrow 2)}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 c^2}{4p^2 v_1^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)} \quad (7.72)$$

として導かれる。ここに、

$$\begin{cases} p = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| \\ v = v_1 = v_2 \end{cases} \quad (7.73)$$

である（問題 1 2）。これは

- ラザフォードの散乱面積

であり、補正項 $v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ が

- （陽）電子のスピンからの寄与として加わっていることがわかる。

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4p^2 v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)} \leftarrow \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \quad (7.74)$$

で与えられる。(7.74)の次元が[距離]²であることが分かる（問題 1 3）。古典論では、 \hbar が不在なので、

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{4p^2 v^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}}} \leftarrow \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (7.75)$$

に移行する。

Appendix: γ 行列の演算

$$\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \gamma_\mu (= \gamma^\mu \gamma_\mu \text{ と省略する場合あり}) = 4$$

$$\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \not{\alpha} \gamma_\mu (= \gamma^\mu \not{\alpha} \gamma_\mu \text{ と省略する場合あり}) = -2 \not{\alpha}$$

$$\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \not{a} \not{b} \gamma_\mu (= \gamma^\mu \not{a} \not{b} \gamma_\mu \text{ と省略する場合あり}) = 4ab$$

$$\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\mu (= \gamma^\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\mu \text{ と省略する場合あり}) = -2 \not{c} \not{b} \not{a}$$
(7.76)

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$
(7.77)

$$\text{Tr}(\underbrace{\gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_n}}_{\text{奇数個の}\gamma}) = 0$$

第 7 章問題

1) A) クーロンゲージを説明せよ。

B) 電荷 Ze の原子が原点にいるとき、(7.5)がクーロンゲージ条件でのマクスウェルの方程式の解であることを示せ。極座標表示を使うとよい。 $r \neq 0$ に限れば、原子がないのでより簡単化される。

2) (7.25)を導け。

3) (7.26)を導け。

4) A) (7.33)を導け。

B) (7.35)を導け。

C) (7.36)を導け。ただし、 $\int_0^{\infty} dr e^{-\epsilon r} e^{iqr}$ を計算しその虚部が $\int_0^{\infty} dr e^{-\epsilon r} \sin qr$ になることを利用するとよい。

5) A) $\psi_{\alpha}(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega(\mathbf{p})K}} \sum_{i=1}^2 \left(u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp(-ipx) + v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp(ipx) \right)$ を用いて

(7.39)を示せ。

B) $v(p) = -\gamma^0 C u^{C*}(p)$ を示せ。

C) (7.40)を示せ。

6) (7.46)の $\frac{T}{2\pi\hbar}$ の次元が[エネルギー] $^{-1}$ の次元である事を示せ。

7) (7.56)を導け。

8) (7.58)において、粒子密度が n の粒子が速度 v で移動している時、単位時間当たり面積 $d\sigma$ 衝突する粒子の数が $vn \times d\sigma$ で与えられることを示せ。

9) (7.64)において

A) $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| (= p)$ を導け。 $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ を使うとよい。

B) $|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1| = 2p \sin \frac{\theta}{2}$ を導け。

1 0) (7.66)を導け。

1 1) (7.68)を導け。

1 2) (7.73)を導け。

1 3) (7.74)の次元が[距離] 2 であることを証明せよ。

1 4) Appendix の(7.76)と(7.77)を導け。