

第六章 T 積と S 行列

演算子の方は、in 演算子で表され、

$$i\hbar\partial_t\varphi_{in}(x) = [\varphi_{in}(x), H_{0in}(t)] \text{ with } x = (t, \mathbf{x}) \quad (6.1)$$

の方程式を満たす。(6.1)を満たす場合は、自由場の方程式を満たす (問題 1)。¹ また S 行列は、自由場の量で表され、

$$S_{ab} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_b^+ | U(\infty, -\infty) | \psi_a^+ \rangle \text{ with } S = U(\infty, -\infty)$$

$$\begin{cases} H_{0in} | \psi_a^+ \rangle = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}_{0in}(x) | \psi_a^+ \rangle = E_a | \psi_a^+ \rangle \text{ with } \mathcal{H}_{0in}(x) = \mathcal{H}_0(\varphi_{in}(x)) \text{ and } | \psi_a^+ \rangle = a_{in}^\dagger | 0 \rangle \text{ 等} \\ U(t, t_0) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar c} \int_{t_0}^t d^4 x' \mathcal{H}_{lin}(x')\right) \text{ with } \mathcal{H}_{lin}(x) = \mathcal{H}_{int}(\varphi_{in}(x)) \end{cases} \quad (6.2)$$

である。すべて in-自由場の量で決定されることが重要である。具体的には

$$\mathcal{H}_0(x) =: \left| \frac{\partial \phi_{in}}{\partial x^0} \right|^2 + |\nabla \phi_{in}|^2 + \left(\frac{\mu c}{\hbar} \right)^2 |\phi_{in}|^2 + i\overline{\psi_{in}} \gamma^0 \frac{\partial \psi_{in}}{\partial x^0} - i\overline{\psi_{in}} \not{\partial} \psi_{in} + \frac{mc}{\hbar} \overline{\psi_{in}} \psi_{in}$$

$$+ \frac{1}{4\mu_0} F_{in}^{\mu\nu} F_{in\mu\nu} - \frac{1}{\mu_0} (\partial^0 A_{in\mu} - \partial_\mu A_{in}^0) \frac{\partial A_{in}^\mu}{\partial x^0} : \quad (6.3)$$

$$\mathcal{H}_{int}(x) =: -i \frac{eq_\phi}{\hbar} (\phi_{in}^\dagger \overrightarrow{\partial}_0 \phi_{in} A_{in}^0 - \phi_{in}^\dagger \overrightarrow{\partial}_\mu \phi_{in} A_{in}^\mu) - \left(\frac{eq_\phi}{\hbar} \right)^2 |\phi_{in}|^2 A_{in}^\mu A_{in\mu} + \frac{eq_\psi}{\hbar} \overline{\psi_{in}} \not{A}_{in} \psi_{in} :$$

で与えられる。

N 積

N 積(Normal Product)は、生成演算子を左に、消滅演算子を右にして、量子場から作られるエネルギー演算子 $\hat{H}(\varphi^\dagger(x), \varphi(x))$ が真空 $|0\rangle$ に対して ($\varphi(x)$ は $\varphi_{in}(x)$ の事である。添字 in は省略)

$$\hat{H}(\varphi^\dagger(x), \varphi(x)) | 0 \rangle = 0 \quad (6.4)$$

を保証するので、真空のエネルギーがゼロになる。そこで、

$$\varphi_A(x) = \varphi_A^{(+)}(x) + \varphi_A^{(-)}(x) \Leftarrow \begin{cases} \varphi_A^{(+)}(x) = \int_{p^0=\omega} \overbrace{\frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})}}^{\text{定数}} a_A(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \\ \varphi_A^{(-)}(x) = \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a_A^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \end{cases} \quad (6.5)$$

と表すとき、 $\varphi_A(x)$ の種類：

- 1) スカラー (scalar)
- 2) スピノール (spinor)

¹ 場の演算子の添え字 in は省略されている。必要なときには明示する。

3) ベクトル (vector)

に従って

$$\begin{cases} a_A(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p}) \\ a_A^\dagger(\mathbf{p}) = a^\dagger(\mathbf{p}) \end{cases} \text{ for scalar } \varphi = \phi$$

$$\begin{cases} a_{A=\alpha}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \\ a_{A=\alpha}^\dagger(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^2 v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \end{cases} \text{ for spinor } \varphi = \psi \quad (6.6)$$

$$\begin{cases} a_{A=\mu}(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) \\ a_{A=\mu}^\dagger(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^{(\lambda)*}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) \end{cases} \text{ for vector } \varphi = A$$

である。また、量子場の交換関係は

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(x')] &= \frac{\hbar^2 c}{(2\pi)^3} \int_{p^0=\omega} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(\exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \right) \\ &= \frac{\hbar^2 c}{(2\pi)^3} \int d^4 p \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\left\{ \psi_\alpha(x'), \overline{\psi}_\beta(x) \right\} = \left(i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar} \right)_{\alpha\beta} [\phi(x), \phi(x')], \quad [A_\mu(x), A_\nu(x')] = -g_{\mu\nu} \mu_0 [\phi(x), \phi(x')] \Big|_{m=0}$$

である。更に、 $\phi_A^{(\pm)}(x)$ 同士は (反) 可換であるが、

$$[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(x')] = i\Delta^{(+)}(x-x'), \quad [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(x')] = i\Delta^{(-)}(x-x') \quad (6.8)$$

である。ここに

$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(x) &= -\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int_{p^0=\omega} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) = -\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \\ \Delta^{(-)}(x) &= \frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int_{p^0=\omega} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) = \frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int d^4 p \theta(-p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

である (問題 2-A)。これより

$$-\Delta^{(-)}(-x) = \Delta^{(+)}(x) \quad (6.10)$$

を得る (問題 2-B)。同様にして、

$$\left\{ \psi_\alpha^{(+)}(x), \overline{\psi}_\beta^{(-)}(x') \right\} = iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'), \quad \left\{ \psi_\alpha^{(-)}(x), \overline{\psi}_\beta^{(+)}(x') \right\} = iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-x') \quad (6.11)$$

$$S_{\alpha\beta}^{(\pm)}(x) = \left(i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar} \right)_{\alpha\beta} \Delta^{(\pm)}(x) \quad (6.12)$$

を得る (問題 3)。および

$$\begin{aligned} \left[A_\mu^{(+)}(x), A_\mu^{(-)}(x') \right] &= -ig_{\mu\nu} \mu_0 D^{(+)}(x-x'), \quad \left[A_\mu^{(-)}(x), A_\mu^{(+)}(x') \right] = -ig_{\mu\nu} \mu_0 D^{(-)}(x-x') \\ D^{(\pm)}(x) &= \Delta^{(\pm)}(x) \Big|_{m=0} \end{aligned} \quad (6.13)$$

である。

そこで、まず 2 体の場合について考えてみる。N 積(Normal Product)で、注意すべき組は

$$\begin{aligned} N(\varphi_A^{(+)}(x)\varphi_B^{(-)}(y)) &= \varphi_B^{(-)}(y)\varphi_A^{(+)}(x) \text{ for } \varphi_{A,B} = \phi, A_\mu \\ N(\varphi_A^{(+)}(x)\varphi_B^{(-)}(y)) &= -\varphi_B^{(-)}(y)\varphi_A^{(+)}(x) \text{ for } \varphi_{A,B} = \psi \end{aligned} \quad (6.14)$$

である。まず、scalar(ϕ)と vector(A_μ)の場合は、

$$\begin{aligned} N(\varphi_A(x)\varphi_B(y)) &= N(\varphi_A^{(+)}(x)\varphi_B^{(+)}(y)) + N(\varphi_A^{(-)}(x)\varphi_B^{(+)}(y)) + N(\varphi_A^{(+)}(x)\varphi_B^{(-)}(y)) \\ &\quad + N(\varphi_A^{(-)}(x)\varphi_B^{(-)}(y)) \\ &= \varphi_A^{(+)}(x)\varphi_B^{(+)}(y) + \varphi_A^{(-)}(x)\varphi_B^{(+)}(y) + \varphi_B^{(-)}(y)\varphi_A^{(+)}(x) + \varphi_A^{(-)}(x)\varphi_B^{(-)}(y) \\ &= \varphi_A^{(+)}(x)\varphi_B^{(+)}(y) + \varphi_A^{(-)}(x)\varphi_B^{(+)}(y) + \varphi_A^{(+)}(x)\varphi_B^{(-)}(y) + \varphi_A^{(-)}(x)\varphi_B^{(-)}(y) - [\varphi_A^{(+)}(x), \varphi_B^{(-)}(y)] \\ &= \varphi_A(x)\varphi_B(y) - [\varphi_A^{(+)}(x), \varphi_B^{(-)}(y)] \end{aligned} \quad (6.15)$$

より、

$$\begin{aligned} N(\phi(x)\phi(y)) &= \phi(x)\phi(y) - [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] = \phi(x)\phi(y) - i\Delta^{(+)}(x-y) \\ N(A_\mu(x)A_\nu(y)) &= A_\mu(x)A_\nu(y) - [A_\mu^{(+)}(x), A_\nu^{(-)}(y)] = A_\mu(x)A_\nu(y) + ig_{\mu\nu}D^{(+)}(x-y) \end{aligned} \quad (6.16)$$

同様に、spinor(ψ)の場合は

$$\begin{aligned} N(\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)) &= \psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y) - \{\psi_\alpha^{(+)}(x), \overline{\psi}_\beta^{(-)}(y)\} = \psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y) + iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-y) \\ N(\overline{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y)) &= \overline{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y) - \{\overline{\psi}_\alpha^{(+)}(x), \psi_\beta^{(-)}(y)\} = \overline{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y) + iS_{\alpha\beta}^{(-)}(y-x) \\ N(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)) &= \psi_\alpha(x)\psi_\beta(y) \end{aligned} \quad (6.17)$$

を得る (問題 4)。

T 積

T 積(Time-ordered Product)は、過去の場を右に置く演算であり

$$\begin{aligned} T(\varphi_A(x)\varphi_B(y)) &= \begin{cases} \varphi_A(x)\varphi_B(y) & \text{for } x_0 > y_0 \\ \varphi_B(y)\varphi_A(x) & \text{for } x_0 < y_0 \end{cases} \text{ for } \varphi_{A,B} = \phi, A_\mu \\ T(\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y)) &= \begin{cases} \psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y) & \text{for } x_0 > y_0 \\ -\overline{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x) & \text{for } x_0 < y_0 \end{cases} \\ T(\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)) &= \psi_\alpha(x)\psi_\beta(y) = \begin{cases} \psi_\alpha(x)\psi_\beta(y) & \text{for } x_0 > y_0 \\ -\psi_\beta(y)\psi_\alpha(x) & \text{for } x_0 < y_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.18)$$

である。(6.16)と(6.17)より T 積と N 積の差は、 c 数²であることがわかる。そこで、その関連を

$$T(UV) = N(UV) + U \cdot V \cdot \quad (6.19)$$

のように定義することができる。

● $U \cdot V \cdot$ を縮約 (contraction)

と呼ぶこれより、N 積の性質：

$$\langle 0 | N(UV) | 0 \rangle = 0 \quad (6.20)$$

を用いれば、

$$U \cdot V \cdot = \langle 0 | T(UV) | 0 \rangle \quad (6.21)$$

を得る。従って

$$T(UV) = N(UV) + \langle 0 | T(UV) | 0 \rangle \quad (6.22)$$

である。

さて、まず $\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)$ について・・・

$$\begin{aligned} \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) &= T(\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)) - N(\phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y)) \\ &= \begin{cases} \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) - \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) & \text{for } x_0 > y_0 \\ \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) - \phi^{(-)}(y)\phi^{(+)}(x) & \text{for } x_0 < y_0 \end{cases} = \begin{cases} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] & \text{for } x_0 > y_0 \\ 0 & \text{for } x_0 < y_0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} i\Delta^{(+)}(x-y) & \text{for } x_0 > y_0 \\ 0 & \text{for } x_0 < y_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.23)$$

を得る。同様にして、

$$\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } x_0 > y_0 \\ -i\Delta^{(-)}(x-y) & \text{for } x_0 < y_0 \end{cases} \quad (6.24)$$

$$\phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(y) = \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(y) = 0$$

である (問題 5-A)。以上から、(6.21)に代入して、

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle &= \phi \cdot (x)\phi \cdot (y) = \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(y) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(y) \\ &= \begin{cases} i\Delta^{(+)}(x-y) & \text{for } x_0 > y_0 \\ -i\Delta^{(-)}(x-y) & \text{for } x_0 < y_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.25)$$

を得る。この真空期待値を表す関数として

$$\frac{1}{2}\Delta_F(x-y) = \begin{cases} +i\Delta^{(+)}(x-y) & \text{for } x_0 > y_0 \\ -i\Delta^{(-)}(x-y) & \text{for } x_0 < y_0 \end{cases} \quad (6.26)$$

² 通常の実数など、commuting number のことである。

を定義する。従って、

$$\phi^\cdot(x)\phi^\cdot(y) = \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle = \frac{1}{2}\Delta_F(x-y) = \begin{cases} +i\Delta^{(+)}(x-y) & \text{for } x_0 > y_0 \\ -i\Delta^{(-)}(x-y) & \text{for } x_0 < y_0 \end{cases} \quad (6.27)$$

である。また、

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^\cdot(x)\overline{\psi_\beta^\cdot}(y) &= \langle 0|T(\psi_\alpha(x)\overline{\psi_\beta}(y))|0\rangle = -\langle 0|T(\overline{\psi_\beta}(y)\psi_\alpha(x))|0\rangle \\ &= \frac{1}{2}S_{F\alpha\beta}(x-y) = \begin{cases} +iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-y) & \text{for } x_0 > y_0 \\ -iS_{\alpha\beta}^{(-)}(x-y) & \text{for } x_0 < y_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$A_\mu^\cdot(x)A_\nu^\cdot(y) = \langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y))|0\rangle = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mu_0\Delta_F(x-y)\Big|_{m=0}$$

を得る (問題 5-B)。

S 行列の展開

S 行列は、(5.50)より

$$\begin{aligned} S &= T \exp\left(-\frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}_{lin}(x)\right) \text{ with } \mathcal{H}_{lin}(x) = \mathcal{H}_{int}(\phi_{in}(x)) \\ &= 1 + \frac{1}{1!} \left(-\frac{i}{\hbar c}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 T(H_{lin}(t_1)) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar c}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(H_{lin}(t_1)H_{lin}(t_2)) + \dots \end{aligned} \quad (6.29)$$

と表されている。それぞれの展開の項を

- 第 0 次、第 1 次、第 2 次、・・・第 n 次、・・・

という。それぞれの T 積内には、n 個の N 積が含まれており、この計算をするのに、(6.19)を拡張した

$$\begin{aligned} T(UV \dots XYZ) &= N(UV \dots XYZ) + N(U^\cdot V^\cdot W \dots XYZ) + \dots + N(UVW \dots XY^\cdot Z^\cdot) \\ &\quad + N(U^\cdot V^\cdot W \dots XY^\cdot Z^\cdot) + \dots \\ &= N(UV \dots XYZ) + \sum_{\substack{\text{all possible sets} \\ \text{of multiple contractions}}} N(U^\cdot V^\cdot \dots XYZ) \end{aligned} \quad (6.30)$$

が有用な公式になる。

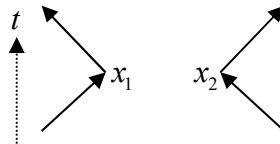
4 体の spinor の場合を調べてみる。そのとき、現れる演算子の積は、(6.30)を用いて

$$\begin{aligned} &T\left(N(\overline{\psi_\alpha}(x_1)\psi_\beta(x_1))N(\overline{\psi_\rho}(x_2)\psi_\sigma(x_2))\right) \\ &= N\left[N(\overline{\psi_\alpha}(x_1)\psi_\beta(x_1))N(\overline{\psi_\rho}(x_2)\psi_\sigma(x_2))\right] + N\left[N(\overline{\psi_\alpha^\cdot}(x_1)\psi_\beta(x_1))N(\overline{\psi_\rho}(x_2)\psi_\sigma^\cdot(x_2))\right] \\ &\quad + N\left[N(\overline{\psi_\alpha}(x_1)\psi_\beta^\cdot(x_1))N(\overline{\psi_\rho^\cdot}(x_2)\psi_\sigma(x_2))\right] + N\left[N(\overline{\psi_\alpha^\cdot}(x_1)\psi_\beta^\cdot(x_1))N(\overline{\psi_\rho^\cdot}(x_2)\psi_\sigma^\cdot(x_2))\right] \\ &\quad + \text{そのほかの縮約は } 0 \\ &= N(\overline{\psi_\alpha}(x_1)\psi_\beta(x_1)\overline{\psi_\rho}(x_2)\psi_\sigma(x_2)) + N(\overline{\psi_\rho}(x_2)\psi_\sigma^\cdot(x_2)\overline{\psi_\alpha^\cdot}(x_1)\psi_\beta(x_1)) \\ &\quad + \overline{\psi_\alpha^\cdot}(x_1)\psi_\beta^\cdot(x_1)\overline{\psi_\rho^\cdot}(x_2)\psi_\sigma^\cdot(x_2) + N(\overline{\psi_\alpha}(x_1)\psi_\beta^\cdot(x_1)\overline{\psi_\rho^\cdot}(x_2)\psi_\sigma(x_2)) \end{aligned}$$

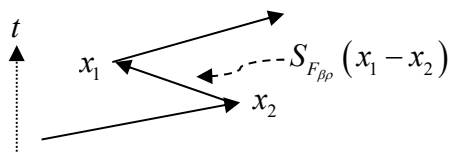
$$\begin{aligned}
 &= N(\overline{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2)) + N(\overline{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2)) \\
 &+ N(\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2)\overline{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)) - \psi_\beta(x_1)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2)\overline{\psi}_\alpha(x_1) \\
 &= N(\overline{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2)) - \frac{1}{2}S_{F_{\beta\rho}}(x_1-x_2)N(\overline{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\sigma(x_2)) \\
 &- \frac{1}{2}S_{F_{\alpha\sigma}}(x_2-x_1)N(\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\beta(x_1)) - \left(-\frac{1}{2}S_{F_{\beta\rho}}(x_1-x_2)\right)\left(-\frac{1}{2}S_{F_{\alpha\sigma}}(x_2-x_1)\right)
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

を得る (問題 6)。これらを図 (ファイマン図) にして表すことができる。

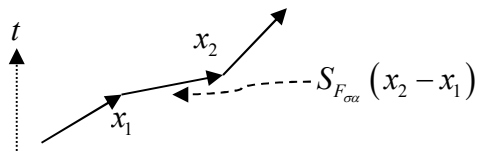
第 1 項 : $N(\overline{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_1)\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\sigma(x_2))$



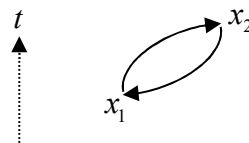
第 2 項 : $S_{F_{\beta\rho}}(x_1-x_2)N(\overline{\psi}_\alpha(x_1)\psi_\sigma(x_2))$



第 3 項 : $S_{F_{\alpha\sigma}}(x_2-x_1)N(\overline{\psi}_\rho(x_2)\psi_\beta(x_1))$



第 4 項 : $S_{F_{\beta\rho}}(x_1-x_2)S_{F_{\alpha\sigma}}(x_2-x_1)$



になる。第 4 項において

- 時間を逆行する粒子は、時間と共に進む反粒子

である。図的には、第 1 項を基にして、それぞれのラインの前と後を繋いでゆけば第 2 項～第 4 項が得られることがわかる。このように、S 行列の計算には、

- $\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y))|0\rangle$ の様な真空から真空への遷移 (伝播関数 : propagator function)

が必要になる。

伝播関数

伝播関数は、spin-0 の素粒子に対して

$$\langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle = \frac{1}{2}\Delta_F(x-y) = \begin{cases} +i\Delta^{(+)}(x-y) & \text{for } x_0 - y_0 > 0 \\ -i\Delta^{(-)}(x-y) & \text{for } x_0 - y_0 < 0 \end{cases} \tag{6.32}$$

で与えられ、spin-1/2, spin-1 の素粒子に対して

$$S_F(x-y)_{\alpha\beta} = \left(i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar}\right)_{\alpha\beta} \Delta_F(x-y), \quad D_F(x-y)_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mu_0 \Delta_F(x-y) \Big|_{m=0} \tag{6.33}$$

で関係づけられる。 $\Delta^{(\pm)}(x-y)$ の運動量積分による表記は

$$\begin{aligned}\Delta^{(+)}(x) &= -\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int_{p^0=\omega} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) = -\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \\ \Delta^{(-)}(x) &= \frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int_{p^0=\omega} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) = \frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int d^4 p \theta(-p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right)\end{aligned}\quad (6.34)$$

になる。これを複素数の積分に拡張すると $\Delta_F(x)$ の運動量積分をあたえることができる。例えば、 $\Delta^{(+)}(x)$ は、複素 p^0 積分を追加した 3 次元 \mathbf{p} 積分を 4 次元積分に拡張すると...

$$\Delta^{(+)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(p^0)}{(p^0 - \omega)(p^0 + \omega)} dp^0 d\mathbf{p} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(p^0)}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p$$

と表わせる。閉曲線 C (以下参照) で表わされる複素積分である。

$\Delta^{(+)}(x)$ を例にとり積分路を見てみよう。そのために、次の公式 (コーシーの積分公式) を用いる：

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) = 2\pi i f(z) \Big|_{z=a} \quad (6.35)$$

ここに複素数 a を囲む反時計回りの閉曲線を C で示す。 a を囲む閉曲線なら形は何でもよい。積分記号にあるサークルは右図の

● 閉曲線 C 上に沿って積分することを示している (問題 7)。ここで、複素平面では

● 通常の積分は実軸 C_L に沿って積分:

$$\int_{C_L} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (6.36)$$

に注意する。

コーシーの積分公式から、

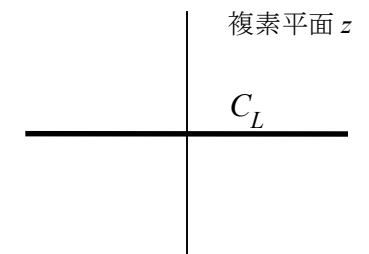
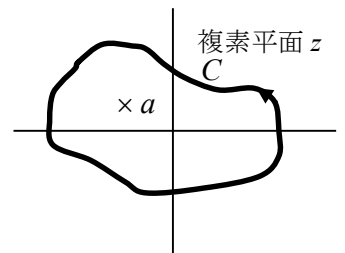
$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz d\mathbf{p} &= 2\pi i \int f(a) d\mathbf{p} \stackrel{\text{要請する}}{=} 2\pi i \Delta^{(+)}(x) = 2\pi i \left(-\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int_{p^0=\omega} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \right) \\ &= \frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^2} \int_{p^0=\omega} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right)\end{aligned}\quad (6.37)$$

になるような複素積分を見つけることになる。そこで、

● $p^0 = \omega$ の条件

を利用すると、 p^0 複素平面で C として ω を含む閉曲線とするとコーシーの積分公式は

$$\oint_C \frac{f(p^0)}{p^0 - \omega} dp^0 d\mathbf{p} = 2\pi i \int f(\omega) d\mathbf{p} \quad (6.38)$$



なる。特殊相対論的には、 $p^{02} - \omega^2 = (p^0 - \omega)(p^0 + \omega) = p^{02} - (p^2 + m^2 c^2) = \sum_{\mu=0}^3 p^\mu p_\mu = p^2$ に注意

して、(6.38)ではなく、次の積分表式：

$$\oint_C \frac{f(p^0)}{(p^0 - \omega)(p^0 + \omega)} dp^0 d\mathbf{p} = 2\pi i \int_{p^0=\omega} \frac{f(p^0)}{p^0 + \omega} dp^0 = 2\pi i \int \frac{f(\omega)}{2\omega} d\mathbf{p} \stackrel{\text{要請する}}{=} 2\pi i \Delta^{(+)}(x) \quad (6.39)$$

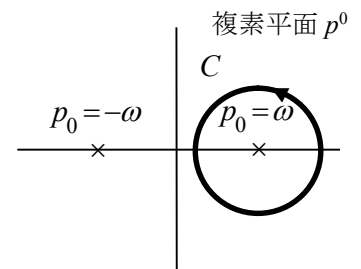
を使用する。従って、

$$\Delta^{(+)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(p^0)}{(p^0 - \omega)(p^0 + \omega)} dp^0 d\mathbf{p} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(p^0)}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p \quad (6.40)$$

を得る。ここで積分経路は、

- $p^0 = \omega$ を含むが $p^0 = -\omega$ を含まない閉曲線

になる。例えば、右図である。そして、 $f(p^0)$ は、(6.39)より



$$\int \frac{f(\omega)}{2\omega} d\mathbf{p} = \Delta^{(+)}(x) = -\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int_{p^0=\omega} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \quad (6.41)$$

を要請すると

$$f(\omega) = -\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \quad (p^0 = \omega) \quad (6.42)$$

である。以上から、 $\Delta^{(+)}(x)$ は、(6.39)を用いて、(6.42)の $f(p^0)$ を代入して

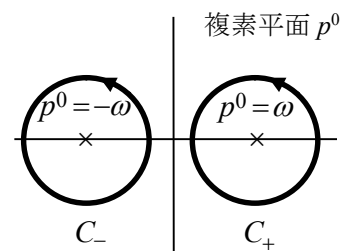
$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(p^0)}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{p^2 - m^2 c^2} \left[-\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right] d^4 p \\ &= -\frac{\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \oint_C \frac{1}{p^2 - m^2 c^2} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) d^4 p \end{aligned} \quad (6.43)$$

を得る。同様にして、 $p^0 = -\omega$ として留数定理を用い、(6.43)とエラー! 参照元が見つかりません。

を $\Delta^{(-)}(x)$ に適用すれば、 $\Delta^{(-)}(x)$ の複素積分表記を求めることができる (問題 8)。以上から、

閉曲線を C_\pm とすれば、

$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(x) &= -\frac{\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \oint_{C_+} \frac{e^{-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p \quad (\text{automatically giving } p_0 > 0) \\ \Delta^{(-)}(x) &= -\frac{\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \oint_{C_-} \frac{e^{-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p \quad (\text{automatically giving } p_0 < 0) \end{aligned}$$

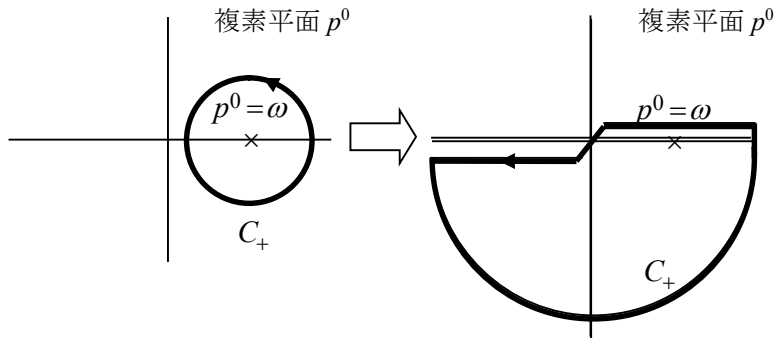


を得る。

この $\Delta^{(\pm)}(x)$ を用いて、

$$\frac{1}{2}\Delta_F(x) = \begin{cases} +i\Delta^{(+)}(x) & \text{for } x_0 > 0 \\ -i\Delta^{(-)}(x) & \text{for } x_0 < 0 \end{cases} \quad (6.44)$$

が作られる。これも同様に、複素積分で表されるが、 x_0 の条件を満たすような閉曲線を取る必要がある。そのため、半径無限の半円を用いて設定する。まず $\Delta^{(+)}(x)$ については、 $x_0 > 0$ の条件に注意しながら実行する必要がある。そこで、



のように変形する (問題 9-A)。このとき、下部の半円の部分に着目すると、半円上の点は

$$p^0 = Re^{i(\theta+\pi)} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \text{ with } R \rightarrow \infty \quad (6.45)$$

で表される。また、関数積分の性質

$$\left| \int f(z) dz \right| \leq \int |f(z)| |dz| \quad (6.46)$$

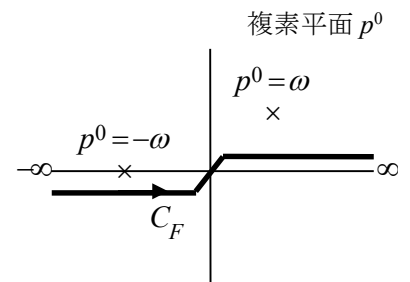
に注意して

$$\left| \Delta^{(+)}(x) \right|_{\text{for 下部の半円}} = \left| -\frac{\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{p^0 = Re^{i(\theta+\pi)}} \frac{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2} dp^0 dp \right| \leq \frac{\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int \left| \frac{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2} \right| dp^0 dp \right)_{p^0 = Re^{i(\theta+\pi)}} \quad (6.47)$$

なので、 $p^0 = Re^{i(\theta+\pi)} = -R \cos \theta - i \sin \theta$ において $\sin \theta > 0$ に注意し、 $x_0 > 0$ なので

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int \left| \frac{e^{-\frac{i(Re^{i(\theta+\pi)}x_0 - px)}}{\hbar}}{(Re^{i(\theta+\pi)})^2 - p^2 - m^2 c^2} \right| d(p^0 = Re^{i(\theta+\pi)}) = 0 \quad (6.48)$$

を導くことができる (問題 9-B)。従って、 C_+ から下部の半円部をのぞいた閉曲線を C_F ($-\infty$ から ∞ になるように方向を反転) とすると



$$\Delta^{(+)}(x) = -\frac{\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \oint_{C_F} \frac{e^{-\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p$$

$$= -\frac{\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \left(\oint_{\text{下部の半円}} \overset{\text{方向を反転したので...}}{-} \int_{C_F} \right) \frac{e^{\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p = \frac{\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \int_{C_F} \frac{e^{\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p \quad (6.49)$$

と表記できることになる。同様にして、 $x_0 < 0$ に注意して積分経路 C_F を用いて

$$\Delta^{(-)}(x) = -\frac{\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \int_{C_F} \frac{e^{\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p \quad (6.50)$$

を導くことができる (問題 10)。以上から、 $x_0 > 0$ や $x_0 < 0$ に依らずに

$$\Delta_F(x) = \begin{cases} +i\Delta^{(+)}(x) & \text{for } x_0 > 0 \\ -i\Delta^{(-)}(x) & \text{for } x_0 < 0 \end{cases} = \frac{2i\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \int_{C_F} \frac{e^{\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p \quad (6.51)$$

とまとまることがわかる。ここで、

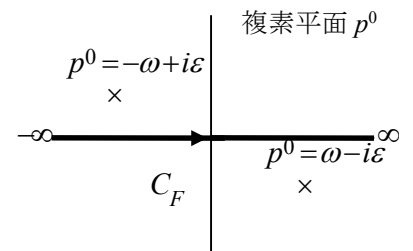
- 積分範囲を実軸上

に設定するために、 $p^0 = \pm\omega$ の点を適宜上下に動かし

$$p^0 = -\omega + i\varepsilon, \omega - i\varepsilon \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (6.52)$$

とする。そのとき、右図のように積分路は実軸上にでき

$$\Delta_F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2i\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{e^{\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} d^4 p \quad (6.53)$$



と表すことができる (問題 11)。 $\Delta_F(x)$ は

$$\left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \Delta_F(x) = -2i\hbar c \delta^{(4)}(x) \quad (6.54)$$

を満たすことがわかる (問題 12)。通常、lim 記号は省略する。従って、(6.32)より

$$\langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle = \frac{i\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{e^{\frac{ip(x-y)}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} d^4 p \quad (6.55)$$

と評価できた。同様に

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)) | 0 \rangle &= \left(i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar} \right)_{\alpha\beta} \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle = \frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{(\not{p} + mc)_{\alpha\beta} e^{\frac{ip(x-y)}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} d^4 p \\ \langle 0 | T(A_\mu(x)A_\nu(y)) | 0 \rangle &= -g_{\mu\nu} \mu_0 \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle \Big|_{m=0} = \frac{i\hbar^3 c \mu_0}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{-g_{\mu\nu} e^{\frac{ip(x-y)}{\hbar}}}{p^2 + i\varepsilon} d^4 p \end{aligned} \quad (6.56)$$

を得る。ここで、4 元ベクトル p の代わりに、 $p/\hbar (= k)$ で記述すれば

$$\left\{ \begin{aligned}
 \langle 0|T(\phi(x)\phi(y))|0\rangle &= \frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + i\varepsilon} d^4k \\
 \langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))|0\rangle &= \frac{i\hbar c}{(2\pi)^4} \int \frac{(\not{k} + mc)_{\alpha\beta} e^{-ik(x-y)}}{k^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + i\varepsilon} d^4k \\
 \langle 0|T(A_\mu(x)A_\nu(y))|0\rangle &= \frac{i\hbar c\mu_0}{(2\pi)^4} \int \frac{-g_{\mu\nu} e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i\varepsilon} d^4k
 \end{aligned} \right. \quad (6.57)$$

とまとめることができ、どの伝搬関数も、 $\hbar c$ に比例することが分かる。

第 6 章問題

1) A) (6.1)を用いて $i\hbar\partial_t^2\phi_{in}(x) = \partial_t [i\hbar\partial_t\phi_{in}(x)] = \partial_t ([\phi_{in}(x), H_{0in}(0)])$ と $H_{0in}(t)$ として(2.71)式の:

$$H_{in}(t) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} : \frac{\partial\phi_{in}(x)}{\partial x^0} \frac{\partial\phi_{in}(x)}{\partial x^0} + (\nabla\phi_{in}(x))(\nabla\phi_{in}(x)) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi_{in}(x)\phi_{in}(x) :$$

と

$$\left[\phi_{in}(x), \frac{\partial\phi_{in}(x')}{\partial x^0} \right] \Big|_{x^0=x'^0=ct} = \left[\phi_{in}(x'), \frac{\partial\phi_{in}(x)}{\partial x^0} \right] \Big|_{x^0=x'^0=ct} = i\hbar c \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

を用いることで、

$$\left(-\square - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \right) \phi_{in}(x) = 0$$

を導け。

B) (3.86)の $H_{0in}(t) = \int d\mathbf{x} : \overline{\psi_{in}(x)} \left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi_{in}(x) :$ と $\{\psi_\alpha(x'), \psi_\beta^\dagger(x)\} \Big|_{x^0=x'^0} = \hbar c \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{\alpha\beta}$

を用いて、 $\left(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi_{in}(x) = 0$ を導け。

2) A) (6.8)を導け。

B) (6.10)を導け。

3) A) (6.11)の $\psi_\alpha^{(\pm)}(x), \overline{\psi_\beta^{(\pm)}}(x)$ を生成・消滅演算子で表せ。

B) (6.11)を導け。

4) (6.17)を導け。

5) A) (6.24)を導け。

B) (6.28)を導け。

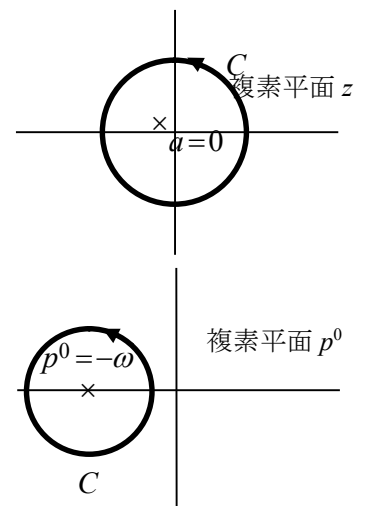
6) (6.31)に習って、 $T\left(N\left(\overline{\psi_\alpha}(x_1)\phi(x_1)\psi_\beta(x_1)\right)N\left(\overline{\psi_\rho}(x_2)\phi(x_2)\psi_\sigma(x_2)\right)\right)$ を求め、各項に対応する
 ファイマン図を表せ。

7) 閉曲線を図のように半径 r の円にとったときに

$$\oint_C \frac{1}{z} dz$$

を求めよ。ここに、半径 r の円の円周上の点は、 $z = re^{i\theta}$ であらわせることに注意するとよい。また反時計回りとは θ が増加する方向である。求めた答えが、コーシーの積分公式から与えられる結果と一致するか？

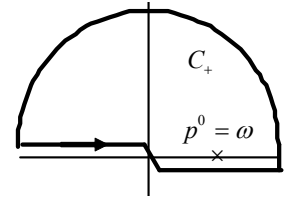
8) 右図のように、閉曲線を $p^0 = -\omega$ を含むようにするとき



$$\Delta^{(-)}(x) = -\frac{\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \oint_C \frac{e^{\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2} d^4 p$$

で与えられることを示せ。

9) A) (6.48)を導くに際して、図のような上側の半円を用いるときに現れる不都合な点を述べよ。



B) (6.48)を導け。

1 0) (6.50)を導け。閉曲線上を回る方向にも注意すること。

1 1) (6.53)から、分母を 0 にするのは、(6.52)になることを示せ。ただし、正確には

$$\begin{cases} p^0 = -\omega + i\frac{\varepsilon}{2\omega} \\ p^0 = \omega - i\frac{\varepsilon}{2\omega} \end{cases} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

になる。つまり

$$\Delta_F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2i\hbar^3 c}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{e^{\frac{ipx}{\hbar}}}{p^2 - m^2 c^2 - i\varepsilon} d^4 p$$

にはならないことに注意せよ。

1 2) (6.54)を用いて

$$\left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi(x) = J(x)$$

の解を求めよ。ただし、 $\left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi_m(x) = 0$ の解 $\phi_m(x)$ は分かっているものとする。