

第五章 相互作用表示

相互作用

量子場として

- 質量 μ の荷電ボーズ量子場 (スカラー) : $\phi(x)$

$$\mathcal{L}(x) = |\partial_\mu \phi(x)|^2 - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2 |\phi(x)|^2 \quad (5.1)$$

- 質量 m のフェルミ量子場 (スピノール) : $\psi_\alpha(x)$ ($\alpha=1,2,3,4$)

$$\mathcal{L}(x) = \overline{\psi}(x) \left(i \not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) \quad (\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\gamma} \nabla) \quad (5.2)$$

- 質量 0 の電磁量子場 (ベクター) : $A^\mu(x)$ ($\mu=0,1,2,3$)

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)) \quad (5.3)$$

を議論してきた。これから、電磁場とスカラーとスピノールの相互作用が、ゲージ変換に対して不変なように導入される。その結果、

$$\mathcal{L}(x) = |D^\mu \phi(x)|^2 - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2 |\phi(x)|^2 + i \overline{\psi}(x) \not{D} \psi(x) - \frac{mc}{\hbar} \overline{\psi}(x) \psi(x) - \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (5.4)$$

を得る。ここに、【第四章 電磁量子場：ベクトル場】の(4.158)を参考にして

$$D^\mu = \partial^\mu + i \frac{e}{\hbar} Q_{em} A^\mu \quad (Q_{em} = -1 \dots \text{電子、等}) \quad (5.5)$$

である。対応するハミルトニアン $\mathcal{H}(x)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) = & \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^0} \right)} \frac{\partial \phi}{\partial x^0} + \frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x^0} \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial \phi^\dagger}{\partial x^0} \right)} + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^0} \right)} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^0} + \frac{\partial \overline{\psi}_\alpha}{\partial x^0} \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial \overline{\psi}_\alpha}{\partial x^0} \right)} \\ & + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^0} \right)} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^0} - \mathcal{L}(x) \end{aligned} \quad (5.6)$$

から計算され、 $\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}_0(x) + \mathcal{H}_{\text{int}}(x)$ とするとき、Normal product の記号: : を復活して

$$\mathcal{H}_0(x) =: \left| \frac{\partial \phi}{\partial x^0} \right|^2 + |\nabla \phi|^2 + \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2 |\phi|^2 + i \overline{\psi} \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial x^0} - i \overline{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{mc}{\hbar} \overline{\psi} \psi + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - (\partial^0 A_\mu - \partial_\mu A^0) \frac{\partial A^\mu}{\partial x^0} :$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}}(x) =: -i \frac{eq_\phi}{\hbar} \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi A^0 - \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi A^\mu \right) - \left(\frac{eq_\phi}{\hbar} \right)^2 |\phi|^2 A^\mu A_\mu + \frac{eq_\psi}{\hbar} \bar{\psi} A \psi : \quad (5.7)$$

になる (問題 1)。ここに

$$\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi = \phi^\dagger (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi \quad (5.8)$$

である。\$\mathcal{H}_{\text{int}}(x)\$ は \$e \to 0\$ で消える項であり、

- 相互作用ハミルトニアン (密度)

と呼ばれる。

状態

ハミルトニアン密度から作られる

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \begin{cases} H_0 = \int dx \mathcal{H}_0(x) \\ H_{\text{int}} = \int dx \mathcal{H}_{\text{int}}(x) \end{cases} \quad (5.9)$$

が、系の時間発展を記述する。この系を \$|\Phi(t)\rangle\$ とするとシュレディンガー方程式:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi(t)\rangle = H |\Phi(t)\rangle = (H_0 + H_{\text{int}}) |\Phi(t)\rangle \quad (5.10)$$

に従って時間発展する。ここで、相互作用の影響を強調するために、

$$|\Phi_D(t)\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) |\Phi(t)\rangle \quad (5.11)$$

を考える。これを **ディラック表示** と呼ぶ。この状態の時間発展は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi_D(t)\rangle = H_D |\Phi_D(t)\rangle \quad \text{with } H_D = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) H_{\text{int}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) \quad (5.12)$$

で与えられることがわかる (問題 2)。\$|\Phi_D(t)\rangle\$ の時間発展を記述するユニタリー演算子を

\$U_D(t_2, t_1)\$ とするとき

$$|\Phi_D(t)\rangle = U_D(t, t_0) |\Phi_D(t_0)\rangle \quad (5.13)$$

を与える。これより

$$U_D(t_1, t_0) = U_D(t_1, t) U_D(t, t_0) \quad (5.14)$$

を満たすことがわかる (問題 3)。この \$U(t, t_0)\$ は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_D(t, t_0) = H_D U_D(t, t_0) \quad (5.15)$$

を満たす。この解は、

$$\boxed{U_D(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_D(t') U_D(t', t_0)} \quad (5.16)$$

になる。S 行列は

$$\boxed{S = U_D(\infty, -\infty)} \quad (5.17)$$

で定義される。

さて、ディラック表示での演算子を $O_D(t)$ とすると、その時間依存性は

$$\langle \Phi_D(t) | O_D(t) | \Phi_D(t) \rangle = \langle \Phi(t) | O(t) | \Phi(t) \rangle \quad (5.18)$$

で定義される。従って、

$$i\hbar \frac{\partial O_D(t)}{\partial t} = [O_D(t), H_0] + \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) \left(i\hbar \frac{\partial O(t)}{\partial t} \right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) \quad (5.19)$$

を得る (問題 4)。特に、 $O(t)$ が時間に依存しない (シュレディンガー表示では、一般的には演算子は時間に陽に依存しない) ときには、

$$i\hbar \frac{\partial O_D(t)}{\partial t} = [O_D(t), H_0] \quad (5.20)$$

になり、

- $O_D(t)$ の時間発展は相互作用のないハミルトニアンによって記述されることがわかる。

ディラック表示での状態を出発点とする。この状態を用いて

- $t \rightarrow -\infty$ の状態を、相互作用の無い系の $|\varphi_a\rangle$ (自由場) : $H_0 |\varphi_a\rangle = E_a |\varphi_a\rangle$
- $t \rightarrow +\infty$ の状態を、相互作用の無い系の $|\varphi_b\rangle$ (自由場) : $H_0 |\varphi_b\rangle = E_b |\varphi_b\rangle$

とすると、(5.13)を用いて $|\varphi_a\rangle$ からの時間発展によってたどり着く $t \rightarrow +\infty$ の状態は

$$|\varphi'_a\rangle = U_D(\infty, -\infty) |\varphi_a\rangle \quad (5.21)$$

で与えられる。従って、指定した終状態を $|\varphi_b\rangle$ とすると、 $|\varphi_b\rangle$ への散乱振幅は

$$\langle \varphi_b | \varphi'_a \rangle = \langle \varphi_b | U_D(\infty, -\infty) | \varphi_a \rangle \quad (5.22)$$

になる。ここで

- ディラック表示の $U_D(\infty, -\infty)$ を S 行列

と呼び、(5.22)は S 行列の要素：

$$S_{ab} = \langle \varphi_b | U_D(\infty, -\infty) | \varphi_a \rangle \quad (5.23)$$

と定義される。また、時間間隔を $-\infty \sim 0$ と $0 \sim \infty$ に分けて

$$|\psi_a^+\rangle = U_D(0, -\infty) |\varphi_a\rangle, \quad \langle \psi_a^-| = \langle \varphi_a | U_D(\infty, 0) \quad (5.24)$$

を導入すると、

$$S_{ab} = \langle \varphi_b | U_D(\infty, -\infty) | \varphi_a \rangle = \langle \psi_b^- | \psi_a^+ \rangle \quad (5.25)$$

と定義される (問題 5-A)。ここに、

- $|\psi_a^\pm\rangle$ は H の固有値 E_a^\pm をもつ固有状態

である。また、 $|\varphi_a\rangle$ の完全直交性を用いると (問題 5-B)、(5.24)より・・・

$$U_D(0, -\infty) = \sum_a |\psi_a^+\rangle \langle \varphi_a|, \quad U_D(0, \infty) = \sum_a |\psi_a^-\rangle \langle \varphi_a| \quad (5.26)$$

従って、

$$HU_D(0, -\infty) = \sum_a E_a^+ |\psi_a^+\rangle \langle \varphi_a|, \quad U_D(0, -\infty)H_0 = \sum_a E_a |\psi_a^+\rangle \langle \varphi_a| \quad (5.27)$$

なので (問題 5-C)、 $E_a^+ = E_a$ の条件のもとで $HU_D(0, -\infty) = U_D(0, -\infty)H_0$ を得る。 $U(0, \infty)$ も同様に

$$\boxed{HU_D(0, \pm\infty) = U_D(0, \pm\infty)H_0} \quad (5.28)$$

を得る。実際、 $E_a^+ = E_a$ が成立する (エネルギー保存則) とき

$$|\psi_a^\pm\rangle = |\varphi_a\rangle + \frac{H_{\text{int}}}{E_a - H_0} |\psi_a^\pm\rangle \quad (H = H_0 + H_{\text{int}}) \quad (5.29)$$

と表されることがわかる (問題 4-D)。正確には、

$$|\psi_a^\pm\rangle = |\varphi_a\rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\varepsilon} H_{\text{int}} |\psi_a^\pm\rangle \quad (5.30)$$

である ((5.52)参照)。

演算子と S 行列

場を表すのは演算子であるので、演算子の相互作用表示を考察する。 S 行列の要素は、(5.25)の

$S_{ab} = \langle \varphi_b | U_D(\infty, -\infty) | \varphi_a \rangle = \langle \psi_b^- | \psi_a^+ \rangle$ で与えられる。ところで、 $|\psi_a^\pm\rangle$ と $|\varphi_a\rangle$ は(5.24)で結びつくので、

$|\psi_a^\pm\rangle$ 、及び、対応する演算子 O^\pm を考察する。そこで、(5.18)と同様にして

$$\langle\psi_b^\pm|O^\pm|\psi_a^\pm\rangle=\langle\varphi_b|O|\varphi_b\rangle \quad (5.31)$$

をもとにして考えてみる。以降、 $\langle\psi_b^+|O^+|\psi_a^+\rangle$ について考察する。これから

$$\langle\psi_b^+|O^+|\psi_a^+\rangle=\langle\varphi_b|U_D^\dagger(0,-\infty)O^+U_D(0,-\infty)|\varphi_a\rangle \quad (5.32)$$

と比較して、

$$O^+=U_D^{\dagger-1}(0,-\infty)OU_D^{-1}(0,-\infty) \quad (5.33)$$

を得る。ここで、

$$\sum_a|\psi_a^+\rangle\langle\psi_a^+|=I \quad (5.34)$$

であると

$$U_D^\dagger(0,-\infty)=U_D^{-1}(0,-\infty) \quad (5.35)$$

なので (問題 6)、

$$O^+=U_D(0,-\infty)OU_D^{-1}(0,-\infty) \quad (5.36)$$

を得る。以降、便宜上、 $U_D(0,\pm\infty)$ を

$$\Omega^{(\pm)}=U_D(0,\mp\infty)\begin{cases} (+): \text{時間が } -\infty \text{ から } + \text{ 方向に経過} \\ (-): \text{時間が } +\infty \text{ から } - \text{ 方向に経過} \end{cases} \quad (5.37)$$

と表す。その性質をまとめておくと

$$\Omega^{(\pm)}|\varphi_a\rangle=|\psi_a^\pm\rangle \quad (5.38)$$

$$\Omega^{(\pm)}H_0=H\Omega^{(\pm)} \quad (5.39)$$

である。以降は $\Omega^{(+)}$ のみで議論を進める。演算子 O への相互作用の効果はハイゼンベルグ表示:

$$O(t)=e^{\frac{i}{\hbar}Ht}Oe^{-\frac{i}{\hbar}Ht}=e^{\frac{i}{\hbar}Ht}O(0)e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad (5.40)$$

で取り込むことができる (問題 7-A) ので、

- (5.37)のハイゼンベルグ表示版を考えることになる。

相互作用表示に対応する演算子は

- in 演算子 $\cdots O^+$ に対応
- out 演算子 $\cdots O^-$ に対応

と呼ばれ、量子場に適用した際に

● 自由場の運動方程式

を満たす事が分かる。まず、 $\Omega^{(+)}$ のハイゼンベルグ表示、

$$\Omega^{(+)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \Omega^{(+)} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} U_D(0, -\infty) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad (5.41)$$

を用いる。この演算子の時間発展は、(5.39)を考慮して

$$i\hbar\partial_t\Omega^{(+)}(t) = \Omega^{(+)}(t)H_I(t) \Leftarrow H_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} H_{\text{int}} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad (H = H_0 + H_{\text{int}}) \quad (5.42)$$

で表せる (問題 7-B)。in 演算子 $O_{in}(t)$ は、この $\Omega^{(+)}(t)$ を用いて定義され、

$$O_{in}(t) = \Omega^{(+)}(t) O(t) \Omega^{(+)-1}(t) \quad (5.43)$$

で与えられる。ここに、 $t=0$ のとき、 $\Omega^{(+)}(0) = U_D(0, -\infty)$ になり、(5.36) :

$$O^+ = U_D(0, -\infty) O U_D^{-1}(0, -\infty) \quad (5.44)$$

を再現する。つまり、

$$O_{in}(0) = O^+ \quad (5.45)$$

が分かる。また、(5.43)に(5.41)を代入し整理すると

$$O_{in}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} O_{in}(0) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad (5.46)$$

という関係を満たす (問題 8-A)。これより、

$$\boxed{i\hbar\partial_t O_{in}(t) = [O_{in}(t), H]} \quad (5.47)$$

を得る。一方、(5.43)を微分し(5.38)を用いると

$$\boxed{i\hbar\partial_t O_{in}(t) = [O_{in}(t), H_{0in}(t)]} \quad (5.48)$$

が得られる (問題 8-B)。また

$$\boxed{H_{0in}(t) = H (= H_{0in}(0))} \quad (5.49)$$

が成り立つこともわかる (問題 8-C)。つまり、(5.49)は場の言葉で焼き直すと

$$\begin{aligned} H_0 &= \int \mathcal{H}_0(x) dx = \int \mathcal{H}_0(\varphi(x)) dx \\ H &= \int \mathcal{H}(x) dx = \int \mathcal{H}(\varphi(x)) dx \end{aligned} \quad (5.50)$$

に注意すれば

$$H_{0in} = \int \mathcal{H}_0(\varphi_{in}(x)) dx$$

なので $H_{0in}(t) = H (= H_{0in}(0))$ より

相互作用を含んだ 全ハミルトニアン	相互作用を含まない 自由粒子のハミルトニアン	$\mathcal{H}(\varphi(x)) = \mathcal{H}_0(\varphi_{in}(x)) \quad (\varphi = \phi, \psi, A)$	(5.51)
----------------------	---------------------------	--	--------

が成立することを示している (問題 8-D)。この場合、

- 相互作用の効果は、in 演算子の時間発展に取り込まれていることになる。

S 行列の要素

S 行列は、 $S_{ab} = \langle \varphi_b | U(\infty, -\infty) | \varphi_a \rangle = \langle \psi_b^- | \psi_a^+ \rangle$ で表されていた。 $|\psi_a^+\rangle$ について(5.29)の厳密形

$$|\psi_a^+\rangle = |\varphi_a\rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} |\psi_a^+\rangle \quad (5.52)$$

を導出する。(5.24)の $|\psi_a^+\rangle = U(0, -\infty) |\varphi_a\rangle$ を拡張して、

$$|\psi_a^+(t)\rangle = U(t, -\infty) |\varphi_a\rangle \quad (5.53)$$

を定義する。そのとき、 $|\psi_a^+(t)\rangle$ は、(5.15)より

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_a^+(t)\rangle = H_D(t) |\psi_a^+(t)\rangle \quad (5.54)$$

を満たす。この方程式の解は積分定数が、積分値に $t = t_0 (= -\infty)$ と置いた項に当たるので

$|\psi_a^+(-\infty)\rangle = |\varphi_a\rangle$ を用いて、

$$|\psi_a^+(t)\rangle = |\varphi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' H_D(t') |\psi_a^+(t')\rangle \quad (5.55)$$

を得る (問題 15)。ここで、

- 時間が $t = \pm\infty$ のときに相互作用が無くなる

条件を、 $e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t|}$ を用いて

$$|\psi_\varepsilon^+(t)\rangle = |\varphi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t'|} H_D(t') |\psi_\varepsilon^+(t')\rangle \quad (5.56)$$

のようにして導入する。ただし、計算完了後に

- $\varepsilon (> 0) \rightarrow 0$ (プラス側からゼロにする: $\varepsilon \rightarrow 0+$ と記す場合もある)

にとらないといけない。

さて、

$$|\psi_a^+(0)\rangle = U_D(0, -\infty) |\varphi_a\rangle = |\psi_a^+\rangle \quad (5.57)$$

であるので

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\psi_\varepsilon^+(0)\rangle = |\psi_a^+(0)\rangle = |\psi_a^+\rangle \quad (5.58)$$

に注意して(5.56)より

$$|\psi_\varepsilon^+(0)\rangle = |\varphi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dt' e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t'|} H_D(t') |\psi_\varepsilon^+(t')\rangle \quad (5.59)$$

なので、(5.12)の

$$H_D = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) H_{\text{int}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) \quad (5.60)$$

を用いて、(5.56)を(5.59)の $|\psi_\varepsilon^+(t')\rangle$ を代入して・・・

$$\begin{aligned} |\psi_\varepsilon^+(0)\rangle &= |\varphi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \left(|\varphi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) |\psi_\varepsilon^+(t_2)\rangle \right) \\ &= |\varphi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t_1\right) H_{\text{int}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t_1\right) |\varphi_a\rangle \\ &\quad + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) |\psi_\varepsilon^+(t_2)\rangle \quad (H_0 |\varphi_a\rangle = E_a |\varphi_a\rangle) \\ &= |\varphi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{\frac{1}{\hbar}\varepsilon t_1} \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t_1\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_a t_1\right) H_{\text{int}} |\varphi_a\rangle \quad (|t_1| = -t_1 \text{ for } -\infty < t_1 < 0) \\ &\quad + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) |\psi_\varepsilon^+(t_2)\rangle \\ &= |\varphi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dt_1 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(E_a - H_0 + i\varepsilon)t_1\right) H_{\text{int}} |\varphi_a\rangle \\ &\quad + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) |\psi_\varepsilon^+(t_2)\rangle \\ &= |\varphi_a\rangle - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{-\frac{i}{\hbar}(E_a - H_0 + i\varepsilon)} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(E_a - H_0 + i\varepsilon)t_1\right) \Big|_{-\infty}^0 H_{\text{int}} |\varphi_a\rangle \\ &\quad + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) |\psi_\varepsilon^+(t_2)\rangle \quad (5.61) \\ &= |\varphi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} |\varphi_a\rangle + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) |\psi_\varepsilon^+(t_2)\rangle \end{aligned}$$

つまり、

$$|\psi_\varepsilon^+(0)\rangle = |\varphi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} |\varphi_a\rangle + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) |\psi_\varepsilon^+(t_2)\rangle \quad (5.62)$$

同様にして、(5.56)を(5.62)に $|\psi_\varepsilon^+(t')\rangle$ を代入して・・・

$$\begin{aligned} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) |\psi_\varepsilon^+(t_2)\rangle &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) |\varphi_a\rangle \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_3|} H_D(t_3) |\psi_\varepsilon^+(t_3)\rangle \end{aligned} \quad (5.63)$$

である。(5.63)の右辺第1項は、

$$\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) |\varphi_a\rangle = \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} |\varphi_a\rangle \quad (5.64)$$

がわかる (問題 16)。以上から、

$$\begin{aligned} |\psi_\varepsilon^+(0)\rangle &= |\varphi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} |\varphi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} |\varphi_a\rangle \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^3 \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_1|} H_D(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_2|} H_D(t_2) \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon|t_3|} H_D(t_3) |\psi_\varepsilon^+(t_3)\rangle \end{aligned} \quad (5.65)$$

を得る。この作業を、無限回続け、最終的に

$$|\psi_\varepsilon^+(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} \right)^n |\varphi_a\rangle \quad (5.66)$$

を導くことができる。一方、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} \right)^n &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} \right)^n \\ &= 1 + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} \right)^n \end{aligned} \quad (5.67)$$

に注意して、

$$\begin{aligned} |\psi_\varepsilon^+(0)\rangle &= \left(1 + \left(\frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} \right)^n \right) |\varphi_a\rangle \\ &= |\varphi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} |\psi_\varepsilon^+(0)\rangle \end{aligned} \quad (5.68)$$

ここで、(5.58)なので

$$|\psi_a^+\rangle = |\varphi_a\rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} |\psi_a^+\rangle \quad (5.69)$$

がわかる。同様にして

$$|\psi_a^-\rangle = |\varphi_a\rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E_a - H_0 - i\varepsilon} H_{\text{int}} |\psi_a^-\rangle \quad (5.70)$$

を得る (問題 17)。

この表式を利用すると、(5.23)より

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \langle \varphi_b | U_D(\infty, -\infty) | \varphi_a \rangle = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \langle \varphi_b | U_D(t_2, 0) U_D(0, t_1) | \varphi_a \rangle \\ &= \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \langle \varphi_b | U_D(t_2, 0) | \psi_a^+ \rangle \end{aligned} \quad (5.71)$$

である (問題 18-A))。ここで、(5.11)より、(5.10)の解を用いて(5.13)を出してみると

$$|\Phi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)\right) |\Phi(t_0)\rangle \quad (5.72)$$

に注意して

$$\begin{aligned} |\Phi_D(t)\rangle &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)\right) |\Phi(t_0)\rangle \\ &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t_0\right) |\Phi_D(t_0)\rangle \end{aligned} \quad (5.73)$$

を得る。(5.13)より $|\Phi_D(t)\rangle = U_D(t, t_0) |\Phi_D(t_0)\rangle$ なので、

$$U_D(t, t_0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t_0\right) \quad (5.74)$$

を得る。従って、より

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \langle \varphi_b | U_D(t_2, 0) | \psi_a^+ \rangle \\ &= \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \langle \varphi_b | \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t_2\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t_2\right) | \psi_a^+ \rangle \left(\langle \varphi_b | H_0 = \langle \varphi_b | E_b, H | \psi_a^+ \rangle = E_a | \psi_a^+ \rangle \right) \\ &= \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \langle \varphi_b | \exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_b - E_a) t_2\right) | \psi_a^+ \rangle = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_b - E_a) t_2\right) \langle \varphi_b | \psi_a^+ \rangle \end{aligned} \quad (5.75)$$

(5.69)を用いて、

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_b - E_a) t_2\right) \langle \varphi_b | \psi_a^+ \rangle \\ &= \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_b - E_a) t_2\right) \langle \varphi_b | \left(|\varphi_a\rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} | \psi_a^+ \rangle \right) \left(\langle \varphi_b | H_0 = \langle \varphi_b | E_b \right) \\ &= \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_b - E_a) t_2\right) \left(\langle \varphi_b | \varphi_a \rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \varphi_b | \frac{1}{E_a - E_b + i\varepsilon} H_{\text{int}} | \psi_a^+ \rangle \right) \\ &= \langle \varphi_b | \varphi_a \rangle - \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \varphi_b | \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar} (E_b - E_a) t_2\right)}{E_b - E_a - i\varepsilon} H_{\text{int}} | \psi_a^+ \rangle \end{aligned} \quad (5.76)$$

を得る。ここで、(5.127)を用いて、

$$\lim_{t_2 \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t_2\right)}{E_b - E_a - i\varepsilon} = 2\pi i \delta(E_b - E_a) \quad (5.77)$$

を用い、最終的に、S 行列の要素が

$$S_{ab} = \langle \varphi_b | \varphi_a \rangle - 2\pi i \delta(E_b - E_a) \langle \varphi_b | H_{\text{int}} | \psi_a^+ \rangle \quad (5.78)$$

とわかる (問題 18-B))。ここに、

- $\delta(E_b - E_a)$ によりエネルギー保存則が自動的に保証される

ことに注意する。

S 行列と相互作用

S 行列は、(5.25)より

$$S = U_D(\infty, -\infty) \quad (5.79)$$

で表される。ここで、in 演算子を用いて記述するために、 $\Omega^{(+)}(t)$ を考えると(5.42)で決められ

るので、(5.43)の $H_I(t)$ を用いて in 演算子で表した $H_{\text{in}}(t)$ を用いて

$$i\hbar \partial_t \Omega^{(+)}(t) = H_{\text{in}}(t) \Omega^{(+)}(t) \Leftarrow \Omega^{(+)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} \Omega^{(+)} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \quad (\Omega^{(+)} = U_D(0, -\infty)) \quad (5.80)$$

を得る (問題 9)。従って、 $\Omega^{(+)}(t)$ は、in 演算子を用いた $H_{\text{in}}(t)$ で表され、 S_{ab} として

$$S_{ab} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_b^+ | \Omega^{(+)}(t) | \psi_a^+ \rangle \quad (5.81)$$

を導くことができる。その結果

- S_{ab} を in 演算子を用いて記述

できる。このことを導くために、S 行列と $\Omega^{(+)}(t)$ との関連を調べる。まず、

$$\langle \psi_b^+ | \Omega^{(+)}(t) | \psi_a^+ \rangle \quad (5.82)$$

の要素を評価すると

$$\begin{aligned} \langle \psi_b^+ | \Omega^{(+)}(t) | \psi_a^+ \rangle &= \langle \psi_b^+ | e^{\frac{i}{\hbar} H t} \Omega^{(+)} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | \psi_a^+ \rangle = \langle \psi_b^+ | \Omega^{(+)} | \psi_a^+ \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t} \langle \varphi_b | \psi_a^+ \rangle \end{aligned} \quad (5.83)$$

を得る (問題 10)。(5.69)を用いて

$$\begin{aligned}
\langle \psi_b^+ | \Omega^{(+)}(t) | \psi_a^+ \rangle &= e^{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t} \langle \varphi_b | \psi_a^+ \rangle = e^{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t} \langle \varphi_b | \left(| \varphi_a \rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E_a - H_0 + i\varepsilon} H_{\text{int}} | \psi_a^+ \rangle \right) \\
&= \langle \varphi_b |_{H_0 = \langle \varphi_b | E_b} e^{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t} \left(\langle \varphi_b | \varphi_a \rangle + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle \varphi_b | \frac{H_{\text{int}}}{E_a - E_b + i\varepsilon} | \psi_a^+ \rangle \right) \\
&= \langle \varphi_b | \varphi_a \rangle + e^{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\langle \varphi_b | H_{\text{int}} | \psi_a^+ \rangle}{E_a - E_b + i\varepsilon}
\end{aligned} \tag{5.84}$$

である。ここで、 $\langle \varphi_b | \varphi_a \rangle$ より $E_a = E_b$ を用いた。また、(5.127)より

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_b^+ | \Omega^{(+)}(t) | \psi_a^+ \rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t} \langle \varphi_b | \psi_a^+ \rangle \\
&= \langle \varphi_b | \varphi_a \rangle + \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t}}{E_a - E_b + i\varepsilon} \langle \varphi_b | H_{\text{int}} | \psi_a^+ \rangle \quad (E_a \text{ と } E_b \text{ の順序に注意}) \\
&= \langle \varphi_b | \varphi_a \rangle - 2\pi i \delta(E_b - E_a) \langle \varphi_b | H_{\text{int}} | \psi_a^+ \rangle
\end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \psi_b^+ | \Omega^{(+)}(t) | \psi_a^+ \rangle = \langle \varphi_b | \varphi_a \rangle + \lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t}}{E_a - E_b + i\varepsilon} \langle \varphi_b | H_{\text{int}} | \psi_a^+ \rangle = \langle \varphi_b | \varphi_a \rangle$$

を得る ($\lim_{t \rightarrow \infty} e^{i(E_b - E_a)t} \langle \varphi_b | \psi_a^+ \rangle$ 以降の計算は(5.76)と同じである) (5.78)と比較して

$$S_{ab} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_b^+ | \Omega^{(+)}(t) | \psi_a^+ \rangle \Leftarrow \Omega^{(+)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t} \Omega^{(+)} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} \quad (\Omega^{(+)} = U_D(0, -\infty)) \tag{5.86}$$

を得る (問題 1 1)。つまり、

$$\boxed{S = \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega^{(+)}(t)} \tag{5.87}$$

である。(5.49)に注意すると、(5.86)における $|\psi_{a,b}^+\rangle$ は H の固有状態であるが、同時に

- $|\psi_{a,b}^+(t)\rangle$ は $H_{0in}(0)$ の固有状態である

ことがわかる。結局

- $S_{ab} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_b^+ | \Omega^{(+)}(t) | \psi_a^+ \rangle$ において、 $|\psi_{a,b}^+\rangle$ も $\Omega^{(+)}(t)$ も in-自由場の量で決定される

ことがわかる。一方、

- $S_{ab} = \langle \varphi_b | U_D(\infty, -\infty) | \varphi_a \rangle$ は、 $U_D(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_D(t') U_D(t', t_0)$ であり、 H_D には、

$$H_D = \exp\left(\frac{i}{\hbar} H_0 t\right) H_{\text{int}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right)$$

のように相互作用 H_{int} を含むので、 $U_D(\infty, -\infty)$ は、自

由場では記述できないことになる。

さて、 $\Omega^{(+)}(t)$ は(5.80)の

$$i\partial_t \Omega^{(+)}(t) = H_{lin}(t) \Omega^{(+)}(t) \Leftarrow \Omega^{(+)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} \Omega^{(+)} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \quad (\Omega^{(+)} = U_D(0, -\infty)) \quad (5.88)$$

に従って発展する。また、

$$\bullet \quad t \rightarrow -\infty \text{ で } H_{lin}(t) \rightarrow 0$$

に注意すると、

$$\Omega^{(+)}(-\infty) = I \quad (5.89)$$

がわかる。(5.88)解は、(5.16)と同様

$$\Omega^{(+)}(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' H_{lin}(t') \Omega^{(+)}(t') \quad (5.90)$$

になる。そこで、

$$U(t, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_{lin}(t') U(t', t_0) \quad (5.91)$$

とすれば、

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega^{(+)}(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0) \\ S &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega^{(+)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0) = U(\infty, -\infty) \end{aligned}} \Leftarrow \Omega^{(+)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} \Omega^{(+)} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \quad (\Omega^{(+)} = U_D(0, -\infty)) \quad (5.92)$$

になる。この $U(t, t_0)$ に逐次近似を用いると

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_{lin}(t') \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} dt'' H_{lin}(t'') U(t'', t_0) \right] \\ U(t, t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_{lin}(t') \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} dt'' H_D(t'') \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t''} dt''' H_{lin}(t''') U(t''', t_0) \right] \right] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.93)$$

であるので、

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt_1 H_{lin}(t_1) + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_2) \\ &\quad + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_2) H_{lin}(t_3) \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (5.94)$$

を得る。ここで n 番目の積分

$$I_n = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_2) \cdots H_{lin}(t_n) \quad (5.95)$$

に注目する。場の理論では、時間の順序 (因果律) が重要になり、この積分は

$$t_{j-1} > t_j \quad (j \leq n) \quad (5.96)$$

の条件の下で実行される必要がある。この条件は、ステップ関数 (階段関数) $\theta(t)$ で表すことができ、(5.95)は

$$I_n = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \theta(t_1 - t_2) \theta(t_2 - t_3) \cdots \theta(t_{n-1} - t_n) H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_2) \cdots H_{lin}(t_n) \quad (5.97)$$

となる (問題 1 2)。ここに

$$\theta(t) = 1 \quad (t > 0), \quad = 0 \quad (t < 0) \quad (5.98)$$

である。ところで、 $H_{lin}(t_j)$ の入る順番は任意なので、すべての異なった順番を考慮すると、同じ積分は、すべての順列 (Permutation) を \sum_P で表すと

$$I_n = \frac{1}{n!} \sum_P \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \theta(t_{\alpha_1} - t_{\alpha_2}) \theta(t_{\alpha_2} - t_{\alpha_3}) \cdots \theta(t_{\alpha_{n-1}} - t_{\alpha_n}) H_{lin}(t_{\alpha_1}) H_{lin}(t_{\alpha_2}) \cdots H_{lin}(t_{\alpha_n}) \quad (5.99)$$

になる。具体的には、 $n=3$ の場合

$$I_3 = \frac{1}{3!} \sum_P \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \left\{ \begin{aligned} & \theta(t_1 - t_2) \theta(t_2 - t_3) H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_2) H_{lin}(t_3) + \theta(t_2 - t_3) \theta(t_3 - t_1) H_{lin}(t_2) H_{lin}(t_3) H_{lin}(t_1) \\ & + \theta(t_3 - t_1) \theta(t_1 - t_2) H_{lin}(t_3) H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_2) + \theta(t_2 - t_1) \theta(t_1 - t_3) H_{lin}(t_2) H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_3) \\ & + \theta(t_3 - t_2) \theta(t_2 - t_1) H_{lin}(t_3) H_{lin}(t_2) H_{lin}(t_1) + \theta(t_1 - t_3) \theta(t_3 - t_2) H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_3) H_{lin}(t_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.100)$$

である。(5.99)をもう少しコンパクトに

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n P(H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_2) \cdots H_{lin}(t_n)) \\ & \quad (*) P(H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_2) \cdots H_{lin}(t_n)) \\ & = \sum_P \theta(t_{\alpha_1} - t_{\alpha_2}) \theta(t_{\alpha_2} - t_{\alpha_3}) \cdots \theta(t_{\alpha_{n-1}} - t_{\alpha_n}) H_{lin}(t_{\alpha_1}) H_{lin}(t_{\alpha_2}) \cdots H_{lin}(t_{\alpha_n}) \end{aligned} \quad (5.101)$$

と表す (問題 1 3)。もちろん、時間の順序がわかっているときには、単純に

$$P(H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_2) \cdots H_{lin}(t_n)) = H_{lin}(t_i) \cdots H_{lin}(t_j) \cdots H_{lin}(t_k) \quad (t_i > \cdots > t_j > \cdots > t_k) \quad (5.102)$$

である。(5.101)を用いて、(5.94)は

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 + \frac{1}{1!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t dt_1 P(H_{lin}(t_1)) + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 P(H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_2)) + \cdots \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n P(H_{lin}(t_1) H_{lin}(t_2) \cdots H_{lin}(t_n)) \end{aligned} \quad (5.103)$$

と表せることになる。形式的に

$$U(t, t_0) = P \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_{in}(t')\right) \quad (5.104)$$

で表せることがわかる。 $H_{in}(t)$ は

$$H_{in} = H_{int}(\varphi_{in}) \quad (5.105)$$

であり、(5.9)を用いると

$$H_{in}(t) = \int dx \mathcal{H}_{int}(\varphi_{in}(x)) \quad (5.106)$$

により、 $x^0 (= x_0) = ct$ として

$$U(t, t_0) = P \exp\left(-\frac{i}{\hbar c} \int_{ct_0}^{ct} d^4x \mathcal{H}_{in}(x)\right) \text{ with } \mathcal{H}_{in}(t) = \mathcal{H}_{int}(\varphi_{in}(x)) \quad (5.107)$$

である。

S行列とフェルミオン

さて、(5.102)からわかるように演算子 P は場を交換する。また、 $\mathcal{H}_{in}(x)$ は

$$\mathcal{H}_{in}(x) =: -i \frac{eq_\phi}{\hbar} \left(\phi_{in}^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi_{in} A_{in}^0 - \phi_{in}^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi_{in} A_{in\mu} \right) - \left(\frac{eq_\phi}{\hbar} \right)^2 |\phi_{in}|^2 A_{in}^\mu A_{in\mu} + \frac{eq_\psi}{\hbar} \overline{\psi}_{in} \not{A}_{in} \psi_{in} : \quad (5.108)$$

フェルミオン演算子 $\psi(x)$ を含む。¹ ところが、フェルミオンの場合は、交換により符号が変わる。この効果を取り入れた演算子 P を演算子 T といい、

$$T(H_{in}(t_1) H_{in}(t_2) \cdots H_{in}(t_n)) = \delta_P H_{in}(t_i) \cdots H_{in}(t_j) \cdots H_{in}(t_k) \quad (t_i > \cdots > t_j > \cdots > t_k) \quad (5.109)$$

で定義され、符号の効果は形式的に δ_P で表している。これを

- T積(Time-ordered product)

という。具体的に $n=2$ の場合

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = 0 \quad (5.110)$$

を満たす $\psi(x)$ に対して、

$$\begin{aligned} T(\psi(x)\psi(y)) &= +\psi(x)\psi(y) \text{ if } x_0 > y_0 \\ &= -\psi(y)\psi(x) \text{ if } y_0 > x_0 \end{aligned} \quad (5.111)$$

¹ 以降、場の添え字 in を省略する。

である。(5.110)に注意すると

$$T(\psi(x)\psi(y)) = \psi(x)\psi(y) \quad (5.112)$$

と表せることがわかる。また同様にして

$$\begin{aligned} T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) &= +\psi(x)\bar{\psi}(y) \text{ if } x_0 > y_0 \\ &= -\bar{\psi}(y)\psi(x) \text{ if } y_0 > x_0 \end{aligned} \quad (5.113)$$

がわかる。この場合は、 $T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) = \psi(x)\bar{\psi}(y)$ とはならないことに注意する。以上から、

考察すべき S 行列は

$$\begin{aligned} S &= U(\infty, -\infty) \\ U(t, t_0) &= T \exp\left(-\frac{i}{\hbar c} \int_{t_0}^t d^4x' \mathcal{H}_{int}(x')\right) \text{ with } \mathcal{H}_{int}(x) = \mathcal{H}_{int}(\varphi_{in}(x)) \end{aligned} \quad (5.114)$$

なる。

Appendix 1: ゲージ不変性

ゲージ変換は、【第四章 電磁量子場：ベクトル場】の(4.151)で定義された形式で

$$\varphi'(x) = \exp\left(-i\frac{q}{\hbar}\theta(x)\right)\varphi(x) \quad (q = eQ_{em}) \quad \text{for } \varphi = \phi, \psi \quad (5.115)$$

の変換を引き起こす。回転角 θ が $\theta(x)$ のように x に依存することに注意する。この変換で(5.4)は

$$\mathcal{L}'(x) = |D'^{\mu}\phi'(x)|^2 - \left(\frac{\mu c}{\hbar}\right)^2 |\phi'(x)|^2 + i\overline{\psi'(x)}\mathcal{D}'\psi'(x) - \frac{mc}{\hbar}\overline{\psi'(x)}\psi'(x) - \frac{1}{4}F'^{\mu\nu}(x)F'_{\mu\nu}(x) \quad (5.116)$$

になる。ここで、

$$D'^{\mu} = \partial^{\mu} + i\frac{e}{\hbar}Q_{em}A'_{\mu}(x) \quad (5.117)$$

である。また、 $A'_{\mu}(x)$ は【第四章 電磁量子場：ベクトル場】のゲージ変換(4.150)：

$$A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\Lambda(x) \quad (5.118)$$

で与えられ、

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) \quad (5.119)$$

になるように調節される。また、 D^{μ} は、

$$\varphi'(x) = U\varphi(x) \quad \text{for } U = \exp\left(-i\frac{q}{\hbar}\theta(x)\right) \quad (q = eQ_{em}) \quad (5.120)$$

と同じ変換性：

$$D'^{\mu}\varphi'(x) = UD^{\mu}\varphi(x) \quad (5.121)$$

をみたすように定義される。つまり、

$$\Lambda(x) = \theta(x) \quad (5.122)$$

の時、(5.119)が成立する (問題 1 4)。

Appendix 2: δ 関数

(5.77)を導く。

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t\right)}{E_b - E_a - i\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t\right) \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a - i\varepsilon)t'\right) dt' \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a - i\varepsilon)t\right) \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a - i\varepsilon)t'\right) dt' \\ &= \frac{i}{\hbar} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a - i\varepsilon)(t'+t)\right) dt' = \frac{i}{\hbar} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^t \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a - i\varepsilon)\tau\right) d\tau \end{aligned} \quad (5.123)$$

これから、 δ 関数の定義式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) dk, \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (5.124)$$

に従って (問題 19-A)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t\right)}{E_b - E_a - i\varepsilon} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a - i\varepsilon)t\right)}{E_b - E_a - i\varepsilon} \\ &= \frac{i}{\hbar} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a - i\varepsilon)\tau\right) d\tau = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{\frac{1}{\hbar}} 2\pi\delta(E_b - E_a) = 2\pi i \delta(E_b - E_a) \end{aligned} \quad (5.125)$$

になる (問題 19-B)。一方、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t\right)}{E_b - E_a - i\varepsilon} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a - i\varepsilon)t\right)}{E_b - E_a - i\varepsilon} \\ &= \frac{i}{\hbar} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a - i\varepsilon)\tau\right) d\tau = 0 \end{aligned} \quad (5.126)$$

以上から

$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t\right)}{E_b - E_a - i\varepsilon} = 2\pi i \delta(E_b - E_a)$	(5.127)
$\lim_{t \rightarrow -\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t\right)}{E_b - E_a - i\varepsilon} = 0$	

第 5 章問題

1) A) (5.7)を導け。

B) (5.7)の電磁場のエネルギー密度に対応する量 $\mathcal{H}_{em} = \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{\mu_0} (\partial^0 A_\mu - \partial_\mu A^0) \frac{\partial A^\mu}{\partial x^0}$ を

計算して $\mathcal{H}_{em} = -\frac{1}{2\mu_0} \left(\nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) + \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right)$ になることを示せ。

C) $\int d^4x \mathcal{H}_{em}$ を(4.9)に従って \mathbf{E}, \mathbf{B} で表せ。

2) (5.12)を導け。

3) (5.14)を証明せよ。

4) (5.19)を導け。

5) A) (5.25)を導け。

B) 自由場である $|\varphi_a\rangle$ は完全直交性 $(\sum_a |\varphi_a\rangle \langle \varphi_a| = I)$ を満たすが、対応する相互作用を受けている状態の $|\psi_a^+\rangle$ は、一般的には完全直交性 $(\sum_a |\psi_a^+\rangle \langle \psi_a^+| = I)$ を満たさない。その

理由を考えよ。具体例として、電子と陽子の 2 体系を考えてみるとよい。

C) (5.27)を導け。

D) (5.29)を導け。

6) (5.26)の $U(0, -\infty) = \sum_a |\psi_a^+\rangle \langle \varphi_a|$ をもちいて、(5.34)のときに(5.35)が成立することを示せ。

$U^\dagger(0, -\infty)U(0, -\infty)$ と $U(0, -\infty)U^\dagger(0, -\infty)$ を調べるとよい。

7) A) ハイゼンベルグ表示での演算子は(5.40)であることを示せ。

B) (5.42)を導け。

8) A) (5.46)を導け。

B) (5.48)を導け。

C) (5.49)を示せ。

D) (5.43)を場に適用し $\varphi_m(t) = \Omega^{(+)}(t)\varphi(t)\Omega^{(+)-1}$ with $\varphi(t) = \phi(x), \psi(x), A^\mu(x)$ ($x = (t, \mathbf{x})$) に

注意して(5.51)を導け。

9) (5.80)を導け。

1 0) (5.83)の $\langle \psi_b^+ | \Omega^{(+)}(t) | \psi_a^+ \rangle = e^{\frac{i}{\hbar}(E_b - E_a)t} \langle \varphi_b | \psi_a^+ \rangle \left(\Omega^{(+)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \Omega^{(+)} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} U_D(0, -\infty) e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \right)$ を導

け。

1 1) (5.85)の導き方に習って、 $\Omega^{(-)}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht} \Omega^{(-)} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ ($\Omega^{(-)} = U_D(0, +\infty)$) を用いて

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \psi_b^- | \Omega^{(-)}(t) | \psi_a^- \rangle = S_{ab}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_b^- | \Omega^{(-)}(t) | \psi_a^- \rangle = \langle \varphi_b | \varphi_a \rangle$$

を導け。(5.127)式はそのまま使えないので、対応する公式を導く必要がある。

1 2) (5.95)と(5.97)が同じであること、(5.96)に注意して示せ。

1 3) $I_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 P(H_D(t_1)H_D(t_2))$ を計算すると $I_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_D(t_1)H_D(t_2)$ になることを示せ。

1 4) (5.119)が成立することから(5.122)を導け。

1 5) (5.54)から(5.55)を導け。 $\int_{t_0}^t dt' = \int_{t_0}^{-\infty} dt' + \int_{-\infty}^t dt'$ に気がつくといよい。

1 6) (5.64)を導け。

1 7) (5.69)の導出法に習って(5.70)を導け。

1 8) (5.71)を用いた導出法に習って、

A) $S_{ab} = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \langle \psi_b^- | U(0, t_1) | \varphi_a \rangle$ を導け。

B) A) と(5.70)を用いて、(5.78)に対応する表式を導け。

1 9) A) (5.124)を利用して

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

を導け。

B) (5.125)で使う結果

$$\frac{\exp((a - i\varepsilon)t)}{a - i\varepsilon} = \int_{-\infty}^t \exp((a - i\varepsilon)\tau) d\tau \quad \text{for } \varepsilon > 0$$

を確認せよ。