

第四章 電磁量子場：ベクトル場

マックスウエルの電磁理論

電磁場は古くから波として知られており、

$\mathbf{E}(x)$ ：電場、 $\mathbf{B}(x)$ ：磁場

の 2 つで記述され、マックスウエルの方程式

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.1)$$

としてまとめられている。ここで、 $\mathbf{B}(x)$ と $\mathbf{H}(x)$ の違いは、 $\mathbf{H}(x)$ は $\mathbf{D} = 0$ の時には、真性電流 \mathbf{j} のみから決定されることであり

$\mathbf{B}(x)$: $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (q : 電荷) 磁場中で受ける力を通じて導入される。

$$\nabla \times \mathbf{B} \stackrel{\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}=0 \text{ の時}}{=} \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_M) \Rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \left(\begin{array}{l} \mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}: \text{磁性体からの電流} \\ \mathbf{M}: \text{磁化場 magnetization, } \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \end{array} \right) \quad (4.2)$$

のようにまとめることができる。同様に、 $\mathbf{D}(x)$ と $\mathbf{E}(x)$ の違いを、

$\mathbf{E}(x)$: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ (q : 電荷) 電場中で受ける力を通じて導入される。

$$\nabla \times \mathbf{D} \stackrel{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=0 \text{ の時}}{=} \epsilon_0 \mathbf{j}_P \Rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \left(\begin{array}{l} \mathbf{j}_P = \nabla \times \mathbf{P}: \text{誘電体からの電流} \\ \mathbf{P}: \text{偏極場 porlarization, } \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} - \mathbf{P} \end{array} \right) \quad (4.3)$$

のようにまとめることができる。(問題 0)

さて、力に関係するのは、 $\mathbf{E}(x)$ や $\mathbf{B}(x)$ であるが、これらは、ベクターポテンシャル

$$A^\mu = \left(\begin{array}{l} \mu=0 \\ \frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \end{array} \right), \quad A_\mu = \left(\begin{array}{l} \mu=0 \\ \frac{\phi}{c}, -\mathbf{A} \end{array} \right) \quad (4.4)$$

を用いても導入できる。4 元ベクトルの A^μ が、光子場を表すので

● ベクトル場

という。これを用いると、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = c \left(-\nabla \frac{\phi}{c} - \frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} \right) \quad (4.5)$$

である。(4.5) を 4 次元微分:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c \partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{c \partial t}, -\nabla \right) \quad (4.6)$$

を用いて表す。まず、 $\nabla \times \mathbf{A}$ を成分で表すために、ベクトルの外積をレビ・チビタの記号とい

われる

$$\begin{cases} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1 \end{cases} \quad (\text{それ以外は, } 0) \quad (4.7)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ij'k'} = \delta_{jj'} \delta_{kk'} - \delta_{jk'} \delta_{kj'}, \quad \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk'} = 2\delta_{kk'}} \quad (4.8)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i &= \left(A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1 \right) \\ &= (\varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2, \varepsilon_{231} A_3 B_1 + \varepsilon_{213} A_1 B_3, \varepsilon_{312} A_1 B_2 + \varepsilon_{321} A_2 B_1) \\ &= (\varepsilon_{1jk} A_j B_k, \varepsilon_{2jk} A_j B_k, \varepsilon_{3jk} A_j B_k) = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \end{aligned} \quad (4.9)$$

と表す。¹ 従って、

$$\boxed{(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k} \quad (4.10)$$

である。 $\nabla \times \mathbf{A}$ に用いると

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_j A_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = \varepsilon_{ijk} (-\partial^j) A_k \Leftarrow \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (4.11)$$

と表せる。 $\mathbf{B}^i = (\nabla \times \mathbf{A})_i$ に適用し

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= (\nabla \times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_j A_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j (-A_k) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) \\ \frac{\mathbf{E}_i}{c} &= -\nabla_i \frac{\phi}{c} - \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t} = -\partial_i A_0 - \partial^0 (-A^i) = -(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) \end{aligned} \quad (4.12)$$

を得る（問題 1、問題 2）。(4.12) から示唆される組み合わせとして

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu (= -F^{\nu\mu}) \quad (4.13)$$

とすると、4 元に拡張したレビ・チビタの記号

$$\varepsilon_{0jki} = \varepsilon_{jki} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{0123} = 1 \\ \varepsilon^{0123} = -1 \end{cases} \quad (4.14)$$

を用いて、(4.12) より

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= (\nabla \times \mathbf{A})_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk} \Rightarrow F_{jk} = -\varepsilon_{jki} \mathbf{B}_i = -\varepsilon_{0jki} \mathbf{B}_i \\ \frac{\mathbf{E}_i}{c} &= -(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) = -F_{i0} \end{aligned} \quad (4.15)$$

なので（問題 3）、

¹ 添え字の重複は和をとる約束なので、 $\varepsilon^{ijk} \partial_j A^k = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon^{ijk} \partial_j A^k = \sum_{k=1}^3 (\varepsilon^{1k} \partial_1 A^k + \varepsilon^{2k} \partial_2 A^k + \varepsilon^{3k} \partial_3 A^k)$ のことである。

$$F_{0i} = -F_{i0} = \frac{\mathbf{E}_i}{c} \left(F^{0i} = -F^{i0} = -\frac{\mathbf{E}_i}{c} \right)$$

$$\mathbf{F}_{ij} = -\varepsilon_{0ijk} \mathbf{B}_k = -\varepsilon_{ijk} \mathbf{B}_k \left(F^{ij} = \eta^{ii'} \eta^{jj'} \left(-\varepsilon_{0i'j'k} \mathbf{B}_k \right) \stackrel{\eta^{ii'} = \eta^{jj'} = -1}{=} -\varepsilon_{0ijk} \mathbf{B}_k = -\varepsilon_{ijk} \mathbf{B}_k \right) \quad (4.16)$$

従って、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathbf{E}_1}{c} & \frac{\mathbf{E}_2}{c} & \frac{\mathbf{E}_3}{c} \\ -\frac{\mathbf{E}_1}{c} & 0 & -\mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2 \\ -\frac{\mathbf{E}_2}{c} & \mathbf{B}_3 & 0 & -\mathbf{B}_1 \\ -\frac{\mathbf{E}_3}{c} & -\mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mathbf{E}_1}{c} & -\frac{\mathbf{E}_2}{c} & -\frac{\mathbf{E}_3}{c} \\ \frac{\mathbf{E}_1}{c} & 0 & -\mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2 \\ \frac{\mathbf{E}_2}{c} & \mathbf{B}_3 & 0 & -\mathbf{B}_1 \\ \frac{\mathbf{E}_3}{c} & -\mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

がわかる。また、

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (\varepsilon^{0123} = -1) \quad (4.18)$$

とすると、

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \\ -\mathbf{B}_1 & 0 & -\frac{\mathbf{E}_3}{c} & \frac{\mathbf{E}_2}{c} \\ -\mathbf{B}_2 & \frac{\mathbf{E}_3}{c} & 0 & -\frac{\mathbf{E}_1}{c} \\ -\mathbf{B}_3 & -\frac{\mathbf{E}_2}{c} & \frac{\mathbf{E}_1}{c} & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{B}_1 & -\mathbf{B}_2 & -\mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_1 & 0 & -\frac{\mathbf{E}_3}{c} & \frac{\mathbf{E}_2}{c} \\ \mathbf{B}_2 & \frac{\mathbf{E}_3}{c} & 0 & -\frac{\mathbf{E}_1}{c} \\ \mathbf{B}_3 & -\frac{\mathbf{E}_2}{c} & \frac{\mathbf{E}_1}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

がわかる（問題 4）。つまり、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathbf{E}_1}{c} & \frac{\mathbf{E}_2}{c} & \frac{\mathbf{E}_3}{c} \\ -\frac{\mathbf{E}_1}{c} & 0 & -\mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_2 \\ -\frac{\mathbf{E}_2}{c} & \mathbf{B}_3 & 0 & -\mathbf{B}_1 \\ -\frac{\mathbf{E}_3}{c} & -\mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{B}_1 & -\mathbf{B}_2 & -\mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_1 & 0 & -\frac{\mathbf{E}_3}{c} & \frac{\mathbf{E}_2}{c} \\ \mathbf{B}_2 & \frac{\mathbf{E}_3}{c} & 0 & -\frac{\mathbf{E}_1}{c} \\ \mathbf{B}_3 & -\frac{\mathbf{E}_2}{c} & \frac{\mathbf{E}_1}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

である。ここで、 \mathbf{E} と \mathbf{B} の入れ替え

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} \text{ by } \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \rightarrow -\mathbf{B}, \mathbf{B} \rightarrow \frac{\mathbf{E}}{c} \right) \quad (4.21)$$

で互いに入れ替わるので、

- 互いに双対 (dual) である

といわれる。

真空中でのマックスウエルの方程式を $F_{\mu\nu}$ を使って書き換えてみる。そこで、

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \partial_0 F^{0\nu} + \partial_i F^{i\nu} = \partial_0 F^{0\nu} + \nabla_i F^{i\nu} \quad (4.22)$$

を考えると、

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} F^{\mu 0} &= \partial_0 F^{00} + \nabla_i F^{i0} \stackrel{F^{00}=0}{=} \nabla_i F^{i0} \stackrel{F^{i0}=E_i/c}{=} \nabla_i \frac{\mathbf{E}_i}{c} \\ \partial_{\mu} F^{\mu j} &= \partial_0 F^{0j} + \nabla_i F^{ij} \stackrel{F^{0j}=-E_j/c}{=} \partial_0 \left(-\frac{\mathbf{E}_j}{c} \right) + \nabla_i \left(-\varepsilon_{ijk} \mathbf{B}_k \right) \\ &\stackrel{\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}}{=} -\frac{\partial \mathbf{E}_j}{c \partial t} - \varepsilon_{ijk} \nabla_i \mathbf{B}_k = -\frac{\partial \mathbf{E}_j}{c^2 \partial t} - \varepsilon_{ijk} \nabla_i \mathbf{B}_k \end{aligned} \quad (4.23)$$

$\varepsilon_{ijk} \nabla_i \mathbf{B}_k$ を(4.11)を参考にして

$$\varepsilon_{i[jk]} \nabla_j \mathbf{B}_k = (\nabla \times \mathbf{B})_i \Rightarrow -\varepsilon_{[jk]i} \nabla_j \mathbf{B}_k = (\nabla \times \mathbf{B})_i \stackrel{\text{名前の付け替え } i \rightarrow j, j \rightarrow i}{\Rightarrow} -\varepsilon_{[ij]k} \nabla_j \mathbf{B}_k = (\nabla \times \mathbf{B})_j \quad (4.24)$$

より

$$\partial_{\mu} F^{\mu j} = -\frac{\partial \mathbf{E}_j}{c^2 \partial t} - \varepsilon_{ijk} \nabla_i \mathbf{B}_k = -\frac{\partial \mathbf{E}_j}{c^2 \partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_j \quad (4.25)$$

以上から

$$\partial_{\mu} F^{\mu 0} = \nabla_i \frac{\mathbf{E}_i}{c}, \quad \partial_{\mu} F^{\mu j} = -\frac{\partial \mathbf{E}_j}{c^2 \partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_j \quad (4.26)$$

ここで、真空中では、

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0}, \quad \mathbf{j} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{H} \quad \left(\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c} \right) \quad (4.27)$$

に注意すると、 $\nabla \mathbf{D} = \rho$ を考慮して、

$$\partial_{\mu} F^{\mu 0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \rho, \quad \partial_{\mu} F^{\mu j} = \mu_0 \mathbf{j}_j \quad (4.28)$$

を得る。ここで、新たに、4次元電流として、

$$\mathbf{j}^{\mu} = \begin{pmatrix} \mu=0 & \mu=1,2,3 \\ c\rho, & \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

を導入すれば、

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \rho = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{c} c\rho \stackrel{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 1/c}{=} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{1}{c} j^0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} j^0 = \mu_0 j^0, \quad \mathbf{j}_{1,2,3} = \mathbf{j}^{1,2,3} \quad (4.30)$$

を用いて、

$$\partial_{\mu} F^{\mu 0} = \mu_0 j^0, \quad \partial_{\mu} F^{\mu j} = \mu_0 j^j \quad (4.31)$$

となるので、

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (4.32)$$

とまとめることができる。電磁エネルギーは、

$$E_{em} = \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} [\mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})] \quad (4.33)$$

で表わされる。真空中のばあいには、(4.27)が成立するので

$$E_{em} = \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right] = \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{x} \left[\frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})}{c} + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right] \quad (4.34)$$

が分かる。²これを場の理論で求めることになる。

場の理論では、 A_μ を電磁場と見做している。そのとき、 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ は、 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ を用いると、

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu &\Rightarrow \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 j^\nu \\ &\Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \mu_0 j^\nu \end{aligned} \quad (4.35)$$

になる。特に、自由場 ($j^\mu = 0$) に対しては、

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (4.36)$$

になる。これが、電磁場の運動方程式になる。このとき、任意の関数 Λ を用い、

$$\partial_\mu (\partial^\mu (\partial^\nu \Lambda) - \partial^\nu (\partial^\mu \Lambda)) \stackrel{\text{恒等的に0}}{=} 0 \quad (4.37)$$

を満たしているとすれば、(4.36)に(4.37)を加えて

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \partial_\mu (\partial^\mu (\partial^\nu \Lambda) - \partial^\nu (\partial^\mu \Lambda)) \\ &= \partial_\mu (\partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \Lambda) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \Lambda)) \end{aligned} \quad (4.38)$$

である。このとき、

$$\bullet \quad A_\mu \text{ の見かけ上の違い : } A_\mu \Leftrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \text{ をもつ } A'_\mu$$

を用いて光子の運動を記述してもは、同じ運動方程式を与えてしまい、同じ電磁場の物理を与えるので、物理的に意味が無くなる。このこと電磁場理論のゲージ不変性といい、(4.37)を満たす Λ を用いて

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (4.39)$$

を A_μ から A'_μ へのゲージ変換という。一方、(4.36)より

² $E_{em} = \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right] = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int d\mathbf{x} \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) + c \mathbf{B}(\mathbf{x}) c \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right]$ の場合は、(4.4)の A^μ を

$A^\mu = (\phi, c\mathbf{A})$ で定義する。

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu = 0 \quad (4.40)$$

の場合を考察する事ができ、

$$\bullet \partial_\mu A^\mu = 0 \text{ をローレンツ条件} \quad (4.41)$$

という。特に、真空中では、 $\rho = 0$ なので、 $\partial_\mu A^\mu = 0$ は、

$$\nabla \mathbf{A} = 0 \quad (4.42)$$

になる。そして、

$$\bullet \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu A'^\mu = 0 \text{ を満たす } \Lambda \text{ を用いる場合を、ローレンツゲージ}$$

と呼ぶ。ローレンツ条件より

$$\begin{cases} \square A^\mu(x) = 0 \\ \square \Lambda(x) = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

が満たされている。

電磁場は横波として知られているように、進行方向に垂直な 2 つの成分のみ持つ。 A_μ は $A_{0,1,2,3}$ の 4 つの成分を持つが、余分な 2 つの成分は、2 つの拘束条件により消去される。そのときの拘束条件が

$$\bullet \text{ローレンツ条件：} \partial_\mu A^\mu = 0、\text{ゲージ変換：} A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

である。

生成・消滅演算子

量子場のエネルギーは、「第二章 ポーズ量子場：スカラー場」の(2.18)を参考にして

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\int d^4 p \frac{1}{K(\mathbf{p})} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) c\omega(\mathbf{p}) \sum_{\mu=0}^3 a^{\mu\dagger}(\mathbf{p}) a_\mu(\mathbf{p}) \\ &= -\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})K(\mathbf{p})} c\omega(\mathbf{p}) \sum_{\mu=0}^3 a^{\mu\dagger}(\mathbf{p}) a_\mu(\mathbf{p}) \leftarrow K(-\mathbf{p}) = K(\mathbf{p}) \text{に限る} \end{aligned} \quad (4.44)$$

になり、同様に、粒子数は

$$\hat{N} = -\int d^4 p \frac{1}{K} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \sum_{\mu=0}^3 a^{\mu\dagger}(\mathbf{p}) a_\mu(\mathbf{p}) = -\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})K} \sum_{\mu=0}^3 a^{\mu\dagger}(\mathbf{p}) a_\mu(\mathbf{p}) \quad (4.45)$$

である。ここで、正しくは、Normal Product が必要である。更に、進行方向が 3 軸方向にとった場合に、物理自由度としての 2 成分が、 $a_\mu^{(1,2)}$ になっていること ((4.179)参照) に注意すると、

$$\sum_{\mu=0}^3 a^{\mu\dagger}(\mathbf{p}) a_\mu(\mathbf{p}) = -a^{(1)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(1)}(\mathbf{p}) - a^{(2)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(2)}(\mathbf{p}) + \dots \quad (4.46)$$

を得るので、 \hat{H} と \hat{N} の表示として負符号に注意する (問題 5)。ところで、電磁場の生成・消

滅演算子は、「Appendix 1:電磁場の解」を用いて、

$$a_\mu(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)}(\mathbf{p}), \quad a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^{(\lambda)*}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) \quad (4.47)$$

で表せる。そこで、

$$\begin{aligned} a^{\mu\dagger}(\mathbf{p}) a_\mu(\mathbf{p}) &= \left(\sum_{\lambda=1}^4 e^{(\lambda)*\mu}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) \right) \left(\sum_{\lambda'=1}^4 e_\mu^{(\lambda')}(\mathbf{p}) a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) \right) \\ &= \sum_{\lambda, \lambda'=1}^4 e^{(\lambda)*\mu}(\mathbf{p}) e_\mu^{(\lambda')}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) \leftarrow e^{(\lambda)*\mu}(\mathbf{p}) e_\mu^{(\lambda')}(\mathbf{p}) = g^{\lambda\lambda'} \\ &= \sum_{\lambda, \lambda'=1}^4 g^{\lambda\lambda'} a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) \\ &= a^{(4)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(4)}(\mathbf{p}) - a^{(1)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(1)}(\mathbf{p}) - a^{(2)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(2)}(\mathbf{p}) - a^{(3)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(3)}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.48)$$

より、

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\int d^4 p \frac{1}{K} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) c\omega(\mathbf{p}) \sum_{\lambda=1}^4 a_\lambda^\dagger(\mathbf{p}) a_\lambda(\mathbf{p}) \\ &= \int d^4 p \frac{1}{K} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) c\omega(\mathbf{p}) \left(a^{(1)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(1)}(\mathbf{p}) + a^{(2)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(2)}(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad \left. + a^{(3)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(3)}(\mathbf{p}) - a^{(4)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(4)}(\mathbf{p}) \right) \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})K} c\omega(\mathbf{p}) \left(a^{(1)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(1)}(\mathbf{p}) + a^{(2)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(2)}(\mathbf{p}) \right. \\ &\quad \left. + a^{(3)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(3)}(\mathbf{p}) - a^{(4)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(4)}(\mathbf{p}) \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

である。すなわち、

$$\boxed{\hat{H} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})K} c\omega(\mathbf{p}) \left(a^{(1)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(1)}(\mathbf{p}) + a^{(2)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(2)}(\mathbf{p}) \right.} \quad (4.50)$$

$$\left. + a^{(3)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(3)}(\mathbf{p}) - a^{(4)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(4)}(\mathbf{p}) \right)}$$

同様に、

$$\boxed{\hat{N} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})K} \left(a^{(1)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(1)}(\mathbf{p}) + a^{(2)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(2)}(\mathbf{p}) \right.} \quad (4.51)$$

$$\left. + a^{(3)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(3)}(\mathbf{p}) - a^{(4)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(4)}(\mathbf{p}) \right)}$$

を得る（問題 6）。ボーズ量子場なので、

$$[\hat{N}, a^{(\lambda)}(\mathbf{k})] = -a^{(\lambda)}(\mathbf{k}), \quad [\hat{N}, a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k})] = a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k}) \quad (4.52)$$

が要求されるので、 $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ を用いて

$$\begin{aligned} [\hat{N}, a^{(\lambda)}(\mathbf{k})] &\stackrel{\text{要請}}{=} -a^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \\ &\stackrel{\text{計算}}{=} \left[\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})K} \left(a^{(1)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(1)}(\mathbf{p}) + a^{(2)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(2)}(\mathbf{p}) + a^{(3)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(3)}(\mathbf{p}) - a^{(4)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(4)}(\mathbf{p}) \right), a^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \right] \\ &= -\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})K} \left[g^{\kappa\kappa'} a^{(\kappa)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(\kappa')}(\mathbf{p}), a^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} g^{\kappa\kappa'} \left(a^{(\kappa)\dagger}(\mathbf{p}) \boxed{\overset{=0\text{になるはず}}{a^{(j)}(\mathbf{p}), a^{(i)}(\mathbf{k})}} + [a^{(\kappa)\dagger}(\mathbf{p}), a^{(\lambda)}(\mathbf{k})] a^{(\kappa')}(\mathbf{p}) \right) \\
&= -\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} \boxed{\overset{\propto \delta_{\kappa\lambda} \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k})\text{になるはず}}{g^{\kappa\kappa'} [a^{(\kappa)\dagger}(\mathbf{p}), a^{(\lambda)}(\mathbf{k})]}} a^{(\kappa')}(\mathbf{p})
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$g^{\kappa\kappa'} g^{\lambda\lambda'} = \delta_{\kappa\lambda}$ の性質を用いると

$$g^{\kappa\kappa'} g^{\lambda\lambda'} = \delta_{\kappa\lambda} \Rightarrow g^{\kappa\kappa'} \Rightarrow [a^{(\kappa)\dagger}(\mathbf{p}), a^{(\lambda)}(\mathbf{k})] = 2\omega(\mathbf{p}) K g^{\kappa\lambda} \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \tag{4.54}$$

より、 $[a^{(\lambda)}(\mathbf{p}), a^{(\lambda')}(\mathbf{k})] = 0$ & $[a^{(\lambda)}(\mathbf{p}), a^{(\lambda')\dagger}(\mathbf{k})] = -2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) g^{\lambda\lambda'}$ が導かれる。

$[\hat{N}, a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k})]$ 等からも同様な条件が導かれ（問題 7）、

$$\boxed{[a^{(\lambda)}(\mathbf{p}), a^{(\lambda')\dagger}(\mathbf{p}')] = -2\omega(\mathbf{p}) K(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') g^{\lambda\lambda'}} \tag{4.55}$$

が、生成・消滅演算子の基本式になる。同様に、(4.47)を用いて

$$\boxed{[a_\mu(\mathbf{p}), a_\nu^\dagger(\mathbf{p}')] = -2\omega(\mathbf{p}) K(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') g_{\mu\nu}} \tag{4.56}$$

となる（問題 8）。

量子場の導入

フーリエ変換を使用して、座標空間での演算子を量子場 $A_\mu(x)$ ($\mu=0,1,2,3$) とし

$$A_\mu(x) = \int \frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(a_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) + a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right) \tag{4.57}$$

のフーリエ変換とする。ここで、 A は適当な定数である。³ また、簡単な計算により

$$\nabla^2 A_\mu(x) = \frac{\partial^2 A_\mu(x)}{\partial x^0 \partial x^0} = - \int_{p^0=\omega} \frac{A d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{\omega^2(\mathbf{p})}{\hbar^2} \left[a_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) + a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right] \tag{4.58}$$

が成り立つことがわかる（問題 1 2）。これから、

$$\begin{aligned}
\nabla^2 A_\mu(x) &= \frac{\partial^2 A_\mu(x)}{\partial x^0 \partial x^0} \Rightarrow \frac{\partial^2 A_\mu(x)}{\partial x^0 \partial x^0} - \nabla^2 A_\mu(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} - \nabla^2 \right) A_\mu(x) \\
&= \sum_{\nu=0}^3 \partial^\nu \partial_\nu A_\mu(x) = \partial^\nu \partial_\nu A_\mu(x)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

なので、

$$\boxed{\partial^\nu \partial_\nu A_\mu(x) \equiv \square A_\mu(x) = 0} \tag{4.60}$$

³ 定数の A と電磁場の $A(x)$ を、同じ文字で表しているが、混乱は無いと思う。

が成り立つ。「第二章 ボーズ量子場：スカラー場」の(2.29)と比較すると、 $m=0$ に対応することが分かる。つまり、

- 光子の質量は 0 である

と結論できる。実際は、ゲージ不変性により、光子の質量項 $((mc/\hbar)^2 A^\mu A_\mu)$ が禁止されているので、質量が 0 になっている。

「第二章 ボーズ量子場：スカラー場」の(2.31)の導出過程を参考にして

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -g_{\mu\nu} \int \frac{A^2 K d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(\exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \right) \quad (4.61)$$

を導ける（問題 9）。これは、さらに

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -g_{\mu\nu} \int d^4 p A^2 K \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \quad (4.62)$$

と整理できる（問題 10）。同時刻 ($x^0 = x'^0$) の交換関係を評価すると、

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] \Big|_{x^0=x'^0} = -g_{\mu\nu} \int_{p^0=\omega} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} A^2 K \left(\exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(-i\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \right) \quad (4.63)$$

になる。第 2 項は $\int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p} f(-\mathbf{p})$ ($f(\mathbf{p})$ は任意の関数) に注意して、

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] \Big|_{x^0=x'^0} = -g_{\mu\nu} \int_{p^0=\omega} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} A^2 K \left(\exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \right) = 0 \quad (4.64)$$

である。同様に、「第二章 ボーズ量子場：スカラー場」の(2.39)以降の導出過程を参考にして、電磁場のエネルギー(4.34)比較用の不定要素として、係数 X を用いて

$$\left[A_\mu(x'), \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^0} \right] \Big|_{x'_0=x_0} = -i\hbar c X \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') g_{\mu\nu} \quad (4.65)$$

を要請する。係数 X は後ほど、(4.50)の \hat{H} が(4.34)の E_{em} を導くように決定される。そのとき、

$$A^2 K \frac{1}{\hbar} (2\pi\hbar)^3 = \hbar c X \Rightarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\hbar^2 c X}{(2\pi\hbar)^3 K(\mathbf{p})}}, A(-\mathbf{p}) = A(\mathbf{p}) \Leftarrow K(-\mathbf{p}) = K(\mathbf{p}) \quad (4.66)$$

である（問題 11）。すなわち、

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^4 g^{\lambda\lambda'} e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) e_\nu^{(\lambda')*}(\mathbf{p}') &= g_{\mu\nu}, e_\mu^{(\lambda)} e^{(\lambda)\mu} = g^{\lambda\lambda'} = \text{diag.}(-1, -1, -1, 1) \\ a_\mu(\mathbf{p}) &= \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)}(\mathbf{p}), a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^{(\lambda)*}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) \\ [a_\mu(\mathbf{p}), a_\nu^\dagger(\mathbf{p}')] &= -2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') g^{\mu\nu}, [a^{(\lambda)}(\mathbf{p}), a^{(\lambda')\dagger}(\mathbf{p}')] = -2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') g^{\lambda\lambda'} \end{aligned}$$

(4.67)

及び

$$\begin{aligned}
A_\mu(x) &= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} (a_\mu(\mathbf{p})\exp(-ipx) + a_\mu^\dagger(\mathbf{p})\exp(ipx)) \Leftarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\hbar^2 cX}{(2\pi\hbar)^3 K(\mathbf{p})}} \\
[A_\mu(x), A_\nu(x')] &= -g_{\mu\nu} \frac{\hbar^2 cX}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(\exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \right) \Leftarrow p^0 = \omega(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}| \\
&= -g_{\mu\nu} \frac{\hbar^2 cX}{(2\pi\hbar)^3} \int d^4 p \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \Leftarrow p^0 = (-\infty, \infty) \\
[A_\mu(x), A_\nu(x')] \Big|_{x^0=x'^0} &= 0, \quad \left[A_\mu(x), \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right] \Big|_{x'_0=x_0} = \left[A_\mu(x'), \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^0} \right] \Big|_{x_0=x'_0} = -i\hbar cX \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

(4.68)

がわかった。ここに、係数 X は量子場のエネルギーが電磁場のエネルギー(4.34)を与えるように決められる。また、(2.44)の

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(x')] &= \frac{\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(\exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \right) \\
&= \frac{\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int d^4 p \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right)
\end{aligned} \tag{4.69}$$

を用いると

$$\boxed{[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -g_{\mu\nu} X [\phi(x), \phi(x')] \Big|_{m=0}} \tag{4.70}$$

が成立している。

生成・消滅演算子と量子場

「第二章 ボーズ量子場：スカラー場」に習って、

$$\begin{aligned}
A_\mu(x) &= \int_{p^0=\omega/c} \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left[a_\mu(\mathbf{p})\exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + a_\mu^\dagger(\mathbf{p})\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right] \Leftarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\hbar^2 cX}{(2\pi\hbar)^3 K(\mathbf{p})}} \\
\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} &= i \frac{1}{\hbar} \int_{p^0=\omega/c} \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2} \left[-a_\mu(\mathbf{p})\exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + a_\mu^\dagger(\mathbf{p})\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right]
\end{aligned} \tag{4.71}$$

より、 $A(-\mathbf{p}) = A(\mathbf{p})$ に注意して

$$\begin{aligned}
a_\mu(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{K}{(2\pi\hbar)^3 cX}} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\mu(x) + i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \Big|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} \\
a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) (\equiv (a(\mathbf{p}))^\dagger) &= \sqrt{\frac{K}{(2\pi\hbar)^3 cX}} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\mu(x) - i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \Big|_{p^0=\omega(\mathbf{p})}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

である（問題 13）。ここで、 $e_\mu^{*(\lambda)}(\mathbf{p}) a^\mu(\mathbf{p}) = g^{\lambda\lambda'} a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) (\equiv \sum_{\lambda'=1}^4 g^{\lambda\lambda'} a^{(\lambda')}(\mathbf{p}))$ より、

$$\begin{aligned}
e^{*(\lambda)\mu}(\mathbf{p})a_\mu(\mathbf{p}) &= a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = g^{\lambda\lambda'} \sqrt{\frac{K}{(2\pi\hbar)^3 cX}} \int dx e^{*(\lambda)\mu}(\mathbf{p}) \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\mu(x) + i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{i\omega x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\
e^{(\lambda)\mu}(\mathbf{p})a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) &= a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) = g^{\lambda\lambda'} \sqrt{\frac{K}{(2\pi\hbar)^3 cX}} \int dx e^{(\lambda)\mu}(\mathbf{p}) \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\mu(x) - i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\omega x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right)
\end{aligned} \tag{4.73}$$

がわかる。

物理的量子場

物理的電磁場は、いわゆる横波のみの 2 成分である。そのため、

- 「ローレンツ条件」と「ゲージ変換」

を用いることになる。ローレンツ条件を用いると、

$$\begin{aligned}
\partial^\mu A_\mu(x) &= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(a_\mu(\mathbf{p})\partial^\mu \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) + a_\mu^\dagger(\mathbf{p})\partial^\mu \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right) \Leftarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\hbar^2 cX}{(2\pi\hbar)^3 K(\mathbf{p})}} \\
&= i \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(-p^\mu a_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) + p^\mu a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right) = 0 \\
\Rightarrow p^\mu a_\mu(\mathbf{p}) &= \sum_{\lambda=1}^4 p^\mu e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = 0 \Rightarrow p^\mu e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = 0
\end{aligned} \tag{4.74}$$

より、

$$p^\mu e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = 0 \tag{4.75}$$

である。z 軸+向きに進行する電磁波の場合には

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{(+)}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(-)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(//)}(\mathbf{p}) = \mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \\
e^{(\pm, //)\mu}(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}^{(\pm, //)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \dots \mu = 0, \quad e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (p^\mu = (\omega(\mathbf{p}), 0, 0, \omega(\mathbf{p})), \mathbf{p} = (0, 0, \omega(\mathbf{p}))) \\
e_\mu^{(\pm, //)}(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{e}^{(\pm, //)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \dots \mu = 0, \quad e_\mu^{(4)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.76}$$

であるので（問題 1 4）、

$$\begin{cases} p^\mu e_\mu^{(//)}(\mathbf{p}) = p^0 e_0^{(//)}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{e}^{(//)}(\mathbf{p}) = 0 - \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = -|\mathbf{p}| = -\omega(\mathbf{p}) \\ p^\mu e_\mu^{(4)}(\mathbf{p}) = p^0 e_0^{(4)}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{e}^{(4)}(\mathbf{p}) \stackrel{e^{(4)}(\mathbf{p})=0}{=} \omega(\mathbf{p}) - 0 = \omega(\mathbf{p}) \end{cases} \tag{4.77}$$

$$\Rightarrow p^\mu (e_\mu^{(//)}(\mathbf{p}) + e_\mu^{(4)}(\mathbf{p})) = 0 \text{ OK!!!}$$

また

$$p^\mu e_\mu^{(\pm)}(\mathbf{p}) = p^0 e_0^{(\pm)}(\mathbf{p}) - \overbrace{p^i e_i^{(\pm)}(\mathbf{p})}^{p \perp \text{に垂直}} = p^0 \times 0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{0} = 0 - 0 = 0 \Rightarrow p^\mu e_\mu^{(\pm)}(\mathbf{p}) = 0 \text{ OK!!!} \quad (4.78)$$

従って、

$$p^\mu e_\mu^{(\pm, //, 4)}(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.79)$$

を自動的に満たすのは、

$$\begin{aligned} & \bullet e_\mu^{(//)}(\mathbf{p}) + e_\mu^{(4)}(\mathbf{p}) \\ & \bullet e_\mu^{(\pm)}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.80)$$

の組であることが分かる。そこで、(4.200)と(4.201)より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a^0(\mathbf{p}) \\ \mathbf{a}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} &= \sum_{\lambda=1}^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) + \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} a^{(4)}(\mathbf{p}) \\ a^\mu(\mathbf{p}) &= e^{(+)\mu}(\mathbf{p}) a^{(-)}(\mathbf{p}) + e^{(-)\mu}(\mathbf{p}) a^{(+)}(\mathbf{p}) + e^{(//)\mu}(\mathbf{p}) a^{(//)}(\mathbf{p}) + e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) a^{(4)}(\mathbf{p}) \\ &= e^{(+)\mu}(\mathbf{p}) a^{(-)}(\mathbf{p}) + e^{(-)\mu}(\mathbf{p}) a^{(+)}(\mathbf{p}) \\ &\quad + \left(e^{(//)\mu}(\mathbf{p}) + e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) \right) \frac{a^{(//)}(\mathbf{p}) + a^{(4)}(\mathbf{p})}{2} + \left(e^{(//)\mu}(\mathbf{p}) - e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) \right) \frac{a^{(//)}(\mathbf{p}) - a^{(4)}(\mathbf{p})}{2} \end{aligned} \quad (4.81)$$

に注意すると、

$$p^\mu a_\mu(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.82)$$

の条件を満たすには、(4.80)以外の成分の項：

$$\left(e^{(//)\mu}(\mathbf{p}) - e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) \right) \frac{a^{(//)}(\mathbf{p}) - a^{(4)}(\mathbf{p})}{2} \quad (4.83)$$

が消える必要がある。そのため、

$$\mathbf{a}^{(//)}(\mathbf{p}) (= a^{(3)}(\mathbf{p})) = \mathbf{a}^{(4)}(\mathbf{p}) \quad (4.84)$$

を要求する。⁴ その結果、

$$\begin{aligned} a^\mu(\mathbf{p}) &= e^{(+)\mu}(\mathbf{p}) a^{(-)}(\mathbf{p}) + e^{(-)\mu}(\mathbf{p}) a^{(+)}(\mathbf{p}) + \left(e^{(//)\mu}(\mathbf{p}) + e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) \right) \frac{a^{(//)}(\mathbf{p}) + a^{(4)}(\mathbf{p})}{2} \\ \text{with } \mathbf{a}^{(//)}(\mathbf{p}) (= a^{(3)}(\mathbf{p})) &= \mathbf{a}^{(4)}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.85)$$

である。このように、常に $\mathbf{a}^{(//)}(\mathbf{p}) (= a^{(3)}(\mathbf{p})) = \mathbf{a}^{(4)}(\mathbf{p})$ が成立するように電磁場の理論を構成するのを「Gupta-Bleuler 法」という。⁵ 残りの 1 成分：

$$\left(e^{(//)\mu}(\mathbf{p}) + e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) \right) \frac{a^{(//)}(\mathbf{p}) + a^{(4)}(\mathbf{p})}{2} \quad (4.86)$$

は、

⁴ $\mathbf{a}^{(//)}(\mathbf{p}) = \mathbf{a}^{(4)}(\mathbf{p})$ は、 $\mathbf{a}^{(//)}(\mathbf{p}), \mathbf{a}^{(4)}(\mathbf{p})$ が演算子なので、決して成立しない。正しくは、(4.90)のように光子の状態を表す波動関数 $|\Psi\rangle$ を用いて、 $\mathbf{a}^{(//)}(\mathbf{p})|\Psi\rangle = \mathbf{a}^{(4)}(\mathbf{p})|\Psi\rangle$ と読み替える必要がある。

⁵ S.N. Gupta, Proc. Phys. Soc. (London), **A63**, 681 (1950); K. Bleuler, Helv. Phys. Acta, **23**, 567 (1950).

$$e^{(//)\mu}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots \mu = 0 \\ \cdots \mu = 1 \\ \cdots \mu = 2 \\ \cdots \mu = 3 \end{matrix}, \quad e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

なので、

$$e^{(//)\mu}(\mathbf{p}) + e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{p}^\mu}{|\mathbf{p}|} \quad (4.88)$$

に気がつくと、ゲージ変換の自由度を用いて

$$\begin{aligned} a'_\mu(\mathbf{p}) &= a_\mu(\mathbf{p}) + \lambda p_\mu \\ &= e^{(+)\mu}(\mathbf{p})a^{(-)}(\mathbf{p}) + e^{(-)\mu}(\mathbf{p})a^{(+)}(\mathbf{p}) + \left(e^{(//)\mu}(\mathbf{p}) + e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) \right) \frac{a^{(//)}(\mathbf{p}) + a^{(4)}(\mathbf{p})}{2} + \lambda p_\mu \\ &= e^{(+)\mu}(\mathbf{p})a^{(-)}(\mathbf{p}) + e^{(-)\mu}(\mathbf{p})a^{(+)}(\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{p}^\mu}{|\mathbf{p}|} \frac{a^{(//)}(\mathbf{p}) + a^{(4)}(\mathbf{p})}{2} + \lambda p_\mu \end{aligned} \quad (4.89)$$

より、に比例する項を 0 にするわけだが、演算子は 0 にできないので、電磁場の状態を $|\Psi\rangle$ として導入する。このとき、

$$\Psi(\mathbf{p}, \mu) = \langle \mathbf{p}, \mu | \Psi \rangle = \langle 0 | a_\mu(\mathbf{p}) | \Psi \rangle \Leftarrow |\mathbf{p}, \mu\rangle = a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) | 0 \rangle \quad (4.90)$$

により確率振幅を定義でき、

$$\Psi'(\mathbf{p}, \mu) = \langle 0 | a'_\mu(\mathbf{p}) | \Psi \rangle \quad (4.91)$$

である。そして、(4.89)は

$$\lambda = -\frac{1}{2|\mathbf{p}|} \frac{\langle 0 | a^{(//)}(\mathbf{p}) + a^{(4)}(\mathbf{p}) | \Psi \rangle}{\langle 0 | \Psi \rangle} \quad (4.92)$$

のように λ を設定すれば、

$$\Psi'(\mathbf{p}, \mu) = \langle 0 | e^{(+)\mu}(\mathbf{p})a^{(-)}(\mathbf{p}) + e^{(-)\mu}(\mathbf{p})a^{(+)}(\mathbf{p}) | \Psi \rangle \quad (4.93)$$

と書けることになる（問題 1 5）。期待したように 2 成分で電磁波が記述される。電磁理論は、ゲージの取り方によらずに同じ結果を与えることが保証されているので、好きなゲージを選べる。従って、

$$\lambda = -\frac{1}{2|\mathbf{p}|} \frac{\langle 0 | a^{(//)}(\mathbf{p}) + a^{(4)}(\mathbf{p}) | \Psi \rangle}{\langle 0 | \Psi \rangle} \quad (4.94)$$

の特別なパラメータを選んでおけば、 $a'_\mu(\mathbf{p})$ を改めて $a_\mu(\mathbf{p})$ とみなすことにより、確率振幅をはじめから

$$\Psi(\mathbf{p}, \mu) = \langle 0 | e^{(+)\mu}(\mathbf{p}) a^{(-)}(\mathbf{p}) + e^{(-)\mu}(\mathbf{p}) a^{(+)}(\mathbf{p}) | \Psi \rangle \quad (4.95)$$

と与えてよいことになる。また、この定義では、ローレンツ条件は

$$a^{(j)}(\mathbf{p}) | \Psi \rangle = a^{(4)}(\mathbf{p}) | \Psi \rangle \quad (4.96)$$

になる。

量子場のエネルギー

量子場のエネルギーは、

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \left(a^{(1)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(1)}(\mathbf{p}) + a^{(2)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(2)}(\mathbf{p}) + a^{(3)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(3)}(\mathbf{p}) - a^{(4)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(4)}(\mathbf{p}) \right) \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} c \frac{1}{K} \omega(\mathbf{p}) \left(-g^{\lambda\lambda'} a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) \right) \leftarrow g^{\lambda\lambda'} = \text{diag.}(-1, -1, -1, 1) \end{aligned} \quad (4.97)$$

である。ここで、ローレンツ条件

$$a^{(3)}(\mathbf{p}) | \Psi \rangle = a^{(4)}(\mathbf{p}) | \Psi \rangle \quad (4.98)$$

を課すと、

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \langle \Psi | \left(a^{(1)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(1)}(\mathbf{p}) + a^{(2)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(2)}(\mathbf{p}) \right) | \Psi \rangle \quad (4.99)$$

と与えられることに注意しておこう。さて、 \hat{H} は(4.73)の

$$\begin{aligned} a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) &= g^{\lambda\lambda'} \sqrt{\frac{K}{(2\pi\hbar)^3 cX}} \int dx e^{*(\lambda')\mu}(\mathbf{p}) \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\mu(x) + i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{i\omega x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\ a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) &= g^{\lambda\lambda'} \sqrt{\frac{K}{(2\pi\hbar)^3 cX}} \int dx e^{(\lambda)\mu}(\mathbf{p}) \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\mu(x) - i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\omega x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (4.100)$$

を用いて書き換えることができ、

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \left(-g^{\lambda\lambda'} a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) \right) \\ &= -g^{\lambda\lambda'} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \sqrt{\frac{K}{(2\pi\hbar)^3 cX}} \sqrt{\frac{K}{(2\pi\hbar)^3 cX}} \\ &\quad \cdot \left(\begin{array}{l} g^{\lambda\alpha} \int dx e^{(\alpha)\mu}(\mathbf{p}) \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\mu(x) - i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\omega x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\ g^{\lambda'\beta} \int dx' e^{*(\beta)\nu}(\mathbf{p}) \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\nu(x') + i \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left(\frac{i\omega x'^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}'}{\hbar}\right) \end{array} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \end{aligned} \quad (4.101)$$

である。(4.97)から分かるように、 $a(\mathbf{p})$ と $a^\dagger(\mathbf{p})$ の時間については、同時刻なので、(4.101)では、示

してあるように $x'^0 = x^0$ の場合である。従って

$$\hat{H} = -g^{\lambda\lambda'} g^{\lambda\alpha} g^{\lambda'\beta} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{\cancel{X}} \cancel{\ell} \omega(\mathbf{p}) \sqrt{\frac{\cancel{X}}{(2\pi\hbar)^3 \cancel{\ell} X}} \sqrt{\frac{\cancel{X}}{(2\pi\hbar)^3 \cancel{\ell} X}} \left(\int dx dx' e^{(\alpha)\mu}(\mathbf{p}) e^{*(\beta)\nu}(\mathbf{p}) \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\mu(x) - i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \right) \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\nu(x') + i \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \quad (4.102)$$

ここで、

$$g^{\lambda\lambda'} g^{\lambda\alpha} g^{\lambda'\beta} e^{(\alpha)\mu}(\mathbf{p}) e^{*(\beta)\nu}(\mathbf{p}) \stackrel{g^{\lambda\lambda'} g^{\lambda\alpha} = \delta^{\lambda'\alpha}}{=} \delta^{\lambda'\alpha} g^{\lambda'\beta} e^{(\alpha)\mu}(\mathbf{p}) e^{*(\beta)\nu}(\mathbf{p}) = g^{\alpha\beta} e^{(\alpha)\mu}(\mathbf{p}) e^{*(\beta)\nu}(\mathbf{p})$$

より

$$g^{\alpha\beta} e^{(\alpha)\mu}(\mathbf{p}) e^{*(\beta)\nu}(\mathbf{p}) = g^{\mu\nu} \quad (4.103)$$

を用いて

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3 X} \int dp dx dx' \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\mu(x) - i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\nu(x') + i \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3 X} \int dp dx dx' \left[\frac{\omega^2(\mathbf{p})}{\hbar^2} A_\mu(x) A_\nu(x') - i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\nu(x') \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} A_\mu(x) i \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} - i \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} i \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right] \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3 X} \int dp dx dx' \left[\frac{\omega^2(\mathbf{p})}{\hbar^2} A_\mu(x) A_\nu(x') + \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right] \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \\ &\quad - g^{\mu\nu} \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3 X} \int dp dx dx' i \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \left[-\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} A_\nu(x') + A_\mu(x) \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right] \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \end{aligned} \quad (4.104)$$

ここで第 2 項は、

$$g^{\mu\nu} \int dp dx dx' i \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \left[-\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} A_\nu(x') + A_\mu(x) \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right] \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Bigg|_{x^0=x'^0} = 0 \quad (4.105)$$

で消える（問題 16）。従って、

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3 X} \int dp dx dx' \left[\frac{\omega^2(\mathbf{p})}{\hbar^2} A_\mu(x) A_\nu(x') + \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right] \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3 X} \int dp dx dx' \left[\frac{\mathbf{p}^2}{\hbar^2} A_\mu(x) A_\nu(x') + \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right] \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3 X} \int dp dx dx' \left[A_\mu(x) A_\nu(x') (i\nabla)^2 + \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right] \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \end{aligned}$$

(4.106)

ここで、 $(i\nabla)^2$ の項を部分積分によって評価すると

$$\begin{aligned} & \int dp dx dx' A_\mu(x) A_\nu(x') (i\nabla)^2 \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Big|_{x^0=x^0} \\ &= \int dx dx' (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \left((i\nabla)^2 A_\mu(x) \right) A_\nu(x') \Big|_{x^0=x^0} \end{aligned} \quad (4.107)$$

と変形できるので（問題 17）、

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3 X} \left[\int dx dx' (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \left[(-\nabla^2 A_\mu(x)) A_\nu(x') + \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right] \right]_{x^0=x^0} \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{2X} \int dx \left[(-\nabla^2 A_\mu(x)) A_\nu(x) + \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^0} \right] \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{2X} \int dx \left[\nabla(-\nabla A_\mu(x) A_\nu(x)) + \nabla A_\mu(x) \nabla A_\nu(x) + \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^0} \right] \\ &= -g^{\mu\nu} \frac{1}{2X} \left[\int dS \left(\cancel{-\nabla A_\mu(x) A_\nu(x)} \right) + \int dx \left(\nabla A_\mu(x) \nabla A_\nu(x) + \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^0} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2X} \int dx \left(\nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) + \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \end{aligned} \quad (4.108)$$

以上から、

$$\boxed{\hat{H} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} \mathbf{c}\omega(\mathbf{p}) \left(-g^{\lambda\lambda'} a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) \right) = -\frac{1}{2X} \int dx \left(\nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) + \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right)} \quad (4.109)$$

が、電磁場のエネルギーを与える。エネルギーの係数の負符号は見かけ上であり、物理自由度

の $A^{1,2}$ に対しては、 $\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} = \left(\frac{\partial A^0(x)}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial A^1(x)}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial A^2(x)}{\partial x^0} \right)^2 - \left(\frac{\partial A^3(x)}{\partial x^0} \right)^2$ になるので、

$\hat{H} = \frac{1}{2} \int dx \left(\left(\frac{\partial A^1(x)}{\partial x^0} \right)^2 + \left(\frac{\partial A^2(x)}{\partial x^0} \right)^2 + \dots \right)$ として正になっている。

量子場のラグランジアン

さて、エネルギーが求まったので、そのエネルギー密度を $\mathcal{H}(x)$ で表すと、

$$\hat{H} = \int dx : \mathcal{H}(x) : \equiv -\frac{1}{2X} \int dx : \nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) + \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} : \quad (4.110)$$

とわかる。つまり、

$$\mathcal{H}(x) = -\frac{1}{2X} \left(\nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) + \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \quad (4.111)$$

になる。このエネルギー密度は、ラグランジアン密度（ $\mathcal{L}(x)$ とする）から、

$$\mathcal{H}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^0} \right)} \frac{\partial A^\mu}{\partial x^0} - \mathcal{L}(x) \quad (4.112)$$

と与えられる（「付録：ラグランジアン密度とエネルギー密度」ファイル）。 $\mathcal{L}(x)$ として

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2X} \left(\nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) - \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \quad (4.113)$$

をとればよいことが分かる（問題 18）。この表記は、もう少しコンパクトになり

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2X} (\partial^\nu A^\mu(x)) (\partial_\nu A_\mu(x)) \quad (4.114)$$

である。更に、

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4X} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \text{with } \partial^\mu A_\mu(x) = 0 \quad (4.115)$$

と表わせる（問題 19）。この $\mathcal{L}(x)$ を用いると(4.111)と一致することがわかる。以上から、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= -\frac{1}{4X} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)) \quad \text{with } \partial^\mu A_\mu(x) = 0 \\ &= \frac{1}{2X} \left(\nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) - \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) = -\frac{1}{2X} (\partial^\nu A^\mu(x)) (\partial_\nu A_\mu(x)) \\ \mathcal{H}(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_0 A^\mu)} \partial_0 A^\mu - \mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2X} \left(\nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) + \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \end{aligned} \quad (4.116)$$

が量子場のラグランジアン密度とエネルギー密度になる。とくに、(4.17)を用いて、ラグランジアン密度を \mathbf{E}, \mathbf{B} であらわすと、

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4X} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2X} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \cdot \frac{\mathbf{E}}{c} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) \quad (4.117)$$

を得る（問題 20）。

量子場と電磁エネルギー

場の理論で求めたエネルギーが、(4.65)の係数 X をどう調整したら真空中の電磁気学のエネルギー(4.34)を与えるかを調べておかないといけない。(4.34)を、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A} \right) \quad (4.118)$$

を用いて、 A^μ を書き換える。物理的な自由度は、(4.93)の場合、 $A_0 \left(= \frac{\phi}{c} \right) = 0$ と見做せるので、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad A^\mu = (0, \mathbf{A}) \quad (4.119)$$

である。電磁気学のエネルギー(4.34)より、

$$E_{em} = \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \cdot \frac{\mathbf{E}}{c} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{c \partial t} + \nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \right) \quad (4.120)$$

になるので、(4.8)と(4.11)より

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})(\nabla \times \mathbf{A}) &= \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{ij'k'} \nabla_j \mathbf{A}_k \nabla_{j'} \mathbf{A}_{k'} = (\delta^{jj'} \delta^{kk'} - \delta^{jk'} \delta^{kj'}) \nabla_j \mathbf{A}_k \nabla_{j'} \mathbf{A}_{k'} \\ &= \nabla_j \mathbf{A}_k \nabla_j \mathbf{A}_k - \nabla_j \mathbf{A}_k \nabla_k \mathbf{A}_j \end{aligned} \quad (4.121)$$

を用いて、 $x^0 = ct$ を考慮して

$$E_{em} = \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0} + \nabla_j \mathbf{A}_k \cdot \nabla_j \mathbf{A}_k - \nabla_j \mathbf{A}_k \cdot \nabla_k \mathbf{A}_j \right) \quad (4.122)$$

を得る。ここで、第3項は、真空中の光子に適用したローレンツ条件： $\partial_\mu A^\mu = 0$ の $\nabla \mathbf{A} = 0$ の結果消える。つまり、第2項は、部分積分を2回すると

$$\text{第2項} = E_{em} = \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{x} (\nabla \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A}) = 0 \quad (4.123)$$

になるからである（問題21）。従って、(4.122)は、

$$E_{em} = \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0} + \nabla_j \mathbf{A}_k \nabla_j \mathbf{A}_k \right) \quad (4.124)$$

を得る。(4.124)は、4次元ベクトルに書き換えるように、 $A^0 A^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^\mu A_\mu \left(= \sum_{\mu=0}^3 A^\mu A_\mu \right)$ を参考

にして、 $A^0 = 0$ を付け加えて

$$\begin{aligned} E_{em} &= -\frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial A^0}{\partial x^0} \frac{\partial A^0}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^0} + \nabla_j A^0 \nabla_j A^0 - \nabla_j \mathbf{A}_k \nabla_j \mathbf{A}_k \right) \\ &= -\frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} + \nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) \right) \end{aligned} \quad (4.125)$$

である。従って、

$$E_{em} = \int d\mathbf{x} \mathcal{E}(x) \leftarrow \mathcal{E}(x) = -\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} + \nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) \right) \quad (4.126)$$

を得る。比較する量子場のエネルギーは、

$$\hat{H} = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}(x) \leftarrow \mathcal{H}(x) = -\frac{1}{2X} \left(\nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) + \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) \quad (4.127)$$

であるので、比較すれば、(4.126)と同じ、場の理論での光子のエネルギーは、

$$X = \mu_0 \quad (4.128)$$

で与えられる。つまり、(4.65)において

$$\left[A_\mu(x'), \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^0} \right]_{x'_0=x_0} = -i\hbar c \mu_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g_{\mu\nu} \quad (4.129)$$

を要請することになる。従って、(4.68)は、(4.129)を用いて

$$\begin{aligned}
A_\mu(x) &= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(a_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) + a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right) \Leftarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\hbar^2 c \mu_0}{(2\pi\hbar)^3 K(\mathbf{p})}} \\
a_\mu(\mathbf{p}) &= \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)}(\mathbf{p}), \quad a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^4 e_\mu^{(\lambda)*}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{p}) \\
[A_\mu(x), A_\nu(x')] &= -g_{\mu\nu} \frac{\hbar^2 c \mu_0}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(\exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \right) \Leftarrow p^0 = \omega(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}| \\
&= -g_{\mu\nu} \frac{\hbar^2 c \mu_0}{(2\pi\hbar)^3} \int d^4 p \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \Leftarrow p^0 = (-\infty, \infty) \\
&= -g_{\mu\nu} \mu_0 [\phi(x), \phi(x')] \Big|_{m=0} \\
[A_\mu(x), A_\nu(x')] \Big|_{x^0=x'^0} &= 0 \\
\left[A_\mu(x), \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'^0} \right] \Big|_{x'_0=x_0} &= \left[A_\mu(x'), \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^0} \right] \Big|_{x'_0=x_0} = -i\hbar c \mu_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') g_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

(4.130)

と変更され、更に、

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int dx : \mathcal{H}(x) := -\frac{1}{\mu_0} \int d^4 p \frac{1}{K} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) c\omega(\mathbf{p}) \sum_{\mu=0}^3 : a^{\mu\dagger}(\mathbf{p}) a_\mu(\mathbf{p}) : \\
&= -\frac{1}{\mu_0} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \sum_{\mu=0}^3 : a^{\mu\dagger}(\mathbf{p}) a_\mu(\mathbf{p}) : \\
&= \frac{1}{\mu_0} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) : a^{(1)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(1)}(\mathbf{p}) + a^{(2)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(2)}(\mathbf{p}) + a^{(3)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(3)}(\mathbf{p}) - a^{(4)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(4)}(\mathbf{p}) : \\
&= -\frac{1}{2\mu_0} \int dx : \nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) + \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} : \\
\mathcal{L}(x) &= -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)) \quad \text{with} \quad \partial^\mu A_\mu(x) = 0 \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \left(\nabla A^\mu(x) \nabla A_\mu(x) - \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^0} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^0} \right) = -\frac{1}{2\mu_0} (\partial^\nu A^\mu(x)) (\partial_\nu A_\mu(x))
\end{aligned}$$

(4.131)

である。⁶

荷電粒子に働く電磁力とラグランジアン（古典力学）

さて、質量 m で電荷 q を持つ荷電粒子が光子から受ける力は、古典力学では

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = q\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \quad \left(\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \quad (4.132)$$

である。この運動方程式は、ラグランジュの運動方程式から出すことができ、ラグランジュ関

⁶ $A^\mu = (\phi, c\mathbf{A})$ の場合は、係数 $\frac{1}{\mu_0}$ が ε_0 に変わる。

数 L 用いて

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3 \text{ for } x,y,z) \quad (4.133)$$

である。 L として

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + q \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - q\phi(\mathbf{x}, t) \quad (4.134)$$

を用いると、(4.133)から(4.132)が導かれる。つまり、

- $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right)$ は . . .

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + q \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - q\phi(\mathbf{x}, t) \right) = m\dot{x}_i + qA_i(\mathbf{x}, t) \\ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) &= \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i + qA_i(\mathbf{x}, t)) = m\ddot{x}_i + q \frac{d}{dt} A_i(\mathbf{x}, t) \\ \frac{d}{dt} A_i(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial A_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial A_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{aligned} \right. \quad (4.135) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) &= m\ddot{x}_i + q \left(\sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial A_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial A_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

- $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ は . . .

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + q \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - q\phi(\mathbf{x}, t) \right) = q \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial A_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} - q \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \quad (4.136)$$

を用いて、(4.133)より

$$m\ddot{x}_i = -q \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} - q \frac{\partial A_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + q \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \left(\frac{\partial A_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \right) \quad (4.137)$$

と計算される。(4.137)で、成分をベクトルに変更：

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}}_i \rightarrow \ddot{\mathbf{x}}, \quad \dot{x}_i \rightarrow \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \nabla \\ \mathbf{A}_i(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (4.138)$$

して、

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -q \left(\nabla \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right) + q \left[\nabla (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right] \quad (4.139)$$

を得る。ここで、 $\nabla (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ に

$$\text{【公式】 } \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (4.140)$$

を用いて、 $\nabla_i \dot{x} = 0$ に注意して、

$$\nabla(\dot{x}A(\mathbf{x},t)) - (\dot{x}\nabla)A(\mathbf{x},t) = \dot{x} \times (\nabla \times A(\mathbf{x},t)) \quad (4.141)$$

を得るので（問題 2 2）

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -q \left(\frac{\partial A(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \nabla\phi(\mathbf{x},t) \right) + q\dot{\mathbf{x}} \times (\nabla \times A(\mathbf{x},t)) \quad (4.142)$$

を得る（問題 2 3）。(4.5)より

$$m\ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E}(\mathbf{x},t) + q\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}(\mathbf{x},t) \quad (4.143)$$

が得られ、(4.132)と一致する。

(4.143)からハミルトニアン（エネルギー）を計算する事ができて、

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \left(\frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + q\dot{\mathbf{x}} \cdot A(\mathbf{x},t) - q\phi(\mathbf{x},t) \right) \quad (4.144)$$

であるが、

$$\frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p},t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = 0 \quad (4.145)$$

より、

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}} + qA(\mathbf{x},t) \quad (4.146)$$

を得る。(4.144)から、(4.146)を用いて $\dot{\mathbf{x}}$ を消去し

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - qA(\mathbf{x},t))^2 + q\phi(\mathbf{x},t) \quad (4.147)$$

を得る。或いは、

$$H - q\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - qA(\mathbf{x},t))^2 \quad (4.148)$$

である。

量子力学では、(4.148)で演算子 $\hat{x}, \hat{p}, \hat{H}$ に置き換えて、

$$[\hat{H} - q\phi(\hat{x},t)]|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2m} (\hat{p} - qA(\hat{x},t))^2 |\psi(t)\rangle \quad (4.149)$$

を得る。状態 $|\psi(t)\rangle$ に対して、

$$\begin{cases} \hat{H}|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \\ \hat{x}_i |x\rangle = x_i |x\rangle \\ \langle x | \hat{p}_i | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{i} \nabla_i \langle x | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{i} \nabla_i \psi(\mathbf{x},t) \end{cases} \quad (4.150)$$

を用いると、シュレディンガー方程式として

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(\mathbf{x}, t) \right] \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}, t) \right)^2 \psi(\mathbf{x}, t) \quad (4.151)$$

を得る。(4.151)は、次の変換

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = U\psi(\mathbf{x}, t) \Leftarrow U = \exp\left(-i \frac{q}{\hbar} \Lambda(\mathbf{x}, t)\right) \quad (4.152)$$

$$\begin{cases} \phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \nabla \Lambda(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (4.153)$$

で不変になることが分かる。つまり、

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi'(\mathbf{x}, t) \right] \psi'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}'(\hat{\mathbf{x}}, t) \right)^2 \psi'(\mathbf{x}, t) \quad (4.154)$$

に、(4.153)を用いれば、(4.154)から(4.151)が得られることになる（問題 2 4）。従って、

- $\begin{cases} \psi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \\ \psi'(\mathbf{x}, t), \phi'(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) \end{cases}$ のどちらを用いても同じ物理結果

が得られる。(4.153)を 4 元ベクトル表記：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^\mu} : \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu} : \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla \right) \end{cases} \begin{cases} A^\mu : \left(\frac{1}{c} \phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right) = (A^0(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \\ A_\mu : \left(\frac{1}{c} \phi(\mathbf{x}, t), -\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right) = (A^0(\mathbf{x}, t), -\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \end{cases} \quad (4.155)$$

を用いれば

$$\frac{\phi'(\mathbf{x}, t)}{c} = \frac{\phi(\mathbf{x}, t)}{c} + \frac{\partial}{c\partial t} \Lambda(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} A^0(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x^0} \Lambda(\mathbf{x}, t) \\ A_0(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_0} \Lambda(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (4.156)$$

$$\begin{cases} A'_i(\mathbf{x}, t) = A_i(\mathbf{x}, t) - \nabla_i \Lambda(\mathbf{x}, t) \Rightarrow A'^i(\mathbf{x}, t) = A^i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} \Lambda(\mathbf{x}, t) \\ -A'_i(\mathbf{x}, t) = -A_i(\mathbf{x}, t) + \nabla_i \Lambda(\mathbf{x}, t) \Rightarrow A'_i(\mathbf{x}, t) = A_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x^i} \Lambda(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (i=1, 2, 3)$$

と表せるので、結局、

$$\begin{cases} A'^\mu(\mathbf{x}, t) = A^\mu(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Lambda(\mathbf{x}, t) \\ A'_\mu(\mathbf{x}, t) = A_\mu(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Lambda(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (4.157)$$

とまとめられる（問題 2 5）。これは、ゲージ変換(4.39)と一致する。

ゲージ変換と電磁相互作用

電磁相互作用は、相互作用のゲージ不変性により決められている。そのため、(4.152)と(4.157)の変換が重要になる。ここで、(4.151)より示唆される微分として

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(\mathbf{x}, t) \right] \psi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}, t) \right)^2 \psi(\mathbf{x}, t) \\ \Rightarrow \begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(\mathbf{x}, t) = i\hbar c \frac{\partial}{\partial x^0} - iq c A_0(\mathbf{x}, t) = i\hbar c \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + i \frac{q}{\hbar} A_0(\mathbf{x}, t) \right) \\ \frac{\hbar}{i} \nabla_j - qA_j(\hat{\mathbf{x}}, t) = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i \frac{q}{\hbar} (-A_j(\mathbf{x}, t)) \right) = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i \frac{q}{\hbar} A_j(\mathbf{x}, t) \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.158)$$

より、4次元表記にまとめられ

$$\begin{aligned} D_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{q}{\hbar} A_\mu(\mathbf{x}, t) \leftarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} : \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right), A_\mu : (A^0, -\mathbf{A}) \\ D^\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} + i \frac{q}{\hbar} A^\mu(\mathbf{x}, t) \leftarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} : \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right), A^\mu : (A^0, \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (4.159)$$

を用いると良い。(4.159)の

- D_μ, D^μ を **共変微分**

という。従って、(4.151)はの微分演算子は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(\mathbf{x}, t) = i\hbar c D_0 = i\hbar c D^0 \quad (4.160)$$

$$\frac{\hbar}{i} \nabla_i - qA_i(\hat{\mathbf{x}}, t) = -\frac{\hbar}{i} D_i = \frac{\hbar}{i} D^i \quad (i=1,2,3) \quad (4.161)$$

と書き換えられる。場が(4.152)のゲージ変換を受けるとき、

$$\begin{cases} D'^\mu \psi'(\mathbf{x}, t) = U D^\mu \psi(\mathbf{x}, t) \\ D'_\mu \psi'(\mathbf{x}, t) = U D_\mu \psi(\mathbf{x}, t) \end{cases} \leftarrow U = \exp\left(-\frac{iq\Lambda(\mathbf{x}, t)}{\hbar}\right) \quad (4.162)$$

である（問題26）。

微分を共変微分におきかえると電磁相互作用がわかる。これを

- 極小相互作用／ミニマル相互作用（**minimal interactions**）

という。ここで、 D^μ, D_μ の空間成分を \mathbf{D} として

$$i\hbar \mathbf{D} = i\hbar \nabla + q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \leftarrow D_\mu : (D^0, \mathbf{D}), D^\mu : (D^0, -\mathbf{D}) \quad (4.163)$$

とおけば、 $\phi(x)$ や $\psi(x)$ にたいして、「第二章 ボーズ量子場：スカラー場」の(2.123)と「第三章 フ

エルミ量子場：スピノール場」の(3.92)より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= |D_\mu \phi(x)|^2 - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 |\phi(x)|^2, \quad \mathcal{H}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi + \partial_0 \phi^* \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi^*)} - \mathcal{L}(x) \\ \mathcal{H}(x) &= |D^0 \phi(x)|^2 + |\mathbf{D}\phi(x)|^2 + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 |\phi(x)|^2 \end{aligned} \quad (4.164)$$

$$\mathcal{L}(x) = \overline{\psi}(x) \left(i \not{D} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) \quad (\not{D} = \gamma^\mu D_\mu = \gamma^0 D_0 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{D})$$

$$\mathcal{H}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \psi_\alpha)} \partial_0 \psi_\alpha + \partial_0 \overline{\psi}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \overline{\psi}_\alpha)} - \mathcal{L}(x) = \overline{\psi}(x) \left(-i \boldsymbol{\gamma} \nabla - q \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x)$$
(4.165)

を得る。このとき、

- ラグランジアン密度は、**ゲージ不変性**を満たしている事が分かる（問題 27）。

さて、 $\phi(x)$ や $\psi(x)$ の光子との相互作用項（ $e \rightarrow 0$ で消える項）を取り出し、添え字 int で表し、電荷をそれぞれ

$$\begin{cases} eq_\phi \cdots \phi(x) \\ eq_\psi \cdots \psi(x) \end{cases}$$
(4.166)

とすれば、相互作用項として、

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\text{int}} = -i \frac{eq_\phi}{\hbar} \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi A^\mu + \left(\frac{eq_\phi}{\hbar} \right)^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2 - \frac{eq_\psi}{\hbar} \overline{\psi} A \psi \\ \mathcal{H}_{\text{int}} = -i \frac{eq_\phi}{\hbar} \left(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi A^0 - \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi A^\mu \right) - \left(\frac{eq_\phi}{\hbar} \right)^2 |\phi|^2 A^\mu A_\mu + \frac{eq_\psi}{\hbar} \overline{\psi} A \psi \end{cases}$$
(4.167)

を得る。ここで、 $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ は「第二章 ポーズ量子場：スカラー場」の(2.64)で導入された

$$\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi = \phi^\dagger (\partial_\mu \phi) - (\partial_\mu \phi^\dagger) \phi$$
(4.168)

である。

Appendix 1:ゲージ変換

電磁場は質量の無い光子であり、 $\partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu = 0$ で記述される。 A^μ のフーリエ成分を

$$a_\mu(\mathbf{p}), a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \leftarrow \text{演算子ではない} \quad (4.169)$$

とすると、 A^μ は、

$$A_\mu(x) = \int \frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left[a_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) + a_\mu^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right] \quad (4.170)$$

と記述できるので、

$$(\partial_\mu \partial^\mu) A^\nu = 0 \Rightarrow (E^2 - \mathbf{p}^2) a_\mu(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.171)$$

を得ることになる。ローレンツ条件： $\partial_\mu A^\mu = 0$ とゲージ変換： $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ はそれぞれ、

$$p^\mu a_\mu(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.172)$$

$$a'_\mu(\mathbf{p}) = a_\mu(\mathbf{p}) + \lambda p_\mu \quad (4.173)$$

で与えられる。ここでは、

$$\Lambda(x) = \int \frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left[\lambda(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) + \lambda^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right] \quad (4.174)$$

とすればよい。ゲージ変換より、 $a'_0(\mathbf{p}) = a_0(\mathbf{p}) + \lambda p_0 = 0$ となる λ

$$\lambda = -\frac{a_0(\mathbf{p})}{p_0} \quad (4.175)$$

をいつでも取ることができ、⁷ ゲージ不変性より $a_\mu(\mathbf{p})$ でも $a'_\mu(\mathbf{p})$ でも同じ物理であることが保

証されるので、 $a_0(\mathbf{p}) = 0$ と設定してもよい。このとき、ローレンツ条件より、

$$p^\mu a_\mu(\mathbf{p}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{p}) = -\sum_{i=1,2,3} p^i a^i(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.176)$$

である。対応する A^μ での表記では

$$\partial^\mu A_\mu(x) = -\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0 \quad (4.177)$$

である。

Appendix 2:電磁場の解

4 つのローレンツベクトル $e_\mu^{(1,2,3,4)}(\mathbf{p})$:

⁷ a が演算子の場合には、この関係式は成り立たない。その場合には、光子の状態を記述する確率振幅 $|\Psi\rangle$ を導入して、 $a_0(\mathbf{p})|\Psi\rangle = -p_0\lambda|\Psi\rangle$ を要請することになる。

$$e^{(1)\mu}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(2)\mu}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(3)\mu}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ for } \begin{pmatrix} \mu=0 \\ \mu=1 \\ \mu=2 \\ \mu=3 \end{pmatrix} \quad (4.178)$$

$$\Rightarrow e_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{p})e^{(\lambda')\mu*}(\mathbf{p}) = g^{\lambda\lambda'} = \text{diag.}(-1, -1, -1, 1), \sum_{\lambda, \lambda'=1}^4 g^{\lambda\lambda'} e_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{p})e_{\nu}^{(\lambda')*}(\mathbf{p}) = g_{\mu\nu}$$

を用いると、対応する 4 つの $a^{(1,2,3,4)}(\mathbf{p}), a^{(1,2,3,4)\dagger}(\mathbf{p})$ より $a_{\mu}(\mathbf{p})$ ($\mu=0,1,2,3$) は、

$$a^{\mu}(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^4 e^{(\lambda)\mu}(\mathbf{p})a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} a^{(4)}(\mathbf{p}) \\ a^{(1)}(\mathbf{p}) \\ a^{(2)}(\mathbf{p}) \\ a^{(3)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (4.179)$$

と与えることができる。また、

$$\begin{aligned} e_{\mu}^{*(\lambda)}(\mathbf{p})a^{\mu}(\mathbf{p}) &= \sum_{\lambda'=1}^4 e_{\mu}^{*(\lambda)}(\mathbf{p})e^{(\lambda')\mu}(\mathbf{p})a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) \Leftarrow e_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{p})e^{(\lambda')\mu*}(\mathbf{p}) = g^{\lambda\lambda'} = \text{diag.}(-1, -1, -1, 1) \\ &= \sum_{\lambda'=1}^4 g^{\lambda\lambda'} a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) = g^{\lambda\lambda'} a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.180)$$

より、

$$e_{\mu}^{*(\lambda)}(\mathbf{p})a^{\mu}(\mathbf{p}) = g^{\lambda\lambda'} a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) \left(\equiv \sum_{\lambda'=1}^4 g^{\lambda\lambda'} a^{(\lambda')}(\mathbf{p}) \right) \quad (4.181)$$

このとき、

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{p}) &\Rightarrow a^{(4)}(\mathbf{p}) = 0 \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{p}) &= \sum_{\lambda=1}^4 \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{p})a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^3 \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{p})a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = 0 \Rightarrow \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = 0 \quad (\lambda=1,2,3) \end{aligned} \quad (4.182)$$

と表される。

ここで、射影演算子の

$$P^{ij} \equiv \delta^{ij} - \frac{\mathbf{p}^i \mathbf{p}^j}{|\mathbf{p}|^2} (= P^{ji}) \quad (4.183)$$

より

$$\sum_{j=1,2,3} P^{ij} \mathbf{p}^j = \sum_{j=1,2,3} \left(\delta^{ij} - \frac{\mathbf{p}^i \mathbf{p}^j}{|\mathbf{p}|^2} \right) \mathbf{p}^j = \mathbf{p}^i - \frac{\mathbf{p}^i}{|\mathbf{p}|^2} \sum_{j=1,2,3} \mathbf{p}^j \mathbf{p}^j = \mathbf{p}^i - \frac{\mathbf{p}^i}{|\mathbf{p}|^2} \mathbf{p}^2 = 0 \quad (4.184)$$

なので任意のベクトルを $\mathbf{n}^{(\lambda)}$ とすれば

$$\mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{i,j=1,2,3} P^{ij} \mathbf{n}^{(\lambda)} \Leftrightarrow \mathbf{e}^{(\lambda)i} \mathbf{p}^i = \mathbf{e}^{(\lambda)} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (\mathbf{e}^{(\lambda)} \text{ と } \mathbf{p} \text{ は常に直行}) \quad (4.185)$$

がわかる。従って $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = 0$ を満たす $\mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{p})$ として

$$\mathbf{e}^{(\lambda)i}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1,2,3} P^{ij} \mathbf{n}^{(\lambda)j} \quad (\text{for } \forall \mathbf{n}^{(\lambda)}) \quad (4.186)$$

とあらわすことができる。以上から、

$$a_{\mu}(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^3 e_{\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) \quad \text{with } e^{(\lambda)i}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1,2,3} P^{ij} \mathbf{n}^{(\lambda)j}, a^{(4)}(\mathbf{p}) = 0 \quad (4.187)$$

スピン 1 の演算子は

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{for } \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{a}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (4.188)$$

であり、進行方向の成分を

$$S_p \equiv \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \mathbf{S} \quad (4.189)$$

で表すと

$$S_p \equiv \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \mathbf{S} = \frac{\mathbf{p}^1 S^1 + \mathbf{p}^2 S^2 + \mathbf{p}^3 S^3}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 0 & -ip^3 & ip^2 \\ ip^3 & 0 & -ip^1 \\ -ip^2 & ip^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.190)$$

そこで

$$\begin{aligned} S_p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{1}{|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 0 & -ip^3 & ip^2 \\ ip^3 & 0 & -ip^1 \\ -ip^2 & ip^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ip^3 y + ip^2 z = |\mathbf{p}| Sx = sx \\ ip^3 x - ip^1 z = |\mathbf{p}| Sy = sy \\ -ip^2 x + ip^1 y = |\mathbf{p}| Sz = sz \end{cases} \quad (s = |\mathbf{p}| S) \\ \Rightarrow \begin{cases} -ip^3 ys + ip^2(-ip^2 x + ip^1 y) = s^2 x \\ ip^3 xs - ip^1(-ip^2 x + ip^1 y) = s^2 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-ip^3 s + ip^2 ip^1) y = (|\mathbf{p}| s^2 + ip^2 ip^2) x \\ (ip^3 s + ip^1 ip^2) x = (s^2 + ip^1 ip^1) y \end{cases} \quad (4.191) \\ \Rightarrow \frac{-ip^3 s + ip^2 ip^1}{s^2 + ip^1 ip^1} = \frac{s^2 + ip^2 ip^2}{ip^3 s + ip^1 ip^2} \Rightarrow \frac{-ip^3 s - \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2}{s^2 - \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^1} = \frac{s^2 - \mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2}{ip^3 s - \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2} \Rightarrow s^2 (s^2 - |\mathbf{p}|^2) = 0 \\ \Rightarrow s = 0, s = \pm |\mathbf{p}| \Rightarrow S = 0, S = \pm 1 \end{aligned}$$

より、固有値は期待通り、 $S = 0, S = \pm 1$ になる。後ほどのため、

$$\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.192)$$

とする。対応する固有状態は・・・

□ $S=0$ （縦波成分で運動量に平行）

$$S_p \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 0 & -ip^3 & ip^2 \\ ip^3 & 0 & -ip^1 \\ -ip^2 & ip^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -ip^3 y + ip^2 z = 0 \\ ip^3 x - ip^1 z = 0 \\ -ip^2 x + ip^1 y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{比例係数 } \eta} \begin{cases} x = \eta \mathbf{p}^1 \\ y = \eta \mathbf{p}^2 \\ z = \eta \mathbf{p}^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \eta \mathbf{p} \quad (4.193)$$

□ $S=\pm 1$ （横波成分で運動量に垂直：物理自由度としての 2 成分を与える）

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbf{p}^3 & \mathbf{p}^2 \\ i\mathbf{p}^3 & 0 & -i\mathbf{p}^1 \\ -i\mathbf{p}^2 & i\mathbf{p}^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -i\mathbf{p}^3 y + i\mathbf{p}^2 z = S|\mathbf{p}|x \\ i\mathbf{p}^3 x - i\mathbf{p}^1 z = S|\mathbf{p}|y \\ -i\mathbf{p}^2 x + i\mathbf{p}^1 y = S|\mathbf{p}|z \end{cases} \quad (S = \pm 1) \\
\Rightarrow \begin{cases} -i\mathbf{p}^3 y S|\mathbf{p}| + i\mathbf{p}^2 (-i\mathbf{p}^2 x + i\mathbf{p}^1 y) = S^2 |\mathbf{p}|^2 x = |\mathbf{p}|^2 x & \left\{ \begin{aligned} (-i\mathbf{p}^3 S|\mathbf{p}| + i\mathbf{p}^2 i\mathbf{p}^1) y &= (|\mathbf{p}|^2 + i\mathbf{p}^2 i\mathbf{p}^2) x \\ (i\mathbf{p}^3 S|\mathbf{p}| + i\mathbf{p}^1 i\mathbf{p}^2) x &= (|\mathbf{p}|^2 + i\mathbf{p}^1 i\mathbf{p}^1) y \end{aligned} \right. \\
i\mathbf{p}^3 x S|\mathbf{p}| - i\mathbf{p}^1 (-i\mathbf{p}^2 x + i\mathbf{p}^1 y) = S^2 |\mathbf{p}|^2 y = |\mathbf{p}|^2 y & \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (-i\mathbf{p}^3 S|\mathbf{p}| + i\mathbf{p}^2 i\mathbf{p}^1) y &= (|\mathbf{p}|^2 + i\mathbf{p}^2 i\mathbf{p}^2) x \\ (i\mathbf{p}^3 S|\mathbf{p}| + i\mathbf{p}^1 i\mathbf{p}^2) x &= (|\mathbf{p}|^2 + i\mathbf{p}^1 i\mathbf{p}^1) y \end{aligned} \right.
\end{cases} \\
\Rightarrow y = \frac{i\mathbf{p}^3 S|\mathbf{p}| - \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2}{|\mathbf{p}|^2 - \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^1} x = \frac{i\mathbf{p}^3 S|\mathbf{p}| - \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} x \Rightarrow z = \frac{-i\mathbf{p}^2 x + i\mathbf{p}^1 y}{S|\mathbf{p}|} = \frac{i}{S|\mathbf{p}|} (\mathbf{p}^1 y - \mathbf{p}^2 x) \\
z = \frac{i}{S|\mathbf{p}|} \left(\mathbf{p}^1 \frac{i\mathbf{p}^3 S|\mathbf{p}| - \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} - \mathbf{p}^2 \right) x = \frac{i}{S|\mathbf{p}|} \frac{i\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^3 S|\mathbf{p}| - \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}^2 (\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3)}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} x \\
= \frac{i}{S|\mathbf{p}|} \frac{i\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^3 S|\mathbf{p}| - \mathbf{p}^2 |\mathbf{p}|^2}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} x = \frac{i}{S} \frac{i\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^3 S - \mathbf{p}^2 |\mathbf{p}|}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} x = -\frac{1}{S} \frac{\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^3 S + i\mathbf{p}^2 |\mathbf{p}|}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} x \\
(*) (\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2 + i\mathbf{p}^3 S|\mathbf{p}|) (\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2 - i\mathbf{p}^3 S|\mathbf{p}|) = (|\mathbf{p}|^2 - \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^1) (|\mathbf{p}|^2 - \mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2) \quad (4.194)
\end{aligned}$$

以上から、規格化した状態を $\mathbf{e}^{(\pm, //)}(\mathbf{p})$ で表すと $\dots S^3 \mathbf{e}^{(\pm)}(\mathbf{p}) = \pm \mathbf{e}^{(\pm)}(\mathbf{p})$, $S^3 \mathbf{e}^{(//)}(\mathbf{p}) = 0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{(+)}(\mathbf{p}) &= \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\mathbf{p}^3 |\mathbf{p}| - \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} \\ -\frac{\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^3 + i\mathbf{p}^2 |\mathbf{p}|}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} \end{pmatrix} \\
\mathbf{e}^{(-)}(\mathbf{p}) &= \frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\mathbf{p}^3 |\mathbf{p}| + \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} \\ -\frac{\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^3 + i\mathbf{p}^2 |\mathbf{p}|}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(//)}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \\
&\quad (4.195)
\end{aligned}$$

ここに、物理自由度は、 $\mathbf{e}^{(\pm)}(\mathbf{p})$ であり、 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}^{(\pm)}(\mathbf{p}) = 0$ を自動的に満たす。規格化因子 N は

$$\begin{aligned}
N &= |\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3|^2 + |i\mathbf{p}^3 |\mathbf{p}| - \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2|^2 + |\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^3 + i\mathbf{p}^2 |\mathbf{p}||^2 \\
&= (\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3)^2 + \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2 \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3 |\mathbf{p}|^2 + \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^3 + \mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 |\mathbf{p}|^2 \\
&= (\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3)^2 + (\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3) \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^1 + (\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3) |\mathbf{p}|^2 \\
&= (\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3)^2 + (\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3) (\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^1 + |\mathbf{p}|^2) \\
&= (\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3) (\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3 + \mathbf{p}^1 \mathbf{p}^1 + |\mathbf{p}|^2)
\end{aligned}$$

$$= (\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3) (|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}|^2) = 2(\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3) |\mathbf{p}|^2 \quad (4.196)$$

なので、

$$\mathbf{e}^{(+)}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3}{2|\mathbf{p}|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2 - i\mathbf{p}^3 |\mathbf{p}|}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} \\ \frac{\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^3 + i\mathbf{p}^2 |\mathbf{p}|}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} \end{pmatrix} \quad (4.197)$$

$$\mathbf{e}^{(-)}(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3}{2|\mathbf{p}|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^2 + i\mathbf{p}^3 |\mathbf{p}|}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} \\ -\frac{\mathbf{p}^1 \mathbf{p}^3 - i\mathbf{p}^2 |\mathbf{p}|}{\mathbf{p}^2 \mathbf{p}^2 + \mathbf{p}^3 \mathbf{p}^3} \end{pmatrix}, \mathbf{e}^{(//)}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

になる。ここで、進行方向が 3 軸方向になる座標系に移れば、

$$\mathbf{e}^{(+)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}^{(-)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}^{(//)}(\mathbf{p}) = \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\sigma = \frac{\mathbf{p}^3}{|\mathbf{p}^3|} = \pm 1 \right) \quad (4.198)$$

元の $\mathbf{e}^{(1,2,3)}(\mathbf{p})$ で表すと・・・

$$\mathbf{e}^{(+)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sigma \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{p}) + i\sigma \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{e}^{(-)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sigma \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{p}) - i\sigma \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2}}, \mathbf{e}^{(//)}(\mathbf{p}) = \sigma \mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{p}) \quad (4.199)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{e}^{(1)}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{e}^{(+)}(\mathbf{p}) + \mathbf{e}^{(-)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2}}, \mathbf{e}^{(2)}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{e}^{(+)}(\mathbf{p}) - \mathbf{e}^{(-)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2}i\sigma}, \mathbf{e}^{(3)}(\mathbf{p}) = \sigma \mathbf{e}^{(//)}(\mathbf{p})$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda=1}^3 \mathbf{e}^{(\lambda)}(\mathbf{p}) a^{(\lambda)}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{e}^{(+)}(\mathbf{p}) + \mathbf{e}^{(-)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2}} a^{(1)}(\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{e}^{(+)}(\mathbf{p}) - \mathbf{e}^{(-)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2}i\sigma} a^{(2)}(\mathbf{p})$$

$$+ \sigma \mathbf{e}^{(//)}(\mathbf{p}) a^{(3)}(\mathbf{p}) \quad (4.200)$$

$$= \mathbf{e}^{(+)}(\mathbf{p}) \frac{a^{(1)}(\mathbf{p}) - i\sigma a^{(2)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}^{(-)}(\mathbf{p}) \frac{a^{(1)}(\mathbf{p}) + i\sigma a^{(2)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2}} + \mathbf{e}^{(//)}(\mathbf{p}) \sigma a^{(3)}(\mathbf{p})$$

$$= \mathbf{e}^{(+)}(\mathbf{p}) a^{(-)}(\mathbf{p}) + \mathbf{e}^{(-)}(\mathbf{p}) a^{(+)}(\mathbf{p}) + \mathbf{e}^{(//)}(\mathbf{p}) a^{(//)}(\mathbf{p})$$

ここで

$$a^{(+)}(\mathbf{p}) \equiv \frac{a^{(1)}(\mathbf{p}) + i\sigma a^{(2)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2}}, \quad a^{(-)}(\mathbf{p}) \equiv \frac{a^{(1)}(\mathbf{p}) - i\sigma a^{(2)}(\mathbf{p})}{\sqrt{2}}, \quad a^{(\parallel)}(\mathbf{p}) = \sigma a^{(3)}(\mathbf{p}) \quad (4.201)$$

である。ここに、

$$e^{(1,2,3)\mu}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{(\pm)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{(\parallel)}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad e^{(4)\mu}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad \begin{pmatrix} \mu = 0 \\ \mu = 1 \\ \mu = 2 \\ \mu = 3 \end{pmatrix} \quad (4.202)$$

である。

第 4 章問題

0) ポインティングベクター： $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は、ある領域から毎秒流出するエネルギー量に関する量である。電磁エネルギー： $E_{em} = \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} [\mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})]$ の時間微分に現れること ($\frac{dE_{em}}{dt} = -\int d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{x}) \times \mathbf{H}(\mathbf{x})) + \dots$) を示せ。(例えば、砂川・電磁気学 228 ページ参照)

1) $\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ij'k'} = \delta_{jj'} \delta_{kk'} - \delta_{jk'} \delta_{kj'}$, $\sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk'} = 2\delta_{kk'}$ を証明せよ。

2) 真空中では $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$ であるので $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ を(4.16)用いて 4 次元表示にすることができる。

\mathbf{S} は 4 次元 2 階テンソル $s_{\mu\nu}^v$ のテンソルの s_i^0 ($i=1,2,3$) 成分で表せるが、 s_{μ}^v を求めよ。こ

こで、 $F^{00} = 0$ に注意するとよい。

3) (4.15)の $F_{jk} = -\varepsilon_{jki} \mathbf{B}_i$ を導け。

4) (4.19)の $\tilde{F}_{\mu\nu}$ を導け。

5) (4.46)について「 \hat{H} と \hat{N} の表示として負符号に注意」は何を意味するか？

6) (4.51)を導け。

7) (4.53)に習って $[\hat{N}, a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k})] = a^{(\lambda)\dagger}(\mathbf{k})$ から(4.55)導け。

8) (4.56)を導け。

9) (4.61)を導け。

1 0) (4.62)を導け。

1 1) (4.66)を導け。

1 2) (4.58)を導け。

1 3) (4.72)を導け。

1 4) $S_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め、(4.76)の $e^{(\pm, //)}(\mathbf{p})$ と比較せよ。

1 5) (4.91)が(4.92)を用いて(4.93)に設定できることを導け。

1 6) (4.105)を示せ。ここで、演算子の積は Normal Product で定義されている事に注意する。

1 7) (4.107)を示せ。

1 8) (4.113)から $\mathcal{A}(x)$ を導き、(4.111)に一致することを示せ。

1 9) (4.113)が(4.114)と(4.115)に同じであることを示せ。

2 0) (4.115)から(4.117)を導け。

- 2 1) (4.123)を証明せよ。
- 2 2) (4.140)より(4.141)を導け。
- 2 3) (4.139)から(4.142)を求めよ。
- 2 4) 「(4.153)を用いれば、(4.154)から(4.151)が得られることになる」を確認せよ。
- 2 5) (4.153)から(4.157)を導け。
- 2 6) (4.162)の $D'^{\mu}\psi'(\mathbf{x},t) = UD^{\mu}\psi(\mathbf{x},t)$ を導け。
- 2 7) (4.164)と(4.165)でラグランジアン密度がゲージ変換で不変である事を示せ。