

第三章 フェルミ量子場：スピノール場

フェルミ型

ボーズ量子場のエネルギーは、【第二章 ボーズ量子場：スカラー場】の(2.18)より

$$\hat{H} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K(\mathbf{p})} c\omega(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) = \int \frac{1}{K(\mathbf{p})} d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) c\omega(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p})$$

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = 2\omega(\mathbf{p}) K(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \Leftarrow \omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}$$

$$(*) K(-\mathbf{p}) = K(\mathbf{p}) \text{に限る} \quad (3.1)$$

である。¹ 一方、フェルミ型は 4 成分をもち、その成分を $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ で示し、

$$\{a_\alpha(\mathbf{p}), a_\beta(\mathbf{p}')\} = \{a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}), a_\beta^\dagger(\mathbf{p}')\} = 0 \Leftarrow \text{フェルミ統計を満たす} \quad (3.2)$$

$$\{a_\alpha(\mathbf{p}), a_\beta^\dagger(\mathbf{p}')\} = 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\alpha\beta}$$

である（問題 0）。そのとき、フェルミ量子場のエネルギーは

$$\hat{H} = \int d^4 p \frac{1}{K} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) c\omega(\mathbf{p}) \sum_{\alpha=1}^4 a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) a_\alpha(\mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \sum_{\alpha=1}^4 a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) a_\alpha(\mathbf{p}) \quad (3.3)$$

になり、粒子数は

$$\hat{N} = \int d^4 p \frac{1}{K} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \sum_{\alpha=1}^4 a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) a_\alpha(\mathbf{p}) = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} \sum_{\alpha=1}^4 a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) a_\alpha(\mathbf{p}) \quad (3.4)$$

である。正しくは、Normal Product が必要：

$$\hat{H} = \begin{cases} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \sum_{\alpha=1}^4 N(a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) a_\alpha(\mathbf{p})) \\ \text{あるいは} \dots \\ \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \sum_{\alpha=1}^4 : a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) a_\alpha(\mathbf{p}) : \end{cases}, \hat{N} = \begin{cases} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} \sum_{\alpha=1}^4 N(a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) a_\alpha(\mathbf{p})) \\ \text{あるいは} \dots \\ \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} \sum_{\alpha=1}^4 : a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) a_\alpha(\mathbf{p}) : \end{cases} \quad (3.5)$$

である。

フェルミ型の生成・消滅演算子は、「Appendix 1: ディラック方程式の解」の $u_\alpha^{(1,2,3,4)}(\mathbf{p})$ を用いて

$$a_\alpha(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^4 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}), \quad a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^4 u_\alpha^{(i)*}(\mathbf{p}) a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \quad (3.6)$$

で表せる。ここに、 $u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})$ は、「Appendix 1: ディラック方程式の解」の(3.119)と(3.135)の

¹ $K=1$ や $K=(2\pi)^3$ が好まれる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{直交条件} \cdots u^{(j)\dagger}(\mathbf{p})u^{(i)}(\mathbf{p}) \left(= \sum_{\alpha=1}^4 u^{(j)\dagger}(\mathbf{p})_{\alpha} u^{(i)\dagger}(\mathbf{p})_{\alpha} \right) = \delta^{ij} \\ \text{完全性条件} \cdots \sum_{i=1}^4 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} u^{(i)\dagger}(\mathbf{p})_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

より、 $u^{(i)}(\mathbf{p})$ の直交条件と完全性条件を満たす。 $u^{(i)}(\mathbf{p})$ が(3.137)のように、固有ベクトルに当たる。つまり、任意の 4 列ベクトル $a_{\alpha}(\mathbf{p})$ は、固有ベクトル $u^{(i)}(\mathbf{p})$ で展開でき、その展開係数が $a^{(i)}(\mathbf{p})$ になる。(3.6)はこれを表している。新たな演算子： $a^{(i)}(\mathbf{p}), a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})$ は、(3.2)を用と同様な反交換関係を満たして、

$$\begin{aligned} \{a_{\alpha}(\mathbf{p}), a_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} &= 2\omega(\mathbf{p})K\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\alpha\beta} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^4 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}), \sum_{i=1}^4 u_{\beta}^{(i)*}(\mathbf{p}')a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}') \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^4 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}), \sum_{j=1}^4 u_{\beta}^{(j)*}(\mathbf{p}')a^{(j)\dagger}(\mathbf{p}') \right\} \\ &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p})u_{\beta}^{(j)*}(\mathbf{p}') \{a^{(i)}(\mathbf{p}), a^{(j)\dagger}(\mathbf{p}')\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

より

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p})u_{\beta}^{(j)*}(\mathbf{p}') \{a^{(i)}(\mathbf{p}), a^{(j)\dagger}(\mathbf{p}')\} = 2\omega(\mathbf{p})K\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\alpha\beta} \quad (3.9)$$

が要請される・従って、任意の係数を $X(\mathbf{p})$ として、(3.7)を考慮すると

$$\{a^{(i)}(\mathbf{p}), a^{(j)\dagger}(\mathbf{p}')\} = X(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta^{ij} \quad (3.10)$$

と類推できる。これを(3.9)に代入して

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p})u_{\beta}^{(j)*}(\mathbf{p}')X(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta^{ij} &= 2\omega(\mathbf{p})K\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\alpha\beta} \\ &\Leftarrow \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \text{より } \mathbf{p} = \mathbf{p}' \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p})u_{\beta}^{(j)*}(\mathbf{p})X(\mathbf{p})\delta^{ij} = 2\omega(\mathbf{p})K\delta_{\alpha\beta} \Rightarrow \sum_{i=1}^4 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p})u_{\beta}^{(i)*}(\mathbf{p}) = 2\frac{\omega(\mathbf{p})}{X(\mathbf{p})}K\delta_{\alpha\beta}$$

がわかる。 $X(\mathbf{p})$ を求めるには、(3.7)： $u^{(j)\dagger}(\mathbf{p})u^{(i)}(\mathbf{p}) = \delta^{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) を用いる。(3.11)より

$$\sum_{\alpha=1}^4 \sum_{i=1}^4 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p})u_{\alpha}^{(i)*}(\mathbf{p}) = 2\frac{\omega(\mathbf{p})}{X(\mathbf{p})}K \sum_{\alpha=1}^4 \delta_{\alpha\alpha} \Rightarrow \sum_{i=1}^4 u^{(i)\dagger}(\mathbf{p})u^{(i)}(\mathbf{p}) = 8\frac{\omega(\mathbf{p})}{X(\mathbf{p})}K \quad (3.12)$$

と、(3.7)よりの

$$\sum_{i=1}^4 u^{(i)\dagger}(\mathbf{p})u^{(i)}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^4 \delta^{ii} = 4 \quad (3.13)$$

を比較して

$$8 \frac{\omega(\mathbf{p})}{X(\mathbf{p})} K = 4 \Rightarrow X(\mathbf{p}) = 2\omega(\mathbf{p})K \quad (3.14)$$

である。従って、(3.10)は

$$\{a^{(i)}(\mathbf{p}), a^{(j)\dagger}(\mathbf{p}')\} = 2\omega(\mathbf{p})K\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta^{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (3.15)$$

とわかる。 $\{a_\alpha(\mathbf{p}), a_\beta(\mathbf{p}')\} = \{a_\alpha^\dagger(\mathbf{p}), a_\beta^\dagger(\mathbf{p}')\} = 0$ を考慮して、反交換関係として

$$\boxed{\begin{aligned} \{a^{(i)}(\mathbf{p}), a^{(j)\dagger}(\mathbf{p}')\} &= 2\omega(\mathbf{p})K\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta^{ij} \\ \{a^{(i)}(\mathbf{p}), a^{(j)}(\mathbf{p}')\} &= \{a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), a^{(j)\dagger}(\mathbf{p}')\} = 0 \end{aligned}} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \quad (3.16)$$

が導かれる。

さて、 $u_\alpha^{(i=3,4)}(\mathbf{p})$ は負のエネルギーを持つことを考慮すると（同じ添え字 α は和をとる）

$$\begin{aligned} a_\alpha^\dagger(\mathbf{p})a_\alpha(\mathbf{p}) &= \left(\sum_{i=1}^4 u_\alpha^{(i)*}(\mathbf{p})a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \right) \left(\sum_{i=1}^4 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^4 u_\alpha^{(i)*}(\mathbf{p})u_\alpha^{(j)}(\mathbf{p})a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(j)}(\mathbf{p}) \Leftarrow \sum_{\alpha=1}^4 u_\alpha^{(i)*}(\mathbf{p})u_\alpha^{(j)}(\mathbf{p}) = u^{(i)\dagger}(\mathbf{p})u^{(j)}(\mathbf{p}) = \delta^{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^4 \delta^{ij}a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(j)}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^4 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

より、

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^4p \frac{1}{K} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2c^2) c\omega(\mathbf{p}) \sum_{\alpha=1}^4 a_\alpha^\dagger(\mathbf{p})a_\alpha(\mathbf{p}) \\ &= \int d^4p \frac{1}{K} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2c^2) c\omega(\mathbf{p}) \left(\sum_{i=1}^4 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}) \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

であるが、負のエネルギー解の $u_\alpha^{(i=3,4)}(\mathbf{p})$ を考慮して

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^4p \frac{1}{K} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2c^2) c\omega(\mathbf{p}) \left(\sum_{i=1}^2 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}) - \sum_{i=3}^4 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}) \right) \\ &= \int d^4p \frac{1}{K} \delta(p^2 - m^2c^2) cp^0 \left(\theta(p^0) \sum_{i=1}^2 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}) + \theta(-p^0) \sum_{i=3}^4 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}) \right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \left(\sum_{i=1}^2 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}) - \sum_{i=3}^4 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}) \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

である。従って、

$$\hat{H} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \left(\sum_{i=1}^2 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}) - \sum_{i=3}^4 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}) \right) \quad (3.20)$$

である。ここで、「Appendix 1: ディラック方程式の解」に従って、(3.115)のように

$u_{\alpha}^{(i=3,4)}(-\mathbf{p}) \Rightarrow v_{\alpha}^{(i=1,2)}(\mathbf{p})$ に転換し、正のエネルギーを持つ生成・消滅演算子で読み替える必要がある。そこで、 $u_{\alpha}^{(i=3,4)}(\mathbf{p}) \Rightarrow u_{\alpha}^{(i=3,4)}(-\mathbf{p})$ を考慮して

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \left(\sum_{i=1}^2 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) - \sum_{i=3}^4 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \right) \\ &\Leftarrow \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p} f(-\mathbf{p}) \quad (f(\mathbf{p}) \text{ は任意の関数}), \quad \omega(-\mathbf{p}) = \omega(\mathbf{p}) \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \left(\sum_{i=1}^2 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) - \sum_{i=3}^4 a^{(i)\dagger}(-\mathbf{p}) a^{(i)}(-\mathbf{p}) \right)\end{aligned}\quad (3.21)$$

とする。ここで、

$$\sum_{i=3}^4 a^{(i)\dagger}(-\mathbf{p}) a^{(i)}(-\mathbf{p}) \quad (3.22)$$

の項が負のエネルギーを与えるので、常に正のエネルギーを持つ素粒子としては相応しくない。そこで

$$\boxed{b^{(i)}(\mathbf{p}) = a^{(i+2)\dagger}(-\mathbf{p}), \quad b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) = a^{(i+2)}(-\mathbf{p}) \quad (i=1,2)} \quad (3.23)$$

の読み替えをする。このとき、以下で見るように

- $b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), b^{(i)}(\mathbf{p})$ が正のエネルギーを持つ反粒子の生成・消滅演算子

になる。また、(3.16)より

$$\boxed{\begin{aligned}\{a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), a^{(j)}(\mathbf{p}')\} &= 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{ij}, \quad \{a^{(i)}(\mathbf{p}), a^{(j)}(\mathbf{p}')\} = \{a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), a^{(j)\dagger}(\mathbf{p}')\} = 0 \\ \{b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), b^{(j)}(\mathbf{p}')\} &= 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{ij}, \quad \{b^{(i)}(\mathbf{p}), b^{(j)}(\mathbf{p}')\} = \{b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), b^{(j)\dagger}(\mathbf{p}')\} = 0\end{aligned}} \quad (3.24)$$

を得る（問題 3）。生成・消滅演算子の基本式である。

実際には、Normal Product なので、

$$b^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) = -b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) b^{(i)}(\mathbf{p}) + 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(0) \quad (3.25)$$

より

$$:b^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}): = -:b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) b^{(i)}(\mathbf{p}): \quad (3.26)$$

に注意して

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) : \sum_{i=1}^2 (a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) - b^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p})) : \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) : \sum_{i=1}^2 (a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) + b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) b^{(i)}(\mathbf{p})) :\end{aligned}\quad (3.27)$$

を得る。すなわち、

$$\hat{H} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \sum_{i=1}^2 \left(a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) + b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) b^{(i)}(\mathbf{p}) \right) \quad (3.28)$$

になるので、 $b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) b^{(i)}(\mathbf{p})$ は正のエネルギーを与えることがわかる。同様に、

$$\begin{aligned} \hat{N} &\equiv \hat{N}^{(+)} - \hat{N}^{(-)} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^2 \left(a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) - b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) b^{(i)}(\mathbf{p}) \right) \\ \hat{N}^{(+)} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^2 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}), \quad \hat{N}^{(-)} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^2 b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) b^{(i)}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

である。ボーズ量子場と同様に

$$\begin{aligned} [\hat{N}^{(+)}, a^{(i)}(\mathbf{k})] &= -a^{(i)}(\mathbf{k}), \quad [\hat{N}^{(+)}, a^{(i)\dagger}(\mathbf{k})] = a^{(i)\dagger}(\mathbf{k}), \\ [\hat{N}^{(-)}, b^{(i)}(\mathbf{k})] &= -b^{(i)}(\mathbf{k}), \quad [\hat{N}^{(-)}, b^{(i)\dagger}(\mathbf{k})] = b^{(i)\dagger}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (i=1,2) \quad (3.30)$$

を導くことができる。例えば、 $[\hat{N}^{(+)}, a^{(i)}(\mathbf{k})] = -a^{(i)}(\mathbf{k})$ ($i=1,2$) を要請して

$$\begin{aligned} [\hat{N}^{(+)}, a^{(i)}(\mathbf{k})] &= \left[\int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^2 a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}), a^{(i)}(\mathbf{k}) \right] \\ &\Leftarrow [AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^2 \left(a^{(j)\dagger}(\mathbf{p}) \left[\left\{ a^{(j)}(\mathbf{p}), a^{(i)}(\mathbf{k}) \right\} \right] - \left[\left\{ a^{(j)\dagger}(\mathbf{p}), a^{(i)}(\mathbf{k}) \right\} \right] a^{(j)}(\mathbf{p}) \right) \\ &= -\int d\mathbf{p} \frac{1}{\cancel{2\omega(\mathbf{p})}} \frac{1}{\cancel{K}} \sum_{j=1}^2 \cancel{\omega(\mathbf{p})} \cancel{K} \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \delta^{ij} a^{(j)}(\mathbf{p}) \\ &= -\int d\mathbf{p} \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \sum_{j=1}^2 \delta^{ij} a^{(j)}(\mathbf{p}) = -\sum_{j=1}^2 \delta^{ij} a^{(j)}(\mathbf{k}) = -a^{(i)}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

より、

$$[\hat{N}^{(+)}, a^{(i)}(\mathbf{k})] = -a^{(i)}(\mathbf{k}) \quad (i=1,2) \quad (3.32)$$

が導ける（問題 4）。

量子場の導入

フーリエ変換を使用して、座標空間での演算子を量子場 $\psi^{(\pm)}(x)$ とし

$$\psi_{\alpha}(x) = \int \frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a_{\alpha}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right), \quad \psi_{\alpha}^{\dagger}(x) = \int \frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \quad (3.33)$$

のフーリエ変換とする。ここに、

- A は運動量に依存する係数

である。ボーズ量子場と違い、 $\psi_{\alpha=1,2,3,4}(x)$ はスピノルの添え字 ($\alpha=1,2,3,4$) をもつ。 $\psi_{\alpha}(x)$ で

● $p^0 = -\omega(\mathbf{p})$ の解の $u^{(3,4)}(\mathbf{p})$ を $p^0 = \omega(\mathbf{p})$ の解 $v^{(1,2)}(\mathbf{p}) = u^{(3,4)}(-\mathbf{p})$ に接続する。そのため、

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(x) &= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a_\alpha(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) = \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \sum_{i=1}^4 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\
&= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(\sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) + \sum_{i=3}^4 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right) \\
&= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(\sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}^0 x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=3}^4 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}^0 x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=-\omega(\mathbf{p})} \right) \\
&= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(\sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=3}^4 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i(-\omega(\mathbf{p}))x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

に、「第二章 ボーズ量子場：スカラー場」－「Appendix 1:空間反転と積分」の

$$\int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p} f(-\mathbf{p}) \quad (f(\mathbf{p}) \text{ は任意の関数}) \tag{3.35}$$

を使って、

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(x) &= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(\sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=3}^4 u_\alpha^{(i)}(-\mathbf{p}) a^{(i)}(-\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\left(\begin{smallmatrix} \omega(-\mathbf{p})=\omega(\mathbf{p}) \\ -\omega(-\mathbf{p}) \end{smallmatrix}\right)x^0 - i(-\mathbf{p})\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right) \\
&= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(\sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^2 v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i+2)}(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega(\mathbf{p})x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right) \\
&= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left(\sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) + \sum_{i=1}^2 v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i+2)}(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{p})}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

ここで、 $b^{(i)}(\mathbf{p}) = a^{(i+2)}(-\mathbf{p})$ ($i=1,2$) より

$$\boxed{\psi_\alpha(x) = \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \sum_{i=1}^2 \left(u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) + v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right)} \tag{3.37}$$

である。

「第二章 ボーズ量子場：スカラー場」の(2.31)交換関係に対応する反交換関係は、

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x'), \psi_\beta^\dagger(x)\} &= \left\{ \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \sum_{i=1}^2 \left(u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p})\exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})b^{(i)\dagger}(\mathbf{p})\exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. \int_{p'^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p}')d\mathbf{p}'}{2\omega(\mathbf{p}')} \sum_{i=1}^2 \left(u_\beta^{(i)*}(\mathbf{p}')a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}')\exp\left(\frac{i\mathbf{p}'x'}{\hbar}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + v_\beta^{(i)*}(\mathbf{p}')b^{(i)}(\mathbf{p}')\exp\left(-\frac{i\mathbf{p}'x'}{\hbar}\right) \right) \right\} \\ &= \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \int_{p'^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p}')d\mathbf{p}'}{2\omega(\mathbf{p}')} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left(u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p})\exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^2 \left(u_\beta^{(i)*}(\mathbf{p}')a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}')\exp\left(\frac{i\mathbf{p}'x'}{\hbar}\right) \right) \right\} \\ &\quad \left\{ \sum_{i=1}^2 \left(v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})b^{(i)\dagger}(\mathbf{p})\exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^2 \left(v_\beta^{(i)*}(\mathbf{p}')b^{(i)}(\mathbf{p}')\exp\left(-\frac{i\mathbf{p}'x'}{\hbar}\right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \int_{p'^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p}')d\mathbf{p}'}{2\omega(\mathbf{p}')} \\ &\quad \left(\left\{ \sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}), \sum_{i=1}^2 u_\beta^{(i)*}(\mathbf{p}')a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}') \right\} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}'x'}{\hbar}\right) \right) \\ &\quad + \left(\left\{ \sum_{i=1}^2 v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), \sum_{i=1}^2 v_\beta^{(i)*}(\mathbf{p}')b^{(i)}(\mathbf{p}') \right\} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}'x'}{\hbar}\right) \right) \end{aligned}$$

になる。反交換関係は、

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p}), \sum_{i=1}^2 u_\beta^{(i)*}(\mathbf{p}')a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}') \right\} &= \sum_{i,j=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})u_\beta^{(j)*}(\mathbf{p}') \{a^{(i)}(\mathbf{p}), a^{(j)\dagger}(\mathbf{p}')\} \\ &\Leftrightarrow \{a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}'), a^{(j)}(\mathbf{p})\} = 2\omega(\mathbf{p})K(\mathbf{p})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta^{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})u_\beta^{(j)*}(\mathbf{p}')2\omega(\mathbf{p})K\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta^{ij} = \sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})u_\beta^{(i)*}(\mathbf{p}')2\omega(\mathbf{p})K\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 u^{(i)}(\mathbf{p})_\alpha \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_\beta = \left(\frac{\not{\mathbf{p}} + mc}{2p^0} \right)_{\alpha\beta} \Big|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} \left(\overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_\beta = \left(u^{(i)\dagger}(\mathbf{p})\gamma^0 \right)_\beta \right) \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 u^{(i)}(\mathbf{p})_\alpha u^{(i)\dagger}(\mathbf{p})_\beta = \left(\frac{\not{\mathbf{p}} + mc}{2p^0} \gamma^0 \right)_{\alpha\beta} \Big|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} \\ &= \left(\frac{\not{\mathbf{p}} + mc}{2p^0} \gamma^0 \right)_{\alpha\beta} \Big|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} 2\omega(\mathbf{p})K\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \\ &= \left(\frac{\not{\mathbf{p}} + mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right)_{\alpha\beta} 2\omega(\mathbf{p})K\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \left(\not{\mathbf{p}}\gamma^0 + mc\gamma^0 \right)_{\alpha\beta} K\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (3.39)$$

を得る。そして、

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{i=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), \sum_{i=1}^2 v_{\beta}^{(i)*}(\mathbf{p}') b^{(i)}(\mathbf{p}') \right\} = \sum_{i,j=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) v_{\beta}^{(j)*}(\mathbf{p}') \{ b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), b^{(j)}(\mathbf{p}') \} \\
& \Leftrightarrow \{ b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), b^{(j)}(\mathbf{p}') \} = 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{ij} \\
& = \sum_{i,j=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) v_{\beta}^{(j)*}(\mathbf{p}') 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{ij} = \sum_{i=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) v_{\beta}^{(i)*}(\mathbf{p}') 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (3.40) \\
& \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 v^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{v^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta'} (\gamma^0)_{\beta\beta'} = \sum_{i=1}^2 v^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} v^{(i)*}(\mathbf{p})_{\beta'} = \left(\frac{\not{p} - m}{2p^0} \gamma^0 \right)_{\alpha\beta} \Big|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} \\
& = \left(\frac{\not{p} - m}{2p^0} \gamma^0 \right)_{\alpha\beta} \Big|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = (\not{p}\gamma^0 - m\gamma^0)_{\alpha\beta} K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')
\end{aligned}$$

なので、(3.38)より

$$\begin{aligned}
\{ \psi_{\alpha}(x'), \psi_{\beta}^{\dagger}(x) \} &= \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \int_{p'^0=\omega'} \frac{A(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'}{2\omega(\mathbf{p}')} \\
& \left(\begin{aligned} & \left\{ \sum_{i=1}^2 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}), \sum_{i=1}^2 u_{\beta}^{(i)*}(\mathbf{p}') a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}') \right\} \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), \sum_{i=1}^2 v_{\beta}^{(i)*}(\mathbf{p}') b^{(i)}(\mathbf{p}') \right\} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \end{aligned} \right) \\
& = \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \int_{p'^0=\omega'} \frac{A(\mathbf{p}') d\mathbf{p}'}{2\omega(\mathbf{p}')} \left(\begin{aligned} & \left(\not{p}\gamma^0 + mc\gamma^0 \right)_{\alpha\beta} K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \\ & + \left(\not{p}\gamma^0 - mc\gamma^0 \right)_{\alpha\beta} K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \end{aligned} \right) \\
& = \int_{\substack{p^0=p'^0=\omega \\ p=p'}} \frac{KA^2(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{4\omega^2(\mathbf{p})} \left(\begin{aligned} & \left(\not{p}\gamma^0 + mc\gamma^0 \right)_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \\ & + \left(\not{p}\gamma^0 - mc\gamma^0 \right)_{\alpha\beta} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \end{aligned} \right) \\
& = \int \frac{KA^2(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{4\omega^2(\mathbf{p})} \left(\left(\not{p} + mc \right) \gamma^0 \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) + \left(\not{p} - mc \right) \gamma^0 \exp\left(\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \right)_{\alpha\beta} \quad (3.41)
\end{aligned}$$

なので、両辺に γ_0 を乗じて

$$\{ \psi_{\alpha}(x'), \overline{\psi}_{\beta}(x) \} = \int \frac{KA^2(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{4\omega^2(\mathbf{p})} \left(\begin{aligned} & \left(\not{p} + mc \right)_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \\ & + \left(\not{p} - mc \right)_{\alpha\beta} \exp\left(\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \end{aligned} \right) \quad (3.42)$$

を得る（問題 5）。また、同時刻 ($x^0 = x'^0$) の交換関係を評価すると、

$$\left. \left\{ \psi_\alpha(x'), \psi_\beta^\dagger(x) \right\} \right|_{x^0=x^0} = \int \frac{KA^2(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{4\omega^2(\mathbf{p})} \left(\begin{array}{l} (\not{\mathbf{p}}\gamma^0 + mc\gamma^0)_{\alpha\beta} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \\ + (\not{\mathbf{p}}\gamma^0 - mc\gamma^0)_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \end{array} \right) \quad (3.43)$$

になる。第 2 項は、

$$\begin{aligned} & \int \frac{KA^2(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{4\omega^2(\mathbf{p})} (\not{\mathbf{p}}\gamma^0 - mc\gamma^0)_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \Leftarrow \not{\mathbf{p}} = \omega(\mathbf{p})\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} \\ & = \int \frac{KA^2(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{4\omega^2(\mathbf{p})} ((\omega(\mathbf{p})\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p})\gamma^0 - mc\gamma^0)_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \\ & \Leftarrow \int d\mathbf{p}f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p}f(-\mathbf{p}) \quad (f(\mathbf{p})\text{は任意の関数}) \\ & = \int \frac{KA^2(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{4\omega^2(\mathbf{p}-)} ((\omega(-\mathbf{p})\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}(-\mathbf{p}))\gamma^0 - mc\gamma^0)_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{i(-\mathbf{p})(x-x')}{\hbar}\right) \\ & \stackrel{\omega(-\mathbf{p})=\omega(\mathbf{p})}{=} \int \frac{KA^2(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{4\omega^2(\mathbf{p})} ((\omega(\mathbf{p})\gamma^0 + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p})\gamma^0 - mc\gamma^0)_{\alpha\beta} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

なので、

$$\begin{aligned} \left. \left\{ \psi_\alpha(x'), \psi_\beta^\dagger(x) \right\} \right|_{x^0=x^0} &= \int \frac{KA^2(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{4\omega^2(\mathbf{p})} ((\omega(\mathbf{p})\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p})\gamma^0 + mc\gamma^0)_{\alpha\beta} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \\ &+ \int \frac{KA^2(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{4\omega^2(\mathbf{p})} ((\omega(\mathbf{p})\gamma^0 + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p})\gamma^0 - mc\gamma^0)_{\alpha\beta} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \\ &= \int \frac{AK^2(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{4\omega^2(\mathbf{p})} (2\omega(\mathbf{p})\gamma^0\gamma^0)_{\alpha\beta} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) = \int \frac{KA^2(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \delta_{\alpha\beta} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

であるが、この反交換関係は、

$$\left. \left\{ \psi_\alpha(x'), \psi_\beta^\dagger(x) \right\} \right|_{x^0=x^0} \stackrel{\text{要請する}}{=} \hbar c \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \delta_{\alpha\beta} \quad (3.46)$$

を満たす ((3.95)参照)。従って、

$$\left. \left\{ \psi_\alpha(x'), \psi_\beta^\dagger(x) \right\} \right|_{x^0=x^0} = \int \frac{KA^2(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \delta_{\alpha\beta} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \stackrel{\text{要請する}}{=} \hbar c \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \delta_{\alpha\beta} \quad (3.47)$$

なので、

$$\boxed{A(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{2\hbar c \omega(\mathbf{p})}}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3 K(\mathbf{p})}}, A(-\mathbf{p}) = A(\mathbf{p}) \Leftarrow K(-\mathbf{p}) = K(\mathbf{p}) \Leftarrow \frac{K(\mathbf{p})A^2(\mathbf{p})}{2\omega(\mathbf{p})} = \frac{\hbar c}{(2\pi\hbar)^3}} \quad (3.48)$$

を得る。従って、

$$\left. \left\{ \psi_\alpha(x'), \overline{\psi}_\beta(x) \right\} \right|_{x^0=x^0} = \int \frac{\hbar c d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})(2\pi\hbar)^3} \left((\not{\mathbf{p}} + mc)_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) + (\not{\mathbf{p}} - mc)_{\alpha\beta} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \right) \quad (3.49)$$

である。更に

$$\{\psi_\alpha(x'), \overline{\psi(x)_\beta}\} = \hbar c \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) (\not{p} + mc)_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \quad (3.50)$$

と整理することができる。また、

$$\begin{aligned} & \left(i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar}\right)_{\alpha\beta} \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \\ &= \frac{1}{\hbar} \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) (\not{p} + mc)_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

に気がつくと、

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x'), \overline{\psi(x)_\beta}\} &= \hbar c \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) (\not{p} + mc)_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \\ &= \left(i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar}\right)_{\alpha\beta} \hbar^2 c \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \\ &= \left(i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar}\right)_{\alpha\beta} [\phi(x), \phi(x')] \end{aligned} \quad (3.52)$$

がわかる。以上から

$$\begin{aligned} \{a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), a^{(j)}(\mathbf{k})\} &= 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \delta^{ij}, \quad \{b^{(i)}(\mathbf{p}), b^{(j)\dagger}(\mathbf{k})\} = 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \delta^{ij} \\ \psi_\alpha(x) &= \int \frac{A(\mathbf{p}) d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \sum_{i=1}^2 \left(u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right) \Rightarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{2\hbar c \omega(\mathbf{p})}{(2\pi\hbar)^3 K(\mathbf{p})}} \\ \{\psi_\alpha(x'), \overline{\psi(x)_\beta}\} &= \hbar c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) (\not{p} + mc)_{\alpha\beta} \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \\ &= \left(i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar}\right)_{\alpha\beta} \hbar^2 c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \\ &= \left(i\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar}\right)_{\alpha\beta} [\phi(x), \phi(x')] \\ \{\psi_\alpha(x'), \psi_\beta^\dagger(x)\} \Big|_{x^0=x'^0} &= \hbar c \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 u^{(j)}(\mathbf{p})_\alpha \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})}_\beta &= \left(\frac{\not{p} + mc}{2\omega(\mathbf{p})}\right)_{\alpha\beta}, \quad \sum_{i=1}^2 v^{(i)}(\mathbf{p})_\alpha \overline{v^{(i)}(\mathbf{p})}_\beta = \left(\frac{\not{p} - mc}{2\omega(\mathbf{p})}\right)_{\alpha\beta} \\ u^{(j)\dagger}(\mathbf{p}) u^{(i)}(\mathbf{p}) &= \delta^{ij}, \quad \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})} u^{(i)}(\mathbf{p}) = \delta^{ij} \frac{mc}{p^0} \\ v^{(j)\dagger}(\mathbf{p}) v^{(i)}(\mathbf{p}) &= \delta^{ij}, \quad \overline{v^{(j)}(\mathbf{p})} v^{(i)}(\mathbf{p}) = \delta^{ij} \frac{mc}{p^0} \quad (i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (3.54)$$

がわかった。

生成・消滅演算子と量子場

「第二章 ボーズ量子場：スカラー場」に習って $\partial\psi(x)/\partial x^0$ を調べると

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial x^0} &= \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \sum_{i=1}^2 \left(\begin{array}{l} u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p})\frac{\partial}{\partial x^0} \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \\ + v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})b^{(i)\dagger}(\mathbf{p})\frac{\partial}{\partial x^0} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \end{array} \right) \Leftarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{2\hbar c\omega(\mathbf{p})}{(2\pi\hbar)^3 K}} \\ &= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{i\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \sum_{i=1}^2 \left(-u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p})\exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})b^{(i)\dagger}(\mathbf{p})\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right)\end{aligned}\quad (3.55)$$

なので、

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x) &= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \sum_{i=1}^2 \left(u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p})\exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})b^{(i)\dagger}(\mathbf{p})\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right) \\ \frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial x^0} &= i \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\hbar} \sum_{i=1}^2 \left(-u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p})\exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})b^{(i)\dagger}(\mathbf{p})\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right)\end{aligned}\quad (3.56)$$

である。 $\psi(x)$ がディラック方程式を満たすことを示す。 $\psi(x)$ に $\gamma^0\left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar}\right)$ を掛け

$$\begin{aligned}\left(\gamma^0\left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x)\right)_\alpha &= \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \sum_{i=1}^2 \left(\begin{array}{l} \left[\gamma^0\left(\frac{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}}{\hbar} + \frac{mc}{\hbar}\right)u^{(i)}(\mathbf{p})\right]_\alpha a^{(i)}(\mathbf{p})\exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \\ + \left[\gamma^0\left(-\frac{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}}{\hbar} + \frac{mc}{\hbar}\right)v^{(i)}(\mathbf{p})\right]_\alpha b^{(i)\dagger}(\mathbf{p})\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \end{array} \right)\end{aligned}\quad (3.57)$$

を得る。また、(3.117)： $\omega(\mathbf{p})u^{(1,2)}(\mathbf{p}) = \gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)u^{(1,2)}(\mathbf{p})$ ， $\omega(\mathbf{p})v^{(1,2)}(\mathbf{p}) = \gamma^0(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} - mc)v^{(1,2)}(\mathbf{p})$

を用いると、(3.57)は

$$\begin{aligned}\int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \sum_{i=1}^2 \left(\begin{array}{l} \left[\gamma^0\frac{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc}{\hbar}u^{(i)}(\mathbf{p})\right]_\alpha a^{(i)}(\mathbf{p})\exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \\ + \left[\gamma^0\frac{-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc}{\hbar}v^{(i)}(\mathbf{p})\right]_\alpha b^{(i)\dagger}(\mathbf{p})\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \end{array} \right) \\ = \int \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2} \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^2 \left(u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})a^{(i)}(\mathbf{p})\exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) - v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p})b^{(i)\dagger}(\mathbf{p})\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right) = i \frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial x^0}\end{aligned}\quad (3.58)$$

を得る（問題 6）。即ち、

$$\begin{aligned}\left(\gamma^0\left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x)\right)_\alpha &= i \frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial x^0} \Rightarrow \left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = i\gamma^0 \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^0} \\ \Rightarrow \left(i\gamma^0\partial_0 + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) &= 0 \Rightarrow \left(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0\end{aligned}\quad (3.59)$$

より、ディラック方程式：

$$\boxed{\left(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0} \quad \left(i\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^0} = \gamma^0\left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x)\right) \quad (3.60)$$

が成り立つ。

さて、生成・消滅演算子を $\psi_\alpha(x)$ と $\frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial x^0}$ であらわすために、(3.56)を更に取り換えてゆく。

$$\psi_\alpha(x) = \int A(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) + \frac{v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right) \quad (3.61)$$

$$-i\frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial x^0} = \int A(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \sum_{i=1}^2 \left(-\frac{u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\hbar} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) + \frac{v_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\hbar} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \right)$$

なので、 $\int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p} f(-\mathbf{p})$ ($f(\mathbf{p})$ は任意の関数) より $\exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right)$ の項に $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ を施し、フーリエ変換

$$f(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Rightarrow f(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \quad (3.62)$$

より、

$$\begin{aligned} & \frac{A(\mathbf{p}) \sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} + \frac{A(-\mathbf{p}) \sum_{i=1}^2 v_\alpha^{(i)}(-\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\omega(-\mathbf{p})} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{x} \psi_\alpha(x) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\ & \frac{A(\mathbf{p}) \sum_{i=1}^2 u_\alpha^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\hbar} + \frac{A(-\mathbf{p}) \sum_{i=1}^2 v_\alpha^{(i)}(-\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\hbar} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{x} \left(-i\frac{\partial\psi_\alpha(x)}{\partial x^0}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

を得る (問題 7)。これから、(3.48)より $A(\mathbf{p}) = A(-\mathbf{p})$ なので

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{i=1}^2 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right) + \sum_{i=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(-\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2} = \frac{\omega(\mathbf{p})}{(2\pi)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \psi_{\alpha}(x) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\
& - \frac{\sum_{i=1}^2 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right) + \sum_{i=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(-\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2} \\
& = \frac{\hbar}{(2\pi)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \left(-i \frac{\partial \psi_{\alpha}(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \quad (3.64)
\end{aligned}$$

として、両辺を引き算すれば、

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right) = \frac{\omega(\mathbf{p})}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \psi_{\alpha}(x) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\
& \quad - \frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \left(-i \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\
& = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}(x) + i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \quad (3.65) \\
& \Rightarrow \sum_{i=1}^2 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}(x) + i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{i\omega x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right)
\end{aligned}$$

同様に、両辺を足し算すれば、

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(-\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right) = \frac{\omega(\mathbf{p})}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \psi_{\alpha}(x) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\
& \quad + \frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \left(-i \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\
& = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}(x) - i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \quad (3.66) \\
& \sum_{i=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(-\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(-\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}(x) - i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\omega x^0 + i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right)
\end{aligned}$$

である。また、 $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ にし、 $\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2} = \omega(-\mathbf{p})$ に注意すれば、

$$\sum_{i=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}(x) - i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\omega x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \quad (3.67)$$

を得る。以上から、

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}(x) + i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{i\omega x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\
& \sum_{i=1}^2 v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}(x) - i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\omega x^0 - i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \quad (3.68)
\end{aligned}$$

である。、 $u^{(j)\dagger}(\mathbf{p}) u^{(i)}(\mathbf{p}) = \delta^{ij}$ 、 $v^{(j)\dagger}(\mathbf{p}) v^{(i)}(\mathbf{p}) = \delta^{ij}$ より、両辺に。 $u^{(j)\dagger}(\mathbf{p})$ 、 $v^{(j)\dagger}(\mathbf{p})$ を乗じて

$$\begin{aligned}
 a^{(i)}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx u_{\alpha}^{(i)*}(\mathbf{p}) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}(x) + i\hbar \frac{\partial \psi_{\alpha}(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{k})} \\
 b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \int dx v_{\alpha}^{(i)*}(\mathbf{p}) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}(x) - i\hbar \frac{\partial \psi_{\alpha}(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{k})}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

がわかる（問題 8）。

量子場のエネルギー

量子場のエネルギー：

$$\hat{H} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c \omega(\mathbf{p}) \sum_{i=1}^2 \left(a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) - b^{(i)}(\mathbf{p}) b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) \right) \tag{3.70}$$

に、(3.69)を用いると、

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c \omega(\mathbf{p}) \leftarrow K(\mathbf{p}) A^2(\mathbf{p}) = \frac{2\hbar c \omega(\mathbf{p})}{(2\pi\hbar)^3} \\
 &\cdot \left\{ \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \sum_{i=1}^2 \left[\int dx u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}^*(x) - i\hbar \frac{\partial \psi_{\alpha}^*(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{i\omega x^0 - ipx}{\hbar}\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot \int dx' u_{\beta}^{(i)*}(\mathbf{p}) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\beta}(x') + i\hbar \frac{\partial \psi_{\beta}(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left(-\frac{i\omega x^0 - ipx}{\hbar}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 A(\mathbf{p})} \sum_{i=1}^2 \left[\int dx v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}^*(x) + i\hbar \frac{\partial \psi_{\alpha}^*(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \int dx' v_{\beta}^{(i)*}(\mathbf{p}) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\beta}(x') - i\hbar \frac{\partial \psi_{\beta}(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} \right] \right\} \tag{3.71}
 \end{aligned}$$

時間については、制限無いので、 $x^0 = x'^0$ に設定すると

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2} \cancel{\frac{(2\pi\hbar)^3}{2\hbar \cancel{c} \omega(\mathbf{p})}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \\
 &\cdot \left[\sum_{i=1}^2 \left(\left(u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) u_{\beta}^{(i)*}(\mathbf{p}) \int dx dx' \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}^*(x) - i\hbar \frac{\partial \psi_{\alpha}^*(x)}{\partial x^0} \right) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\beta}(x') + i\hbar \frac{\partial \psi_{\beta}(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left(\frac{ip(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^2 \left(\left(v_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) v_{\beta}^{(i)*}(\mathbf{p}) \int dx dx' \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\alpha}^*(x) + i\hbar \frac{\partial \psi_{\alpha}^*(x)}{\partial x^0} \right) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_{\beta}(x') - i\hbar \frac{\partial \psi_{\beta}(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left(-\frac{ip(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \right) \right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \right] \tag{3.72}
 \end{aligned}$$

ここで、(3.130)の

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 u^{(j)}(\mathbf{p})_\alpha \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})}_\beta &= \left(\frac{\not{\mathbf{p}} + mc}{2p^0} \right)_{\alpha\beta} \Big|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} = \left(\frac{\not{\mathbf{p}} + mc}{2\omega(\mathbf{p})} \right)_{\alpha\beta} \\ \sum_{i=1}^2 v^{(i)}(\mathbf{p})_\alpha \overline{v^{(i)}(\mathbf{p})}_\beta &= \left(\frac{\not{\mathbf{p}} - mc}{2p^0} \right)_{\alpha\beta} \Big|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} = \left(\frac{\not{\mathbf{p}} - mc}{2\omega(\mathbf{p})} \right)_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.73)$$

を用いて、 $\overline{u^{(j)}(\mathbf{p})} = u^{(j)\dagger}(\mathbf{p})\gamma^0$ を考慮して

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{4\omega(\mathbf{p})(2\pi\hbar)^3 \hbar} \left(\begin{aligned} &\left(\frac{\not{\mathbf{p}} + mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right)_{\alpha\beta} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_\alpha^*(x) - i\hbar \frac{\partial \psi_\alpha^*(x)}{\partial x^0} \right) \\ &\quad \cdot \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_\beta(x') + i\hbar \frac{\partial \psi_\beta(x')}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) \\ & - \left(\frac{\not{\mathbf{p}} - mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right)_{\alpha\beta} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_\alpha^*(x) + i\hbar \frac{\partial \psi_\alpha^*(x)}{\partial x^0} \right) \\ &\quad \cdot \left(\omega(\mathbf{p}) \psi_\beta(x') - i\hbar \frac{\partial \psi_\beta(x')}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) \end{aligned} \right) \Big|_{x^0=x'^0} \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{4\omega(\mathbf{p})(2\pi\hbar)^3 \hbar} \left(\begin{aligned} &\int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \left(\omega(\mathbf{p}) \psi^\dagger(x) - i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger(x)}{\partial x^0} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\not{\mathbf{p}} + mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') + i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) \\ & - \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \left(\omega(\mathbf{p}) \psi^\dagger(x) + i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger(x)}{\partial x^0} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\not{\mathbf{p}} - mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') - i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) \end{aligned} \right) \Big|_{x^0=x'^0} \\ &\stackrel{\substack{\overline{\psi(x)} = \psi^\dagger(x)\gamma^0 \\ \gamma^0 \gamma^0 = I}}{=} \int \frac{d\mathbf{p}}{4\omega(\mathbf{p})(2\pi\hbar)^3 \hbar} \left(\begin{aligned} &\int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \left(\omega(\mathbf{p}) \overline{\psi(x)} - i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \right) \\ &\quad \cdot \left(\gamma^0 \frac{\not{\mathbf{p}} + mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') + i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) \\ & - \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \left(\omega(\mathbf{p}) \overline{\psi(x)} + i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \right) \\ &\quad \cdot \left(\gamma^0 \frac{\not{\mathbf{p}} - mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') - i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) \end{aligned} \right) \Big|_{x^0=x'^0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4\omega(\mathbf{p})(2\pi\hbar)^3 \hbar} \\
&\quad \left(\int dx dx' \left(\omega(\mathbf{p}) \overline{\psi(x)} - i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \right) \right. \\
&\quad \quad \cdot \left(\gamma^0 \frac{p^0 \gamma^0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') + i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&\quad - \int dx dx' \left(\omega(\mathbf{p}) \overline{\psi(x)} + i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \right) \\
&\quad \quad \cdot \left(\gamma^0 \frac{p^0 \gamma^0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') - i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Bigg|_{x^0=x'^0}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

を得る。第 2 項で $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ にし、 $\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2} = \omega(-\mathbf{p})$ に注意すれば、

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{4\omega(\mathbf{p})(2\pi\hbar)^3 \hbar} \\
&\quad \left(\int dx dx' \left(\omega(\mathbf{p}) \overline{\psi(x)} - i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \right) \left(\gamma^0 \frac{p^0 \gamma^0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \right. \\
&\quad \quad \cdot \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') + i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&\quad - \int dx dx' \left(\omega(\mathbf{p}) \overline{\psi(x)} + i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \right) \left(\gamma^0 \frac{p^0 \gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}(-\mathbf{p}) - mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \\
&\quad \quad \cdot \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') - i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i(-\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4\omega(\mathbf{p})(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&\quad \left(\left(\omega(\mathbf{p}) \overline{\psi(x)} - i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \right) \left(\gamma^0 \frac{p^0 \gamma^0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') + i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\omega(\mathbf{p}) \overline{\psi(x)} + i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \right) \left(\gamma^0 \frac{p^0 \gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}(-\mathbf{p}) - mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') - i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4\omega(\mathbf{p})(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&\quad \left(\left(\omega(\mathbf{p}) \overline{\psi(x)} - i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \right) \left(\gamma^0 \frac{p^0 \gamma^0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') + i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\omega(\mathbf{p}) \overline{\psi(x)} + i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \right) \left(\gamma^0 \frac{p^0 \gamma^0 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \left(\omega(\mathbf{p}) \psi(x') - i\hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} \right) \right) \Bigg|_{x^0=x'^0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4\omega(\mathbf{p})(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&\quad \left(\begin{aligned}
&\cancel{\overline{\omega(\mathbf{p})\psi(x)}} \left(\gamma^0 \frac{\cancel{p^0\gamma^0} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc}{2\cancel{\omega(\mathbf{p})}} \gamma^0 - \gamma^0 \frac{\cancel{p^0\gamma^0} + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} - mc}{2\cancel{\omega(\mathbf{p})}} \gamma^0 \right) \omega(\mathbf{p})\psi(x') \\
&+ \hbar \frac{\partial\overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \left(\gamma^0 \frac{\cancel{p^0\gamma^0} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 - \gamma^0 \frac{\cancel{p^0\gamma^0} + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} - mc}{2\omega(\mathbf{p})} \gamma^0 \right) \hbar \frac{\partial\psi(x')}{\partial x^0} \\
&+ i\hbar \frac{\partial\overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \left(-\gamma^0 \frac{\cancel{p^0\gamma^0} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc}{2\cancel{\omega(\mathbf{p})}} \gamma^0 - \gamma^0 \frac{\cancel{p^0\gamma^0} + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} - mc}{2\cancel{\omega(\mathbf{p})}} \gamma^0 \right) \cancel{\omega(\mathbf{p})\psi(x')} \\
&+ \cancel{\overline{\omega(\mathbf{p})\psi(x)}} \left(\gamma^0 \frac{\cancel{p^0\gamma^0} - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc}{2\cancel{\omega(\mathbf{p})}} \gamma^0 + \gamma^0 \frac{\cancel{p^0\gamma^0} + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} - mc}{2\cancel{\omega(\mathbf{p})}} \gamma^0 \right) i\hbar \frac{\partial\psi(x')}{\partial x^0}
\end{aligned} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4\omega(\mathbf{p})(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&\quad \left(\begin{aligned}
&\overline{\psi(x)\gamma^0(-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)\gamma^0\omega(\mathbf{p})\psi(x')} + \hbar \frac{\partial\overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \frac{\gamma^0(-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)\gamma^0}{\omega(\mathbf{p})} \hbar \frac{\partial\psi(x')}{\partial x^0} \\
&+ i\hbar \frac{\partial\overline{\psi(x)}}{\partial x^0} (-p^0)\gamma^0\psi(x') + \overline{\psi(x)}p^0\gamma^0 i\hbar \frac{\partial\psi(x')}{\partial x^0}
\end{aligned} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \tag{3.75}
\end{aligned}$$

になる。ここで、 $p^0 = \omega(\mathbf{p})$ より

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{4\omega(\mathbf{p})(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&\quad \cdot \cancel{\omega(\mathbf{p})} \left(\begin{aligned}
&\overline{\psi(x)\gamma^0(-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)\gamma^0\psi(x')} + \hbar \frac{\partial\overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \frac{\gamma^0(-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)\gamma^0}{\omega^2(\mathbf{p})} \hbar \frac{\partial\psi(x')}{\partial x^0} \\
&- i\hbar \frac{\partial\overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \gamma^0\psi(x') + i\hbar \overline{\psi(x)}\gamma^0 \frac{\partial\psi(x')}{\partial x^0}
\end{aligned} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \tag{3.76}
\end{aligned}$$

なので、 $\gamma^0(-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p})\gamma^0 = \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}$ より

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&\quad \left(\begin{aligned}
&\overline{\psi(x)} \overset{\text{第1項}}{(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)} \psi(x') + \hbar \frac{\partial\overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \overset{\text{第2項}}{\frac{(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)}{\omega^2(\mathbf{p})}} \hbar \frac{\partial\psi(x')}{\partial x^0} \\
&- i\hbar \frac{\partial\overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \overset{\text{第3項}}{\gamma^0} \psi(x') + i\overline{\psi(x)} \overset{\text{第4項}}{\gamma^0} \hbar \frac{\partial\psi(x')}{\partial x^0}
\end{aligned} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \tag{3.77}
\end{aligned}$$

を得る。更に

$$i \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^0} = \gamma^0 \left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x), \quad -i \frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x^0} = \psi^\dagger(x) \left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \gamma^0 \quad (\boldsymbol{\gamma}^\dagger = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \gamma^0 = -\boldsymbol{\gamma}) \tag{3.78}$$

を用い、第 2 項～第 4 項を書き換える。

$$\begin{aligned}
\text{第 2 項} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \hbar \frac{\overline{\partial\psi(x)}}{\partial x^0} \frac{(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)}{\omega^2(\mathbf{p})} \hbar \frac{\partial\psi(x')}{\partial x'^0} \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial\psi^\dagger(x)}{\partial x^0}\right) \gamma^0 \frac{(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)}{\omega^2(\mathbf{p})} i\hbar \frac{\partial\psi(x')}{\partial x'^0} \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&\quad \cdot \psi^\dagger(x) \left(-i\boldsymbol{\gamma}\vec{\nabla} + \frac{mc}{\hbar}\right) \gamma^0 \gamma^0 \frac{(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)}{\omega^2(\mathbf{p})} \gamma^0 \hbar \left(-i\boldsymbol{\gamma}\vec{\nabla}' + \frac{mc}{\hbar}\right) \psi(x') \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&\stackrel{x\text{部分積分}(\vec{\nabla}\text{を}\nabla\text{にする})}{=} \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \\
&\quad \cdot \psi^\dagger(x) (i\boldsymbol{\gamma}\hbar\nabla + mc) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \frac{(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)}{\omega^2(\mathbf{p})} i\gamma^0 (-i\boldsymbol{\gamma}\hbar\nabla' + mc) \psi(x') \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \\
&\quad \cdot \psi^\dagger(x) (-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \frac{(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)}{\omega^2(\mathbf{p})} i\gamma^0 (-i\boldsymbol{\gamma}\hbar\nabla' + mc) \psi(x') \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&\stackrel{x'\text{部分積分}}{=} \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \\
&\quad \cdot \psi^\dagger(x) (-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc) \frac{(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)}{\omega^2(\mathbf{p})} \gamma^0 (i\boldsymbol{\gamma}\hbar\nabla' + mc) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \psi(x') \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \psi^\dagger(x) (-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc) \frac{(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)}{\omega^2(\mathbf{p})} \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \psi(x') \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&\stackrel{\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}\gamma^0 = -\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}}{=} \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \psi^\dagger(x) \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc) \frac{(-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)}{\omega^2(\mathbf{p})} (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \psi(x') \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \overline{\psi(x)} (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc) \frac{(-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)}{\omega^2(\mathbf{p})} (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc) \psi(x') \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&\quad \Leftarrow (-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc)(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc) = \mathbf{p}^2 + m^2 c^2 = \omega^2(\mathbf{p}) \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \overline{\psi(x)} (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc) \frac{\omega^2(\mathbf{p})}{\omega^2(\mathbf{p})} \psi(x') \Bigg|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \overline{\psi(x)} (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc) \psi(x') \Bigg|_{x^0=x'^0} \tag{3.79}
\end{aligned}$$

であるが、これは、第 1 項と同じである。次に、第 3 項と第 4 項は

$$\begin{aligned}
\text{第 3 項} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \gamma^0 \psi(x') \right) \Big|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \overline{\psi(x)} (\boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + m) \psi(x') \Big|_{x^0=x'^0}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
\text{第 4 項} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \left(i\hbar \overline{\psi(x)} \gamma^0 \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'^0} \right) \Big|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \overline{\psi(x)} (\boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + m) \psi(x') \Big|_{x^0=x'^0}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

になり第 1 項と同じである（問題 9）。

以上から、

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&\quad \cdot \left(\overline{\psi(x)} (\boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + mc) \psi(x') + \hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \frac{\overset{\text{第 2 項}}{(\boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + mc)}}{\omega^2(\mathbf{p})} \hbar \frac{\partial \psi(x')}{\partial x^0} - i\hbar \frac{\partial \overline{\psi(x)}}{\partial x^0} \gamma^0 \psi(x') + i\hbar \overline{\psi(x)} \gamma^0 \frac{\overset{\text{第 4 項}}{\partial \psi(x')}}{\partial x'^0} \right) \Big|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{4(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \overline{\psi(x)} 4 \times \overset{\text{第 1 項}}{(\boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + mc) \psi(x')} \Big|_{x^0=x'^0} \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3 \hbar} \int dx dx' \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \overline{\psi(x)} (\boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + mc) \psi(x') \Big|_{x^0=x'^0}
\end{aligned} \tag{3.82}$$

を得る。この表式は部分積分と関数の δ 定義を用いてさらに整理でき

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int dx dx' \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 \hbar} (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \overline{\psi(x)} (-i\boldsymbol{\gamma} \nabla' + mc) \psi(x') \Big|_{x^0=x'^0} \\
&= \int dx \overline{\psi(x)} \left(-i\boldsymbol{\gamma} \nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x)
\end{aligned} \tag{3.83}$$

になる（問題 10）。従って、

$$\hat{H} = \int dx \overline{\psi(x)} \left(-i\boldsymbol{\gamma} \nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) \tag{3.84}$$

がわかる。以上から、

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p}) K(\mathbf{p})} c\omega(\mathbf{p}) \sum_{i=1}^2 \left(a^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) a^{(i)}(\mathbf{p}) + b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}) b^{(i)}(\mathbf{p}) \right) \\
&= \int dx \overline{\psi(x)} \left(-i\boldsymbol{\gamma} \nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x)
\end{aligned} \tag{3.85}$$

を得る。

量子場のラグランジアン

さて、エネルギーがもとまったので、そのエネルギー密度を \mathcal{H} で表すと、

$$\hat{H} = \int dx : \mathcal{H}(x) := \int dx : \overline{\psi(x)} \left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) : \quad (3.86)$$

とわかる。つまり、

$$\mathcal{H}(x) = \overline{\psi(x)} \left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) \quad (3.87)$$

になる。このエネルギー密度は、ラグランジアン密度 (\mathcal{L} とする) から、

$$\mathcal{H}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^0} \right)} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^0} + \frac{\partial \overline{\psi}_\alpha}{\partial x^0} \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial \overline{\psi}_\alpha}{\partial x^0} \right)} - \mathcal{L}(x) \quad (3.88)$$

と与えられることが分かっている（「付録：ラグランジアン密度とエネルギー密度」ファイル）。
これから、 \mathcal{L} として

$$\mathcal{L}(x) = \overline{\psi(x)} \left(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) \quad (\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\gamma}\nabla) \quad (3.89)$$

をとればよいことが分かる。つまり、

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\alpha(x)}{\partial x^0} \right)} \frac{\partial \psi_\alpha(x)}{\partial x^0} = \overline{\psi(x)} i\gamma^0 \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0}, \quad \frac{\partial \overline{\psi}_\alpha(x)}{\partial x^0} \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial \overline{\psi}_\alpha(x)}{\partial x^0} \right)} = 0 \quad (3.90)$$

なので、これを代入すれば $\mathcal{H}(x)$ が求まり、

$$\mathcal{H}(x) = \overline{\psi(x)} i\gamma^0 \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0} - \overline{\psi(x)} \left(i\gamma^0 \partial_0 + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = \overline{\psi(x)} \left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) \quad (3.91)$$

を導く。以上から、

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \overline{\psi(x)} \left(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) \quad (\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\gamma}\nabla) \\ \mathcal{H}(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_0 \psi_\alpha)} \partial_0 \psi_\alpha + \partial_0 \overline{\psi}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_0 \overline{\psi}_\alpha)} - \mathcal{L}(x) = \overline{\psi(x)} \left(-i\boldsymbol{\gamma}\nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) \end{aligned}} \quad (3.92)$$

が量子場のラグランジアン密度とエネルギー密度になる（問題 1 1）。

このラグランジアンを用いると、同時刻交換関係(3.46)を導くことができる。一般化された運動量 $\pi_\alpha(x)$ ($\alpha=1,2,3,4$) として

$$\pi_\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\alpha(x)}{\partial t} \right)} = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \dot{\psi}_\alpha(x)} \quad (3.93)$$

であるので、(3.92)より

$$\pi_\alpha(x) = \frac{i}{c} \psi_\alpha^\dagger(x) \quad (3.94)$$

を得る（問題 1 2）。同時刻反交換関係は、一般化された座標 $\psi_\alpha(x)$ と $\pi_\beta(x)$ の間で、

$$\left. \left\{ \phi_\alpha(x), \pi_\beta(x') \right\} \right|_{x^0=x'^0} = \left. \left\{ \phi_\alpha(x'), \pi_\beta(x) \right\} \right|_{x^0=x'^0} = i\hbar \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{\sigma\beta} \quad (3.95)$$

を要請する。これより、(3.94)を用いて(3.46)を得る。

反粒子の量子場

反粒子の量子場は、 $\psi(x)$ の複素共役 $\psi^*(x)$ で表されるが、特殊相対性理論に合致した"複素共

役"は、 $\overline{\psi(x)} = \psi^\dagger(x) \gamma^0$ であり、 $\psi^*(x)$ とは

$$\psi^*(x) = \left[\overline{\psi(x) \gamma^0} \right]^T \quad (3.96)$$

で結びついている。まず、量子場 $\psi(x)$ の満たす方程式は(3.60)、つまり、

$$\boxed{\left(i \not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) = 0} \quad \left(i \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^0} = \gamma^0 \left(-i \boldsymbol{\gamma} \nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) \right) \quad (3.97)$$

であるので、 $\overline{\psi(x)} = \psi^\dagger(x) \gamma^0$ に対して、

$$\begin{aligned} \left[\left(i \not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi(x) \right]^\dagger &= \psi^\dagger(x) \left(-i \overleftarrow{\not{\partial}}^\dagger - \frac{mc}{\hbar} \right)^{\gamma^{\mu\dagger} = -\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0} = \psi^\dagger(x) \left(-i \gamma^0 \overleftarrow{\not{\partial}} \gamma^0 - \gamma^0 \frac{mc}{\hbar} \right) \\ &= \overline{\psi(x)} \left(-i \overleftarrow{\not{\partial}} \gamma^0 - \gamma^0 \frac{mc}{\hbar} \right) = 0 \Rightarrow \overline{\psi(x)} \left(-i \overleftarrow{\not{\partial}} - \frac{mc}{\hbar} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.98)$$

を得る。従って、

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger(x)}{\partial x^0} = \psi^\dagger(x) \left(-i \boldsymbol{\gamma} \nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \gamma^0 \quad (3.99)$$

である。以上から

$$\boxed{\overline{\psi(x)} \left(-i \overleftarrow{\not{\partial}} - \frac{mc}{\hbar} \right) = 0} \quad \left(-i \frac{\partial \psi^\dagger(x)}{\partial x^0} = \psi^\dagger(x) \left(-i \boldsymbol{\gamma} \nabla + \frac{mc}{\hbar} \right) \gamma^0 \right) \quad (3.100)$$

を得る。

反粒子の量子場を $\psi^c(x)$ をで表すと、この(3.100)を元にして反粒子を作るのであるが、反粒子

は、列ベクトルで表せるので、 $\overline{\psi(x)}$ の転置を取る事になる。つまり、(3.96)のように

$$\overline{\psi(x)} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} = \left[\overline{\psi(x)} \right]^T \quad (3.101)$$

である。この $[\overline{\psi(x)}]^T$ から $\psi^C(x)$ への変換演算子を C と表し

● 荷電共役 (charge conjugation)

を担う。(3.101)を C で表すと

$$\psi^C(x) = C[\overline{\psi(x)}]^T \quad (3.102)$$

である。粒子場と同じタイプの方程式(3.97)：

$$\left[i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right] \psi^C(x) = 0 \quad (3.103)$$

を満たす場が、反粒子場と定義される。そこで、(3.100)と(3.102)を用いて

$$\left(iC\gamma^{\mu T}C^{-1}\partial_{\mu} + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi^C(x) = 0 \quad (3.104)$$

を得る (問題 1 3 - A)。(3.103)と比較して

$$\gamma^{\mu T} = -C^{-1}\gamma^{\mu}C \quad (3.105)$$

が要請される。更に、(3.105)の転置を取ると

$$C^T = \eta C \quad (\eta = \pm 1) \quad (3.106)$$

がわかる (問題 1 3 - B)。

さて、 η の符号を決めるために、 4×4 行列の転置に対する対称性を見る。 4×4 行列には、全部で 16 個の行列があるが、それを、

$$\gamma^A \quad (A=1,2,\dots,16) \quad (3.107)$$

と表すと

$$\begin{cases} \text{対称行列: } (\gamma^A)^T = \gamma^A \dots 10 \text{個} (= {}_4H_2) \\ \text{反対称行列: } (\gamma^A)^T = -\gamma^A \dots 6 \text{個} (= {}_4C_2) \end{cases} \quad (3.108)$$

とまとめられる。16 個の行列は、 $I, \gamma^{\mu}, \gamma_5$ で表すことができ

$$\begin{cases} I \dots \text{scalar: 1個} \\ \gamma^{\mu} \dots \text{vector: 4個} \\ \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \dots \text{tensor: 6個} \\ \gamma^{\mu}\gamma_5 \dots \text{axialvector: 4個} \\ \gamma_5 \dots \text{pseudoscalar: 1個} \end{cases} \quad (3.109)$$

である。転置に対する対称性を調べるので、(3.105)より得られる

$$(\gamma^{\mu}C)^T = -\eta(\gamma^{\mu}C) \quad (3.110)$$

を用いる (問題 1 3 - C)。そこで、

- $I \cdots$ scalar: 1 個

$$(IC)^T = \eta(IC)$$

- $\gamma^\mu \cdots$ vector: 4 個

$$(\gamma^\mu C)^T = -\eta(\gamma^\mu C)$$

- $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \cdots$ tensor: 6 個 ($= {}_4C_2$)

$$(\sigma^{\mu\nu} C)^T = -\eta(\sigma^{\mu\nu} C)$$

- $\gamma_5 \cdots$ pseudoscalar: 1 個

$$(\gamma_5 C)^T = \eta(\gamma_5 C)$$

- $\gamma^\mu \gamma_5 \cdots$ axial vector: 4 個

$$(\gamma^\mu \gamma_5 C)^T = \eta(\gamma^\mu \gamma_5 C)$$

と勘定できる（問題 1 3-D）。従って、(3.108)の個数に一致するのは、 $\eta = -1$ の場合であり、 $\gamma^\mu C, \sigma^{\mu\nu} C$ が 10 個の対称行列になる。以上から

$$\boxed{\begin{aligned} \psi^C(x) &= C[\overline{\psi(x)}]^T \\ \gamma^{\mu T} &= -C^{-1}\gamma^\mu C \\ C^T &= -C \end{aligned}} \quad (3.111)$$

である。

Appendix 1: ディラック方程式の解

$u_{\alpha}^{(1,2,3,4)}(\mathbf{p})$ は、

$$(\not{\epsilon} - mc)u^{(i)}(\mathbf{p}) = 0 \begin{cases} (\not{\epsilon} - mc)u^{(1,2)}(\mathbf{p}) = 0 & \text{for } p^0 = \omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2} \\ (\not{\epsilon} - mc)u^{(3,4)}(\mathbf{p}) = 0 & \text{for } p^0 = -\omega(\mathbf{p}) \end{cases} \quad (3.112)$$

を満たす（問題 1）。これより、 $p^0 = -\omega(\mathbf{p})$ の解を $p^0 = \omega(\mathbf{p})$ の解に直すためには

$$(\not{\epsilon} - mc)u^{(3,4)}(\mathbf{p}) = (p^0 \gamma^0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - mc)u^{(3,4)}(\mathbf{p}) \stackrel{p^0 = -\omega(\mathbf{p})}{=} (-\omega(\mathbf{p}) \gamma^0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - mc)u^{(3,4)}(\mathbf{p}) = 0 \quad (3.113)$$

なので、 \mathbf{p} を $-\mathbf{p}$ にすると、

$$\begin{aligned} (-\omega(-\mathbf{p}) \gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}(-\mathbf{p}) - mc)u^{(3,4)}(-\mathbf{p}) &= (-\omega(\mathbf{p}) \gamma^0 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - mc)u^{(3,4)}(-\mathbf{p}) = 0 \\ \stackrel{p^0 = \omega(\mathbf{p})}{\Rightarrow} (-p^0 \gamma^0 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - mc)u^{(3,4)}(-\mathbf{p}) &= (-\not{\epsilon} - mc)u^{(3,4)}(-\mathbf{p}) = 0 \Rightarrow (\not{\epsilon} + mc)u^{(3,4)}(-\mathbf{p}) = 0 \end{aligned} \quad (3.114)$$

とすると、

$$u^{(i+2)}(-\mathbf{p}) = v^{(i)}(\mathbf{p}) \quad (i=1,2) \quad (3.115)$$

は

- エネルギーが正の解： $(\not{\epsilon} + mc)v^{(1,2)}(\mathbf{p}) = 0$ ($p^0 = \omega(\mathbf{p})$)

であるとわかる。つまり、

$$\boxed{(\not{\epsilon} - mc)u^{(1,2)}(\mathbf{p}) = 0, (\not{\epsilon} + mc)v^{(1,2)}(\mathbf{p}) = 0 \text{ for } p^0 = \omega(\mathbf{p})} \quad (3.116)$$

あるいは、変形して

$$\omega(\mathbf{p})u^{(1,2)}(\mathbf{p}) = \gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + mc)u^{(1,2)}(\mathbf{p}), \quad \omega(\mathbf{p})v^{(1,2)}(\mathbf{p}) = \gamma^0(\boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - mc)v^{(1,2)}(\mathbf{p}) \quad (3.117)$$

を得る。

さて、 $(\not{\epsilon} - mc)u^{(i)}(\mathbf{p}) = 0$ ($i=1,2,3,4$) を利用して、

$$\begin{aligned} \gamma^0(\not{\epsilon} - mc)u^{(i)}(\mathbf{p}) = 0 &\Rightarrow \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})} \gamma^0 (\not{\epsilon} - mc)u^{(i)}(\mathbf{p}) = 0 \\ \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})} (\not{\epsilon} - mc) \gamma^0 = 0 &\Rightarrow \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})} (\not{\epsilon} - mc) \gamma^0 u^{(i)}(\mathbf{p}) = 0 \\ \Rightarrow \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})} \gamma^0 (\not{\epsilon} - mc)u^{(i)}(\mathbf{p}) + \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})} (\not{\epsilon} - mc) \gamma^0 u^{(i)}(\mathbf{p}) &= 0 \\ \Rightarrow \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})} \{\gamma^0, \not{\epsilon}\} u^{(i)}(\mathbf{p}) - \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})} 2mc \gamma^0 u^{(i)}(\mathbf{p}) &= 0 \\ \Rightarrow p^0 \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})} u^{(i)}(\mathbf{p}) = mc u^{(j)\dagger}(\mathbf{p}) u^{(i)}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.118)$$

ここで、固有ベクトルの条件の一つである

- **直交性**

を満たすために

$$\boxed{u^{(j)\dagger}(\mathbf{p})u^{(i)}(\mathbf{p}) \equiv \delta^{ij}} \quad (3.119)$$

とすると、

$$\overline{u^{(j)}(\mathbf{p})}u^{(i)}(\mathbf{p}) = \frac{mc}{p^0}\delta^{ij}$$

を得る。同様にして、 $u^{(i+2)}(-\mathbf{p}) = v^{(i)}(\mathbf{p})$ ($i=1,2$) に対しては、

$$-p^0\overline{v^{(j)}(\mathbf{p})}v^{(i)}(\mathbf{p})\Big|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} = mcv^{(j)\dagger}(\mathbf{p})v^{(i)}(\mathbf{p}) = mc\delta^{ij} \quad (3.120)$$

を得るので（問題 2）、

$$\boxed{\begin{aligned} u^{(j)\dagger}(\mathbf{p})u^{(i)}(\mathbf{p}) &= \delta^{ij}, & \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})}u^{(i)}(\mathbf{p}) &= \delta^{ij}\frac{mc}{p^0} = \begin{cases} \delta^{ij}\frac{mc}{\omega} & (p^0 = \omega \text{ for } i=1,2) \\ -\delta^{ij}\frac{mc}{\omega} & (p^0 = -\omega \text{ for } i=3,4) \end{cases} \\ v^{(j)\dagger}(\mathbf{p})v^{(i)}(\mathbf{p}) &= \delta^{ij}, & \overline{v^{(j)}(\mathbf{p})}v^{(i)}(\mathbf{p}) &= -\delta^{ij}\frac{mc}{p^0} \quad (p^0 = \omega) \end{aligned}} \quad (3.121)$$

である。そこで、

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+(\mathbf{p}) = \frac{p^0}{mc} \sum_{i=1}^2 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta} = \frac{\omega(\mathbf{p})}{mc} \sum_{i=1}^2 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta} \quad (3.122)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^-(\mathbf{p}) = \frac{p^0}{mc} \sum_{i=3}^4 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta} = -\frac{\omega(\mathbf{p})}{mc} \sum_{i=3}^4 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta}$$

を考えると、

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta}^+(\mathbf{p})u^{(i=1,2)}(\mathbf{p})_{\beta} &= \frac{\omega(\mathbf{p})}{mc} \sum_{i=1}^2 u^{(j)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})}_{\beta} u^{(i)}(\mathbf{p})_{\beta} \\ &= \frac{u^{(j)\dagger}(\mathbf{p})u^{(i)}(\mathbf{p})=\delta^{ij}}{mc} \frac{\omega(\mathbf{p})}{p^0} mc u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} = u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \quad (p^0 = \omega(\mathbf{p})) \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta}^-(\mathbf{p})u^{(i=3,4)}(\mathbf{p})_{\beta} &= -\frac{\omega(\mathbf{p})}{mc} \sum_{i=3}^4 u^{(j)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})}_{\beta} u^{(i)}(\mathbf{p})_{\beta} \\ &= -\frac{u^{(j)\dagger}(\mathbf{p})u^{(i)}(\mathbf{p})=\delta^{ij}}{mc} \frac{\omega(\mathbf{p})}{p^0} mc u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} = u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \quad (p^0 = -\omega(\mathbf{p})) \end{aligned}$$

なので、

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+(\mathbf{p})u_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) = u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) \quad (i=1,2), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-(\mathbf{p})u_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) = u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) \quad (i=3,4) \quad (3.124)$$

を得る。ここで

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+(\mathbf{p})u_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) = 0 \quad (i=3,4), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-(\mathbf{p})u_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) = 0 \quad (i=1,2) \quad (3.125)$$

は明らかである（問題 1 4-A）。従って、

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+(\mathbf{p}) = \frac{\omega(\mathbf{p})}{mc} \sum_{i=1}^2 u^{(j)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(j)}(\mathbf{p})}_{\beta} = \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} \quad (p^0 = \omega(\mathbf{p}) \text{ for } i=1,2)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^-(p) = -\frac{\omega(\mathbf{p})}{mc} \sum_{i=3}^4 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta} = \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} \quad (p^0 = -\omega(\mathbf{p}) \text{ for } i=3,4) \quad (3.126)$$

とすればよい（問題 1 4-B）。 $\Lambda_{\alpha\beta}^-(p)$ を(3.115)を用いて $v^{(i)}(\mathbf{p})$ ($i=1,2$) で表すと、

$$\Lambda_{\alpha\beta}^-(p^0, -\mathbf{p}) = -\frac{\omega(\mathbf{p})}{mc} \sum_{i=1}^2 v^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{v^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta} = -\left(\frac{\not{p} - mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} \quad \text{for } p^0 = \omega(\mathbf{p}) \quad (3.127)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^-(p^0, -\mathbf{p}) v^{(i)}(\mathbf{p})_{\beta} = v^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \quad (i=1,2)$$

を得る（問題 1 4-C）。以上から、

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta}^+(p) &= \frac{p^0}{mc} \sum_{i=1}^2 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta} = \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} \quad (p^0 = \omega(\mathbf{p})) \\ \Lambda_{\alpha\beta}^-(p) &= \frac{p^0}{mc} \sum_{i=3}^4 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta} = \left(\frac{\not{p} + mc}{2m} \right)_{\alpha\beta} \quad (p^0 = -\omega(\mathbf{p})) \end{aligned} \quad (3.128)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta}^+(p) u_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) &= u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}) \quad (i=1,2), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-(p) u_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) = u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \quad (i=3,4) \\ \Lambda_{\alpha\beta}^+(p) u_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) &= 0 \quad (i=3,4), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-(p) u_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) = 0 \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (3.129)$$

或いは、 $\Lambda_{\alpha\beta}^-(p) = \Lambda_{\alpha\beta}^-(p^0, -\mathbf{p})$ と見なすと・・・

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta}^+(p) &= \frac{\omega(\mathbf{p})}{mc} \sum_{i=1}^2 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta} = \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} \quad (p^0 = \omega(\mathbf{p})) \\ \Lambda_{\alpha\beta}^-(p) &= -\frac{\omega(\mathbf{p})}{mc} \sum_{i=1}^2 v^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{v^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta} = -\left(\frac{\not{p} - mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} \quad (p^0 = \omega(\mathbf{p})) \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta}^+(p) u_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) &= u_{\alpha}^{(i)}(\mathbf{p}), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-(p) v_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) = v^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \quad (i=1,2) \\ \Lambda_{\alpha\beta}^+(p) v_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) &= 0, \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-(p) u_{\beta}^{(i)}(\mathbf{p}) = 0 \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (3.131)$$

である（問題 1 4-D）。(3.130)より

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+(p) + \Lambda_{\alpha\beta}^-(p) = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.132)$$

を満たすことがわかる。また、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta} &= \frac{mc}{p^0} \Lambda_{\alpha\beta}^+(p) \Big|_{p^0=\omega} + \frac{mc}{p^0} \Lambda_{\alpha\beta}^-(p) \Big|_{p^0=-\omega} \\ &= \frac{mc}{\omega(\mathbf{p})} \left(\Lambda_{\alpha\beta}^+(p) \Big|_{p^0=\omega} - \Lambda_{\alpha\beta}^-(p) \Big|_{p^0=-\omega} \right) = \frac{mc}{\omega(\mathbf{p})} \left(\left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} \Big|_{p^0=\omega} - \left(\frac{\not{p} + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} \Big|_{p^0=-\omega} \right) \\ &= \frac{mc}{\omega(\mathbf{p})} \left(\left(\frac{\omega(\mathbf{p})\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} - \left(\frac{-\omega(\mathbf{p})\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{p} + mc}{2mc} \right)_{\alpha\beta} \right) = \frac{mc}{\omega(\mathbf{p})} \frac{\omega(\mathbf{p})}{mc} (\gamma^0)_{\alpha\beta} = (\gamma^0)_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.133)$$

より

$$\boxed{\sum_{i=1}^4 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} \overline{u^{(i)}(\mathbf{p})}_{\beta} = (\gamma^0)_{\alpha\beta}} \quad (3.134)$$

を得る。或いは、

$$\boxed{\sum_{i=1}^4 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} u^{(i)\dagger}(\mathbf{p})_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}} \quad (3.135)$$

である。これは、

● **完全性**

を表している。(3.135)と(3.119)より

$$u^{(j)\dagger}(\mathbf{p})u^{(i)}(\mathbf{p}) = \delta^{ij}, \quad \sum_{i=1}^4 u^{(i)}(\mathbf{p})_{\alpha} u^{(i)\dagger}(\mathbf{p})_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.136)$$

を満たすので、「**正規完全直交系**」

$$\boxed{\langle j|i\rangle = \delta^{ij}, \quad \sum_{i=1}^4 |i\rangle\langle i| = I \text{ for } |i\rangle = u^{(i)}(\mathbf{p})} \quad (3.137)$$

をなしていることになる（問題 1 5）。

Appendix 2: ディラックの γ 行列

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu &= (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}^\mu \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\mu & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma_\mu &= (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma^0, -\boldsymbol{\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_\mu \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu & 0 \end{pmatrix} \\
\sigma^\mu &= (\sigma_0, \boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \sigma_\mu = (\sigma_0, -\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3) \\
\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\mu &= (\sigma_0, -\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3), \bar{\boldsymbol{\sigma}}_\mu = (\sigma_0, \boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \\
\sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} I \\
\gamma_5 &= \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \quad (\gamma_5^2 = I; \varepsilon^{0123} = 1; \varepsilon_{0123} = -1) \\
\{\gamma^A, \gamma^B\} &= 2g^{AB} I \text{ with } g^{AB} = \text{diag.}(1, -1, -1, -1, 1) \quad (A, B = 0, 1, 2, 3, 5)
\end{aligned} \tag{3.138}$$

第 3 章問題

0) (3.2)において「フェルミ統計を満たす」ことを証明せよ。

1) **Appendix 1:ディラック方程式の解**の(3.112)で、 $\mathbf{p}=(0,0,p)$ つまり $p^\mu=(\omega(\mathbf{p}),0,0,p)$ のときに、 $(\not{p}-mc)u^{(i)}(\mathbf{p})=0$ を(3.138)を用いて解き、 $p^0=\pm\omega(\mathbf{p})\left(=\pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2c^2}\right)$ の値を持つことを示し、それぞれの固有ベクトルを求めよ。そのとき、

$$\text{固有ベクトル } u^{(1,2)}(\mathbf{p}) \text{ は } p^0 = \omega(\mathbf{p}) \left(= \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2} \right)$$

$$\text{固有ベクトル } u^{(3,4)}(\mathbf{p}) \text{ は } p^0 = -\omega(\mathbf{p})$$

とする。ここに $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu \left(= \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu p_\mu \right)$ である。

2) **Appendix 1:ディラック方程式の解**の(3.120)を導け。

3) (3.16)を元にして(3.23)を用いて $b^{(1,2)}(\mathbf{p})$ と $b^{(1,2)\dagger}(\mathbf{p})$ の満たす反交換関係：

$$\begin{aligned} \{b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), b^{(j)}(\mathbf{p}')\} &= 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \delta^{ij} \\ \{b^{(i)}(\mathbf{p}), b^{(j)}(\mathbf{p}')\} &= \{b^{(i)\dagger}(\mathbf{p}), b^{(j)\dagger}(\mathbf{p}')\} = 0 \end{aligned} \quad (i,j=1,2)$$

を示せ。

4) エラー! 参照元が見つかりません。に倣って

$$\text{A) } [\hat{N}^{(+)}, a^{(i)\dagger}(\mathbf{k})] = a^{(i)\dagger}(\mathbf{k})$$

$$\text{B) } [\hat{N}^{(-)}, b^{(i)}(\mathbf{k})] = -b^{(i)}(\mathbf{k}) \quad (i=1,2)$$

$$\text{C) } [\hat{N}^{(-)}, b^{(i)\dagger}(\mathbf{k})] = b^{(i)\dagger}(\mathbf{k})$$

を導け。

5) A) (3.41)から(3.42)を導け。

B) (3.49)に $\delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} [\delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) + \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p}))]$ を用いて(3.50)を導け。

6) (3.58)を示せ。

7) (3.61)から(3.62)を用いて(3.63)を導出せよ。

8) (3.68)から(3.69)を導出せよ。

9) (3.80)と(3.81)を示せ。

1 0) (3.83)を示せ。

1 1) (3.92)の $\mathcal{L}(x)$ から $\not{\partial}\psi(x)$ を求めよ。

1 2) (3.92)の $\mathcal{L}(x)$ から(3.94)を求めよ。

1 3) A) (3.104) : $\left(iC\gamma^{\mu T} C^{-1} \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi^C(x) = 0$ を導け。

B) (3.106) : $C^T = \eta C$ ($\eta = \pm 1$) を導け。

C) (3.110) : $(\gamma^\mu C)^T = -\eta(\gamma^\mu C)$ を導け。

D) $(\sigma^{\mu\nu} C)^T = -\eta(\sigma^{\mu\nu} C)$ 、 $(\gamma_5 C)^T = \eta(\gamma_5 C)$ 、 $(\gamma^\mu \gamma_5 C)^T = \eta(\gamma_5 \gamma^\mu C)$ を導け。

1 4) A) (3.125)を確認せよ。

B) (3.126)が(3.124)を満たすことを示せ。

C) (3.127)を導け。

D) (3.130)の $\Lambda_{\alpha\beta}^-(p) = -\left(\frac{\not{p} - mc}{2mc}\right)_{\alpha\beta}$ ($p^0 = \omega(\mathbf{p})$) を導け。

1 5) (3.137)を用いて(3.6)を説明せよ。