

# 第二章 ボーズ量子場：スカラー場

## 素粒子とローレンツ変換

素粒子とは、エネルギー ( $E$ )・運動量 ( $\mathbf{p}=(p_x, p_y, p_z)$ )・質量 ( $m$ ) の間に

$$E^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4 \quad (2.1)$$

の関係を持つ粒子のことである。従って、このエネルギーはラベル  $\mathbf{p}$  で区別される色々なエネルギーを持つことになる。そこで、

$$\begin{cases} \varepsilon_p^2 = c^2 \omega_p^2 \\ \omega_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2} \end{cases} \quad (2.2)$$

とすると、エネルギーは、

$$\sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4} (\equiv c\omega_p), \quad -\sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4} (\equiv -c\omega_p) \quad (2.3)$$

で表わすと、負のエネルギーは物理から除外されるので、

$$\varepsilon_p = c\omega_p (\equiv \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4}) \quad (2.4)$$

が、素粒子のエネルギーになる。【第一章 粒子の生成消滅】の(1.84)でわかった

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^K \varepsilon_i a_i^\dagger a_i \quad (2.5)$$

を参考にすれば

$$\hat{H} = c \sum_{\mathbf{p}=(\infty, \infty, \infty)}^{(-\infty, -\infty, -\infty)} \omega_p a_p^\dagger a_p \quad (2.6)$$

である。ところで、 $\mathbf{p}$  は整数値でなく実数値もとるので、通常は

- 実数の和は積分

であらわすことになる。そのため、 $\omega_p, a_p^\dagger, a_p$  は関数の表記に移り

- $\omega_p \Rightarrow \omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}, a_p^\dagger \Rightarrow a^\dagger(\mathbf{p}), a_p \Rightarrow a(\mathbf{p})$

とする。従って、素粒子のエネルギーは、

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}=(\infty, \infty, \infty)}^{(-\infty, -\infty, -\infty)} c\omega_p a_p^\dagger a_p \Rightarrow \hat{H} = \iiint d\mathbf{p}_x d\mathbf{p}_y d\mathbf{p}_z c\omega(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \equiv \int d\mathbf{p} c\omega(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \quad (2.7)$$

$$\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}$$

となる。また、素粒子にはスピンという物理量が有り、角運動量と同じ物理量であるが、(スピン 0 を除いて) 3 つの複素行列で表される。スピンの大きさにより、

- 整数スピン：0, 1, 2, ... (ボーズ粒子)
  - スピン 0：スカラー (例 ヒッグス粒子)
  - スピン 1：ベクトル (例 光子)

- 半整数スピン： $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ （フェルミ粒子）

➤ スピン  $\frac{1}{2}$ ：スピノール（例 電子）

と分類される

ところで、素粒子は光速近くで移動できるので、このときは、ローレンツ変換で運動量とエネルギーが入り混じってしまう。つまり、 $d\mathbf{p}$ の積分にエネルギーの積分が混ざってきってしまう。このことを避けるには、ローレンツ変換でなんの変更も受けない表式（ローレンツ不変）にする必要がある。特に、 $E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = m^2 c^4$ は、光速近くの素粒子が $(E', \mathbf{p}')$ になったときにも

$E'^2 - c^2 \mathbf{p}'^2 = m^2 c^4$ のままになり、<sup>1</sup> 共に  $m^2$  で表されることがわかっている。従って、

- $E^2 - c^2 \mathbf{p}^2 = m^2 c^4$ の素粒子の条件はローレンツ不変

になっている。つまり、

● 素粒子の質量は、（光速近くの人が測っても）誰が測っても同じ値であることがわかる。そこで、 $d\mathbf{p}$ の積分の代わりに、4次元運動量を

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z \right) = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\mathbf{p}_x, -\mathbf{p}_y, -\mathbf{p}_z \right) = \left( \frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right)$$

$$p^0 = p_0 = \frac{E}{c}, \quad p^1 = -p_1 = \mathbf{p}_x, \quad p^2 = -p_2 = \mathbf{p}_y, \quad p^3 = -p_3 = \mathbf{p}_z \quad (2.8)$$

$$p^2 = p^\mu p_\mu = p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

とするとき、

$$d^4 p = dp^0 d\mathbf{p} = d \frac{E}{c} dp_x dp_y dp_z \quad (2.9)$$

と表せば、 $d^4 p' = d^4 p$ ,  $p'^2 = p^2$ がわかり、

- $d^4 p$ ,  $p^2$ はローレンツ不変

とわかる。このとき、

- $p^2 = m^2 c^2$ を満たすのは、4次元空間での値 $(p^0, \mathbf{p})$ の特別な値 $(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}, \mathbf{p})$

である。このような条件は

$$\delta(p^2 - m^2 c^2) \quad (2.10)$$

として扱うことができる。そして、 $d^4 p$ ,  $p^2$ から作られる

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2 c^2) \quad (2.11)$$

がローレンツ不変になる（問題1）。この積分は、

- $\int d^4 p \delta(p^2 - m^2 c^2) \overbrace{f(\mathbf{p})}^{\substack{\text{素粒子の状態を表す} \\ \text{波動関数など}}}$  より自動的に  $f(\mathbf{p})$  が素粒子の条件  $p^2 = m^2 c^2$  を満たす

<sup>1</sup>  $z$ 軸方向に速度  $v$  で移動していると、 $E' = (E - \beta c p_z) / \sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $c p'_z = (c p_z - \beta E) / \sqrt{1 - \beta^2}$  ( $\beta = v/c$ ) になる。

ことがわかる。ここで、

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2 c^2) = \int dp^0 d\mathbf{p} \delta((p^{02} - \mathbf{p}^2) - m^2 c^2) = \int dp^0 d\mathbf{p} \delta(p^{02} - \omega^2(\mathbf{p})) \quad (2.12)$$

より、

$$\delta(p^{02} - \omega^2(\mathbf{p})) = \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} [\delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) + \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p}))] \quad (2.13)$$

を用いると（問題 2）、

$$\begin{aligned} \int d^4 p \delta(p^2 - m^2 c^2) &= \int dp^0 d\mathbf{p} \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} [\delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) + \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p}))] \\ &= \int_{E \geq 0} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} + \int_{E < 0} \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( p^0 = \frac{E}{c} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

が得られる。<sup>2</sup> 一方、ローレンツ変換で  $E \geq 0$  の素粒子は、 $E < 0$  の素粒子に移れないので、

- $E \geq 0$  と  $E < 0$  の分離はローレンツ不変

である。このことに注意して、ローレンツ不変な量の

$$\theta(p^0) = \begin{cases} 1 & \text{for } p^0 \geq 0 \\ 0 & \text{for } p^0 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta(E) = \begin{cases} 1 & \text{for } E \geq 0 \\ 0 & \text{for } E < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

を導入すると、

$$\int d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) = \int dp^0 d\mathbf{p} \theta(p^0) \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} [\delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) + \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p}))] = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \quad (2.16)$$

とわかる。従って、(2.7)の

$$\hat{H} = \int d\mathbf{p} c\omega(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \quad (2.17)$$

の代わりに、係数を  $1/K(\mathbf{p})$  とし、素粒子のエネルギーは正なので、 $\theta(p^0)$  を用いて、

$$\hat{H} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K(\mathbf{p})} c\omega(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) = \int d^4 p \frac{1}{K(\mathbf{p})} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) c\omega(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \quad (2.18)$$

が、正しい表式になる。このとき、粒子数も

$$\hat{N} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K(\mathbf{p})} a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) = \int d^4 p \frac{1}{K(\mathbf{p})} \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \quad (2.19)$$

と定義される。従って、 $\hat{N}$  がローレンツ不変量なので

- $\frac{1}{K(\mathbf{p})} a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p})$  がローレンツ不変量（但し、 $K(-\mathbf{p}) = K(\mathbf{p})$  に限る） (2.20)

➤ 以降、 $K(\mathbf{p})$  を  $K$  と表示する<sup>3</sup>

になる。 $\hat{N}$  と  $a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p})$  の交換関係より、生成・消滅演算子が定義され

<sup>2</sup> 一般的な公式は  $\delta(g(x)) = \sum_n \delta(x - x_n) / |g'(x_n)|$  with  $g(x_n) = 0$  &  $g'(x_n) \neq 0$  である。

<sup>3</sup>  $K=1$  や  $K=(2\pi\hbar)^3$  や  $K=1/2\omega$  が好まれる。

$$[\hat{N}, a(\mathbf{k})] = -a(\mathbf{k}), \quad [\hat{N}, a^\dagger(\mathbf{k})] = a^\dagger(\mathbf{k}) \quad (2.21)$$

が要求されるので、

$$\boxed{[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = 2\omega(\mathbf{p})K\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')} \quad (2.22)$$

が、生成・消滅演算子の基本式になる（問題 3）。 $[\hat{N}, a(\mathbf{k})] = -a(\mathbf{k})$  のエルミート共役をとれば、 $[\hat{N}, a^\dagger(\mathbf{p})] = a^\dagger(\mathbf{p})$  から自動的に同じ条件を導く事が分かる。

## 量子場の導入

ここで、運動量空間  $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$  から  $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$  に移行するため、フーリエ変換を使用して、座標空間での演算子を量子場  $\phi^{(\pm)}(x)$  : **スピン 0 のスカラー場** とし

$$\begin{aligned} \phi^{(+)}(x) &= \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \quad (*) px = p^0x^0 - \mathbf{p}\mathbf{x} = \omega(\mathbf{k})x^0 - \mathbf{p}\mathbf{x} \\ \phi^{(-)}(x) &\equiv \left(\phi^{(+)}(x)\right)^\dagger = \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

の変換とする。 $A(\mathbf{p})$  は適当な定数であり後ほど決められる。従って、 $\phi^{(\pm)}(x)$  がスカラーなので

$$\bullet \quad A(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) \text{ や } A(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p}) \text{ がローレンツ不変量} \quad (2.24)$$

➤ 以降、 $A(\mathbf{p})$  を  $A$  と表示する<sup>4</sup>

(2.20) と (2.24) より

$$\boxed{A^2(\mathbf{p}) \propto \frac{1}{K(\mathbf{p})}}$$

を満たすことになる。新たな量子場  $\phi(x)$  として、

$$\phi(x) (= \phi^\dagger(x)) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) = \int_{p^0=\omega} \frac{Ad\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left[ a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + a^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right] \quad (2.25)$$

とする。また、簡単な計算により

<sup>4</sup>  $K=1$  や  $K=(2\pi\hbar)^3$  が好まれる。

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(x) &= \frac{\partial^2 A_\mu(x)}{\partial x^0 \partial x^0} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_{p^0=\omega} \frac{Adp}{2\omega(\mathbf{p})} \mathbf{p}^2 \left[ a_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + a^\dagger_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right] \\ \frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^0 \partial x^0} &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_{p^0=\omega} \frac{Adp}{2\omega(\mathbf{p})} \omega^2(\mathbf{p}) \left[ a_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + a^\dagger_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right] \\ \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi(x) &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{p^0=\omega} \frac{Adp}{2\omega(\mathbf{p})} m^2 c^2 \left[ a_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + a^\dagger_\mu(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right]\end{aligned}\tag{2.26}$$

なので、(2.2)を用いて、

$$\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^0 \partial x^0} = \nabla^2\phi(x) - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi(x)\tag{2.27}$$

が成り立つことがわかる。これから、

$$\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^0 \partial x^0} - \nabla^2\phi(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} - \nabla^2\right)\phi(x) = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi(x) \equiv \square\phi(x)\tag{2.28}$$

なので、

$$\boxed{\left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\phi(x) = 0}\tag{2.29}$$

が成り立つ。これを

### ● クライン・ゴールドン方程式

という。整数スピンを持つ素粒子の運動方程式になる。

このとき、

$$\begin{aligned}[\phi(x), \phi(x')] &= \left[ \int_{p^0=\omega/c} \frac{Adp}{2\omega(\mathbf{p})} \left( a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + a^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right), \right. \\ &\quad \left. \int_{p'^0=\omega'/c} \frac{A'dp'}{2\omega(\mathbf{p}')} \left( a(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{ip'x'}{\hbar}\right) + a^\dagger(\mathbf{p}') \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \right) \right] \\ &= \int_{p^0=\omega/c} \frac{Adp}{2\omega(\mathbf{p})} \int_{p'^0=\omega'/c} \frac{A'dp'}{2\omega(\mathbf{p}')} \cdot \\ &\quad \left( \left[ a(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right), a^\dagger(\mathbf{p}') \exp\left(\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \right] + \left[ a^\dagger(\mathbf{p}) \exp\frac{ipx}{\hbar}, a(\mathbf{p}') \exp\left(-\frac{ip'x'}{\hbar}\right) \right] \right) \\ &= \int_{p^0=\omega/c} \frac{Adp}{2\omega(\mathbf{p})} \int_{p'^0=\omega'/c} \frac{A'dp'}{2\omega(\mathbf{p}')} \cdot \\ &\quad \left( 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \exp\left(-\frac{ipx - ip'x'}{\hbar}\right) - 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \exp\left(\frac{ipx - ip'x'}{\hbar}\right) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{A^2 K d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x - ip'x'}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x - ip'x'}{\hbar}\right) \right) \Bigg|_{\substack{\mathbf{p}=\mathbf{p}' \\ p^0=\omega(\mathbf{p})=\omega(\mathbf{p}')=p'^0}} \\
&= A^2 K \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \right) \Leftarrow A^2 K = \mathbf{p} \text{によらない定数}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

つまり、

$$\boxed{[\phi(x), \phi(x')] = A^2 K \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \right)} \quad (A^2 K = \mathbf{p} \text{によらない定数}) \tag{2.31}$$

を得る。ここで、(2.14)の

$$\int d^4 p \delta(p^2 - m^2 c^2) = \int dp^0 d\mathbf{p} \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} \left[ \delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) + \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p})) \right] \tag{2.32}$$

を用いるのであるが、(2.31)は

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(x')] &= A^2 K \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{i\mathbf{p}(x-x')}{\hbar}\right) \right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} \\
&\Leftarrow \int dp^0 \delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) = 1, \int dp^0 \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p})) = 1 \\
&= A^2 K \int d\mathbf{p} \left( \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} \int dp^0 \delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) \exp\left(-\frac{i\omega(\mathbf{p})(x^0 - x'^0) - i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} \int dp^0 \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p})) \exp\left(\frac{i\omega(\mathbf{p})(x^0 - x'^0) - i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \right) \\
&= A^2 K \int d\mathbf{p} \left( \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} \int dp^0 \delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) \exp\left(-\frac{ip^0(x^0 - x'^0) - i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} \int dp^0 \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p})) \exp\left(\frac{i(-p^0)(x^0 - x'^0) - i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \right)
\end{aligned}$$

である。そして、「Appendix 1:空間反転と積分」での  $\int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p} f(-\mathbf{p})$  ( $f(\mathbf{p})$ は任意の関数)

を用いると、第2項は

$$\begin{aligned}
&\int d\mathbf{p} \frac{1}{2\omega(-\mathbf{p})} \int dp^0 \delta(p^0 + \omega(-\mathbf{p})) \exp\left(\frac{i(-p^0)(x^0 - x'^0) - i(-\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&= \int d\mathbf{p} \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} \int dp^0 \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p})) \exp\left(-\frac{ip^0(x^0 - x'^0) - i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \\
&= \int d\mathbf{p} \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} \int dp^0 \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p})) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

となり、第 1 項と合わせて、

$$[\phi(x), \phi(x')] = A^2 K \int dp^0 d\mathbf{p} \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} \begin{pmatrix} \delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) \\ -\delta(p^0 + \omega(\mathbf{p})) \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \quad (2.34)$$

ここで、(2.34)の引き算を足し算に整えるため、ローレンツ不変な量の

$$\varepsilon(p^0) = \begin{cases} 1 & \text{for } p^0 \geq 0 \\ -1 & \text{for } p^0 < 0 \end{cases} \stackrel{p^0 = \frac{E}{c}}{\Leftrightarrow} \varepsilon(E) = \begin{cases} 1 & \text{for } E \geq 0 \\ -1 & \text{for } E < 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

を導入すると、

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(x')] &= A^2 K \int dp^0 d\mathbf{p} \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} \begin{pmatrix} \overbrace{\varepsilon(p^0)}^{p^0 > 0} \delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) \\ \underbrace{-1}_{+\varepsilon(p^0)} \overbrace{\delta(p^0 + \omega(\mathbf{p}))}^{p^0 < 0} \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \\ &= A^2 K \int dp^0 d\mathbf{p} \varepsilon(p^0) \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} (\delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) + \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p}))) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(x')] &= A^2 K \int dp^0 d\mathbf{p} \varepsilon(p^0) \frac{1}{2\omega(\mathbf{p})} (\delta(p^0 - \omega(\mathbf{p})) + \delta(p^0 + \omega(\mathbf{p}))) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \\ &= A^2 K \int d^4 p \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

になり、最終的に

$$\boxed{[\phi(x), \phi(x')] = A^2 K \int d^4 p \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right)} \quad (A^2 K = \mathbf{p} \text{によらない定数}) \quad (2.38)$$

を得る。

一方、 $\left[\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}, \phi(x')\right]$  を求めてみると（この交換関係は(2.111)・(2.112)参照）、(2.31)より

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}, \phi(x')\right] &= \frac{\partial}{\partial x^0} [\phi(x), \phi(x')] = A^2 K \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \right) \\ &= A^2 K \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( -i \frac{p^0}{\hbar} \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) - i \frac{p^0}{\hbar} \exp\left(\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \right) \Bigg|_{p^0 = \omega(\mathbf{p})} \\ &= -i A^2 K \frac{1}{\hbar} \int \frac{d\mathbf{p}}{2} \left( \exp\left(-\frac{i\omega(\mathbf{p})(x^0 - x'^0)}{\hbar} + \frac{ip(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) + \exp\left(\frac{i\omega(\mathbf{p})(x^0 - x'^0)}{\hbar} - \frac{ip(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar}\right) \right) \end{aligned}$$

(2.39)

である。第 2 項に、 $\int d\mathbf{p}f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p}f(-\mathbf{p})$  ( $f(\mathbf{p})$ は任意の関数)を適用して、

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}, \phi(x') \right] &= -iA^2K \frac{1}{\hbar} \int \frac{d\mathbf{p}}{2} \left( \begin{aligned} &\exp\left( -\frac{i\omega(\mathbf{p})(x^0 - x'^0)}{\hbar} + \frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) \\ &+ \exp\left( \frac{i\omega(\mathbf{p})(x^0 - x'^0)}{\hbar} - \frac{i(-\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) \end{aligned} \right) \\ &= -iA^2K \frac{1}{\hbar} \int \frac{d\mathbf{p}}{2} \left( \exp\left( -\frac{i\omega(\mathbf{p})(x^0 - x'^0)}{\hbar} \right) + \exp\left( \frac{i\omega(\mathbf{p})(x^0 - x'^0)}{\hbar} \right) \right) \exp\left( \frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

とわかるので、同時刻 ( $x^0 = x'^0$ ) の交換関係の評価すると、

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}, \phi(x') \right]_{x^0=x'^0} &= -iAK \frac{1}{\hbar} \int \frac{d\mathbf{p}}{2} \left( \begin{aligned} &\exp\left( -\frac{i\omega(\mathbf{p})(x^0 - x'^0)}{\hbar} \right) \\ &+ \exp\left( \frac{i\omega(\mathbf{p})(x^0 - x'^0)}{\hbar} \right) \end{aligned} \right) \exp\left( \frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \\ &= -iA^2K \frac{1}{\hbar} \int \frac{d\mathbf{p}}{2} (1+1) \exp\left( \frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) = -iA^2K \frac{1}{\hbar} \int d\mathbf{p} \exp\left( \frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

になる。そこで、(2.112)より

$$\left[ \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}, \phi(x') \right]_{x^0=x'^0} = -i\hbar c \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.42)$$

と規格化するため (問題 4)、

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left( \frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\hbar} \right) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.43)$$

に注意して、(2.41)は

$$\left[ \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}, \phi(x') \right]_{x^0=x'^0} = -iA^2K \frac{1}{\hbar} (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.44)$$

となるので、条件として

$$A^2K \frac{1}{\hbar} (2\pi\hbar)^3 = \hbar c \Rightarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3 K(\mathbf{p})}}, A(-\mathbf{p}) = A(\mathbf{p}) \Leftarrow K(-\mathbf{p}) = K(\mathbf{p}) \quad (2.45)$$

が導かれる。同様に、 $[\phi(x), \phi(x')]_{x^0=x'^0} = 0$  である (問題 5)。すなわち、

$$\begin{cases}
\phi^{(+)}(x) = \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \\
\phi^{(-)}(x) = \int_{p^0=\omega} \frac{A(\mathbf{p})d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)
\end{cases} \Leftarrow A(\mathbf{p}) = \sqrt{\frac{\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3 K(\mathbf{p})}}$$

$$\phi(x) (= \phi^\dagger(x)) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)$$

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(x')] &= \frac{\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \right) \Leftarrow p^0 = \omega(\mathbf{p}) \\
&= \frac{\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int d^4 p \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \Leftarrow p^0 = (-\infty, \infty)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\left[ \phi(x), \phi(x') \right]_{x^0=x'^0} = 0, \quad \left[ \phi(x), \frac{\partial \phi(x')}{\partial x^0} \right]_{x^0=x'^0} = \left[ \phi(x'), \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \right]_{x^0=x'^0} = i\hbar c \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

がわかった。ここで、

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(x')] &= i\Delta(x-x') \\
\Delta(x-x') &= -\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \right) \Leftarrow p^0 = \omega(\mathbf{p}) \\
&= -\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int d^4 p \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \Leftarrow p^0 = (-\infty, \infty)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

を不変デルタ関数といい、幾つかのバージョンがある（問題 6）。特に

$$\left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \Delta(x) = 0 \quad \left( \square = \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^3} \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \tag{2.48}$$

を満たしている。また、

$$\left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \Delta_F(x) = -2i\hbar c \delta^{(4)}(x) \tag{2.49}$$

を満たす不変デルタ関数  $\Delta_F(x)$  が後ほど重要になる（【第六章 T 積と S 行列】の(6.54)）。これは

$$\frac{1}{2\hbar c} i\Delta_F(x) \tag{2.50}$$

がグリーン関数であることを示している（問題 7）。

## 生成・消滅演算子と量子場

素粒子のエネルギーを量子場で表すため、生成・消滅演算子を量子場で表す。そのため、 $\partial\phi(x)/\partial x^0$

を調べる。 $\phi(x)$  と  $\partial\phi(x)/\partial x^0$  は

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int_{p^0=\omega} \frac{Adp}{2\omega(\mathbf{p})} \left[ a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + a^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right] \\ \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} &= i \frac{1}{\hbar} \int_{p^0=\omega} \frac{Adp}{2} \left[ -a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) + a^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right]\end{aligned}\quad (2.51)$$

なので、生成・消滅演算子が、 $\phi(x)$  と  $\partial\phi(x)/\partial x^0$  で表される。順に計算を進めると・・・

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int Adp \left( \frac{a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) + \frac{a^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \right) \\ -i \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} &= \frac{1}{\hbar} \int Adp \left( -\frac{a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) + \frac{a^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2} \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \right)\end{aligned}\quad (2.52)$$

より、まず、 $\exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right)$  を  $\exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)$  に合わせるために、 $\exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right)$  の項に  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  を施す。その時、「Appendix 1:空間反転と積分」の  $\int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p} f(-\mathbf{p})$  ( $f(\mathbf{p})$  は任意の関数) に注意すると、

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int d\mathbf{p} \left( A(\mathbf{p}) \frac{a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) + \frac{A(\mathbf{p})}{A(-\mathbf{p})} \frac{a^\dagger(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\omega(-\mathbf{p})} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right) \\ -i \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} &= \frac{1}{\hbar} \int A(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \left( -\frac{a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) + \frac{a^\dagger(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2} \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \right)\end{aligned}\quad (2.53)$$

なので、 $\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^4} = \omega(-\mathbf{p})$  より

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int Adp \left( \frac{a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} + \frac{a^\dagger(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} \right) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \\ -i \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} &= \frac{1}{\hbar} \int Adp \left( -\frac{a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2} + \frac{a^\dagger(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega x^0}{\hbar}\right)}{2} \right) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)\end{aligned}\quad (2.54)$$

とわかる。更に、フーリエ変換（問題 8）

$$f(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Rightarrow f(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \quad (2.55)$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega\mathbf{x}^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} + \frac{a^\dagger(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega\mathbf{x}^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} &= \frac{1}{A} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\ -\frac{a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega\mathbf{x}^0}{\hbar}\right)}{2} + \frac{a^\dagger(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega\mathbf{x}^0}{\hbar}\right)}{2} &= \frac{1}{A} \hbar \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{x} \left(-i \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^0}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

を得る。これから、

$$\begin{aligned} \frac{a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega\mathbf{x}^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} + \frac{a^\dagger(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega\mathbf{x}^0}{\hbar}\right)}{2\omega(\mathbf{p})} &= \frac{1}{A} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\ -\frac{a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega\mathbf{x}^0}{\hbar}\right)}{2} + \frac{a^\dagger(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega\mathbf{x}^0}{\hbar}\right)}{2} &= \frac{1}{A} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \hbar \int d\mathbf{x} \left(-i \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^0}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

として、両辺を引き算すれば、

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{i\omega\mathbf{x}^0}{\hbar}\right) &= \frac{1}{A} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \hbar \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \int d\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) - \frac{1}{A} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \hbar \int d\mathbf{x} \left(-i \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^0}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(\mathbf{x}) + i \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^0}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\ \Rightarrow a(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(\mathbf{x}) + i \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^0}\right) \exp\left(\frac{i(\omega\mathbf{x}^0 - \mathbf{p}\mathbf{x})}{\hbar}\right) \\ &= \frac{p\mathbf{x} = p^0 x^0 - \mathbf{p}\mathbf{x}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(\mathbf{x}) + i \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^0}\right) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0 = \omega(\mathbf{k})} \end{aligned} \quad (2.58)$$

同様に、両辺を足し算すれば、

$$\begin{aligned} a^\dagger(-\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\omega\mathbf{x}^0}{\hbar}\right) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \int d\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) + \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int d\mathbf{x} \left(-i \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^0}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(\mathbf{x}) - i \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^0}\right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \\ \Rightarrow a^\dagger(-\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int d\mathbf{x} \left(\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(\mathbf{x}) - i \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x^0}\right) \exp\left(-\frac{i(\omega\mathbf{x}^0 + \mathbf{p}\mathbf{x})}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

なので、 $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ にし、 $\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2} = \omega(-\mathbf{p})$ に注意すれば、

$$a^\dagger(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int d\mathbf{x} \left( \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(x) - i \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{k})} \quad (2.60)$$

が得られる。従って、

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int d\mathbf{x} \left( \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(x) + i \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{k})} \\ a^\dagger(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int d\mathbf{x} \left( \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(x) - i \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{k})} \quad (\equiv (a(\mathbf{p}))^\dagger) \end{aligned} \quad (2.61)$$

である（問題9）。特に、

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{k})} = \frac{ip^0}{\hbar} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{k})} = \frac{i(\mathbf{p})}{\hbar} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \quad (2.62)$$

に注意して

$$\frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(x) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{k})} = -i\phi(x) \frac{\partial}{\partial x^0} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \quad (2.63)$$

より

$$A(x) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^\mu}} B(x) = A(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} B(x) - \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} A(x) \right) B(x) \quad (2.64)$$

と定義すると

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}) &= -i \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int d\mathbf{x} \phi(x) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{k})} \\ a^\dagger(\mathbf{p}) &= i \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int d\mathbf{x} \phi(x) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^0}} \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{k})} \end{aligned} \quad (2.65)$$

と表わされる。

## 量子場のエネルギー

さて、エネルギーは(2.18)より、

$$\hat{H} = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \quad (2.66)$$

であるが、(2.61)を用いて、量子場を使って表してみる。ところで、

$$\hat{H}' = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \frac{a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) + a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p})}{2} \quad (2.67)$$

と $\hat{H}$ を比較すると、その差は、 $[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{k})] = 2\omega(\mathbf{p}) K \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ に注意して

$$\begin{aligned}\hat{H}' - \hat{H} &= \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) [a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p})] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) 2K\omega(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{0}) \int d\mathbf{p} c\omega(\mathbf{p})\end{aligned}\quad (2.68)$$

になり、

$$\hat{H}' - \hat{H} = \text{単なる数} \quad (2.69)$$

であり、実際には

$$\frac{1}{2} \delta(\mathbf{0}) \int d\mathbf{p} c\omega(\mathbf{p}) = \text{無限大} \quad (2.70)$$

である。これは、場は大きさ 0 の一点（いわゆる、数学のメジャー 0）に存在するので、不確定性原理により運動量は無限大、従ってエネルギーも無限大になる。この無限大は、ゆくゆく「繰り込み」により有限のエネルギーに再定義される。ここでは、直接の結果が、見易くなるので、

$$\boxed{\hat{H}' = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \frac{1}{K} c\omega(\mathbf{p}) \frac{a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p})}{2}} \quad (2.71)$$

を用いて、場のエネルギーを求めてみる。(2.61)の  $a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p})$  より

$$\begin{aligned}\hat{H}' &= \frac{c}{2} \int d\mathbf{p} \frac{1}{K} \frac{a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p})}{2} \\ &= \frac{c}{4} \int d\mathbf{p} \frac{1}{K} \left[ \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int dx \left( \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(x) - i \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int dx' \left( \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(x') + i \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left(\frac{ipx'}{\hbar}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int dx' \left( \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(x') + i \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left(\frac{ipx'}{\hbar}\right) \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar}{A} \int dx \left( \frac{\omega(\mathbf{p})}{\hbar} \phi(x) - i \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \right) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \right] \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{p})}\end{aligned}\quad (2.72)$$

である。(2.71)から分かるように、 $a(\mathbf{p})$  と  $a^\dagger(\mathbf{p})$  の時間については、定義より同時刻なので、(2.72)

では、 $x'^0 = x^0$  である。従って、 $[\phi(x), \phi(x')] \Big|_{x^0=x'^0} = 0$  を考慮して、

$$\hat{H}' = \frac{c}{2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \hbar \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \hbar \int d\mathbf{p} dx dx' \frac{1}{A^2 K} \left( \frac{\omega^2(\mathbf{p})}{\hbar^2} \phi(x)\phi(x') + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left(\frac{ip(x'-x)}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} \quad (2.73)$$

より、(2.45)を用いて

$$\hat{H}' = \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} dx dx' \left( \frac{\omega^2(\mathbf{p})}{\hbar^2} \phi(x)\phi(x') + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left(\frac{ip(x'-x)}{\hbar}\right) \Bigg|_{p^0=\omega(\mathbf{p})} \quad (2.74)$$

を得る（問題 10）。更に、

$$\begin{aligned}\hat{H}' &= \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3} \int dp dx dx' \left( \frac{\omega^2(\mathbf{p})}{\hbar^2} \phi(x) \phi(x') + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^0} \right) \\ &\quad \cdot \exp\left( \frac{i\omega(\mathbf{p})(x'^0 - x^0) - i\mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{\hbar} \right) \\ &= \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3} \int dp dx dx' \left( \frac{\omega^2(\mathbf{p})}{\hbar^2} \phi(x) \phi(x') + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left( -\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{\hbar} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0}\end{aligned}\quad (2.75)$$

である。従って、 $\omega^2(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 + m^2 c^2$  を用いると

$$\hat{H}' = \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3} \int dp dx dx' \left( \phi(x) \phi(x') \frac{(-\hbar^2 \nabla^2 + m^2 c^2)}{\hbar^2} + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left( -\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{\hbar} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0}\quad (2.76)$$

となるが、第 1 項の積分は・・・

$$\int dp dx dx' \phi(x) \phi(x') \nabla^2 \exp\left( -\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{\hbar} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0} = \int dp dx dx' \phi(x') (\nabla^2 \phi(x)) \exp\left( -\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{\hbar} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0}\quad (2.77)$$

を考慮する（問題 11）と、

$$\begin{aligned}\hat{H}' &= \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3} \int dp dx dx' \left( \phi(x) \phi(x') \left( -\nabla^2 + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left( -\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{\hbar} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0} \\ &= \frac{1}{2(2\pi\hbar)^3} \int dp dx dx' \left( -\phi(x') (\nabla^2 \phi(x)) + m^2 \phi(x) \phi(x') + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^0} \right) \exp\left( -\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{\hbar} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0}\end{aligned}\quad (2.78)$$

において、積分が実行できて

$$\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dp \exp\left( -\frac{i\mathbf{p}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{\hbar} \right)\quad (2.79)$$

を当てるので、

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} \int dx dx' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \left( -\phi(x') (\nabla^2 \phi(x)) + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi(x) \phi(x') + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^0} \right) \Bigg|_{x^0=x'^0}\quad (2.80)$$

を得ることができる。従って、

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} \int dx \left( -\phi(x) (\nabla^2 \phi(x)) + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi(x) \phi(x) + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0} \right)\quad (2.81)$$

を得る。更に、部分積分を実行して、 $-\phi(x) (\nabla^2 \phi(x))$  を  $\nabla\phi(x) (\nabla\phi(x))$  置き換え、量子場のエネ

ルギーは

$$\hat{H}' = \frac{1}{2} \int dx \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} + (\nabla \phi(x)) (\nabla \phi(x)) + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi(x) \phi(x) \right) \quad (2.82)$$

とわかる。

通常、 $\hat{H}$  を  $\hat{H}'$  で置き換えるため、Normal Product という手続き：

● すべての消滅演算子 ( $a$ ) を右に、すべての生成演算子 ( $a^\dagger$ ) を左に  
を使う。つまり、

$$\begin{cases} \phi^{(+)}(x) = \int_{p^0=\omega} \frac{A d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a(\mathbf{p}) \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) \\ \phi^{(-)}(x) = \int_{p^0=\omega} \frac{A d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} a^\dagger(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right) \end{cases} \leftarrow A = \sqrt{\frac{\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3 K}} \quad (2.83)$$

で読み直し、

● Normal Product の記号  $N$

を用いて

$$N(\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x')) = N(\phi^{(+)}(x')\phi^{(-)}(x)) = \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x') \quad (2.84)$$

これより、

$$\begin{aligned} 0 &= N(\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x')) - N(\phi^{(+)}(x')\phi^{(-)}(x)) = N([\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(x')]) \\ &\Rightarrow N([\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(x')]) = 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

になる。この時、 $N(\phi(x)\phi(x')) = N((\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))(\phi^{(+)}(x') + \phi^{(-)}(x')))$  は、

$$\begin{aligned} N(\phi(x)\phi(x')) &= N((\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x))(\phi^{(+)}(x') + \phi^{(-)}(x'))) \\ &= N(\phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(x') + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x') + \phi^{(+)}(x)\phi^{(-)}(x') + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(x')) \\ &= \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(x') + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x') + \phi^{(-)}(x')\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(x') \end{aligned} \quad (2.86)$$

なので

$$N(\phi(x)\phi(x')) = \phi^{(+)}(x)\phi^{(+)}(x') + \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x') + \phi^{(-)}(x')\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x)\phi^{(-)}(x') \quad (2.87)$$

である。従って、

$$\begin{aligned}
 a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) &\Rightarrow N(\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x')) = \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x') \\
 \frac{a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p})}{2} &\Rightarrow N\left(\frac{\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x') + \phi^{(+)}(x')\phi^{(-)}(x)}{2}\right) \\
 &= N(\phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x')) = \phi^{(-)}(x)\phi^{(+)}(x')
 \end{aligned} \tag{2.88}$$

のように、どちらで計算しても同じ結果になる。従って、「 $\hat{H}' - \hat{H} = \text{単なる数}$ 」のように

- Normal Product は（単なる数の）定数項の差を無視する
- Normal Product は、演算子を制限つきで可換にする<sup>5</sup>

さて、エネルギーがもとまったので、そのエネルギー密度を  $\mathcal{H}$  で表すと、ことになる。従って、ここの様に  $a^\dagger a + a a^\dagger$  を使うと、最終的に、きれいな表式になるので  $a^\dagger a + a a^\dagger$  を使えばよい。以上から、エネルギー演算子を、改めて  $H$  とすると

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int dx N \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} + (\nabla \phi(x))(\nabla \phi(x)) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi(x)\phi(x) \right) \tag{2.89}$$

が正しい表式になる。しばしば、この  $N$  の代わりに、 $:$  で挟む表記も好まれ

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int dx : \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} + (\nabla \phi(x))(\nabla \phi(x)) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi(x)\phi(x) : \tag{2.90}$$

も用いられる。

## 量子場のラグランジアン

さて、エネルギーがもとまったので、そのエネルギー密度を  $\mathcal{H}$  で表すと、

$$\hat{H} = \int dx \mathcal{H}(x) \equiv \frac{1}{2} \int dx : \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} + (\nabla \phi(x))(\nabla \phi(x)) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi(x)\phi(x) : \tag{2.91}$$

とわかる。つまり、

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} + (\nabla \phi(x))(\nabla \phi(x)) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi(x)\phi(x) \right) \tag{2.92}$$

になる。<sup>6</sup> このエネルギー密度は、ラグランジアン密度（ $\mathcal{L}$  とする）から、

$$\mathcal{H}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^0}\right)} \frac{\partial \phi}{\partial x^0} - \mathcal{L}(x) \tag{2.93}$$

と与えられることが分かっている（「付録：ラグランジアン密度とエネルギー密度」ファイル）。 $\mathcal{L}$  として

<sup>5</sup> 「すべての消滅演算子（ $a$ ）を右に、すべての生成演算子（ $a^\dagger$ ）を左に」という制限。第三章では「制限つきで反可換」になる。

<sup>6</sup> 以降、Normal Product の記号は落として表記する。

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} - (\nabla \phi(x)) (\nabla \phi(x)) - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi(x) \phi(x) \right) \quad (2.94)$$

をとればよいことが分かる（問題 1 2）。

もう少し、簡潔な表式を得るために、

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0}, \nabla \phi(x) \right), \quad \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0}, -\nabla \phi(x) \right) \quad (2.95)$$

に注意すると、

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} - (\nabla \phi(x)) (\nabla \phi(x)) \quad (2.96)$$

とわかる。つまり、

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \left( \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi(x) \phi(x) \right) \quad (2.97)$$

である。ここで、

- 重複する添え字はすべての和を取る

の約束で、 $\Sigma$ を省略すると、

$$\boxed{\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu}} \quad (2.98)$$

等の略記ができ、さらに

$$\boxed{\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}} \quad (2.99)$$

と表記すると、

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} = \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) = (\partial_\mu \phi(x))^2 \quad (2.100)$$

を用いると簡潔な表記になる。以上から、

$$\boxed{\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \left( (\partial_\mu \phi(x))^2 - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2(x) \right), \quad \mathcal{N}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi - \mathcal{L}(x)} \quad (2.101)$$

が量子場のラグランジアン密度とエネルギー密度になる。

一方、ラグランジアン密度から運動方程式(2.29)を導くことができ、

$$\phi_\mu = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \quad (2.102)$$

の略記  $\phi_\mu$  を用いて、ラグランジュの運動方程式：

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_\mu} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi} \quad (2.103)$$

である。これが、(2.29)の

$$\left( \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right) \phi(x) = 0 \quad (2.104)$$

を導くはずである。そこで、(2.101)より、和記号を復活して

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \left( \sum_{\mu=0}^3 (\phi_\mu(x))^2 - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2(x) \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{\mu=0}^3 \phi^\mu(x) \phi_\mu(x) - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2(x) \right) \quad (2.105)$$

より、(2.103)と(2.105)の和記号の添え字  $\mu$  の重複を回避してして

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_\nu} &= \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial \phi_\nu} \frac{1}{2} \left( \sum_{\mu=0}^3 \phi^\mu(x) \phi_\mu(x) - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2(x) \right) \\ &+ \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial \phi^\nu} \frac{1}{2} \left( \sum_{\mu=0}^3 \phi^\mu(x) \phi_\mu(x) - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2(x) \right) \end{aligned} \quad (2.106)$$

は、

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \phi_\nu} \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \phi^\mu(x) \phi_\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \phi^\mu(x) \delta_\mu^\nu = \phi^\nu \\ \frac{\partial}{\partial \phi^\nu} \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \phi^\mu(x) \phi_\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \delta_\nu^\mu \phi_\mu(x) = \phi_\nu \end{cases} \quad (2.107)$$

を用いると

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\nu} \phi^\nu + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\nu} \phi_\nu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\nu} \phi^\nu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \phi = \square \phi \quad (2.108)$$

と計算できる。 $\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi}$  を求めれば、(2.103)は

$$\square \phi = - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi \quad (2.109)$$

に帰着し、(2.104)と一致する。

このラグランジアンを用いると、同時刻交換関係(2.42)を導くことができる。一般化された運動量  $\pi(x)$  として

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} \right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \quad (2.110)$$

であるので、(2.101)より

$$\pi(x) = \frac{1}{c^2} \dot{\phi}(x) \quad (2.111)$$

を得る（問題 1 3）。同時刻交換関係は、一般化された座標  $\phi(x)$  と  $\pi(x)$  の間で、

$$[\phi(x), \pi(x')] \Big|_{x^0=x'^0} = [\phi(x'), \pi(x)] \Big|_{x^0=x'^0} = i\hbar \delta(x-x') \quad (2.112)$$

を要請する。

## 荷電量子場のラグランジアン

さて、電荷を持つ量子場のラグランジアンを考察する。ここで、電荷に対応する演算子を  $\hat{Q}_{em}$  とすると、その変化はユニタリー演算子

$$U = \exp(i\theta \hat{Q}_{em}) \quad (2.113)$$

で表される。今、量子状態を

$$|\phi(x)\rangle = \phi(x)|0\rangle \text{ with } \hat{Q}_{em}|0\rangle = 0 \quad (2.114)$$

で定義すれば、

$$\hat{Q}_{em} |\phi(x)\rangle = q |\phi(x)\rangle \quad (2.115)$$

により、 $\phi(x)$  の電荷  $q$  が定義される。その結果、

$$|\phi'(x)\rangle = U |\phi(x)\rangle \quad (2.116)$$

より

$$\phi'(x) = U \phi(x) U^{-1} = U \phi(x) U^\dagger = e^{i\theta q} \phi(x) \quad (2.117)$$

即ち、

$$[\hat{Q}_{em}, \phi(x)] = q \phi(x) \quad (2.118)$$

が導かれる（問題 1 4-A）。この条件より

- $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$  であると電荷をもてない

とわかる（問題 1 4-B）。従って、

- 電荷を持つには  $\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$  である

ことになる。

$\phi^\dagger(x) \neq \phi(x)$  は「 $\phi(x)$  が複素数場である」ことを示すので、2つの実数場  $\phi_{1,2}(x) : \phi_{1,2}(x) = \phi_{1,2}^\dagger(x)$  を用いて

$$\phi(x) = \frac{\phi_1(x) + i\phi_2(x)}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi_1(x) = \frac{\phi(x) + \phi^\dagger(x)}{\sqrt{2}}, \quad \phi_2(x) = \frac{\phi(x) - \phi^\dagger(x)}{\sqrt{2}i} \quad (2.119)$$

とかける。実数場  $\phi_{1,2}(x)$  のラグランジアンは、微分記号の略記(2.100) :  $(\partial_\mu \phi(x))^2$  に注意して

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \left( (\partial_\mu \phi_i(x))^2 - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi_i^2(x) \right) \quad (2.120)$$

で与えられるので、(2.119)より

$$\mathcal{L}(x) = |\partial_\mu \phi(x)|^2 - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 |\phi(x)|^2 \quad (2.121)$$

を得る（問題 15）。

以上から

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \left( (\partial_\mu \phi(x))^2 - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2(x) \right), \quad \mathcal{H}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi - \mathcal{L}(x) \quad (2.122)$$

$$\hat{H} = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}(x) \equiv \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} : \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} + (\nabla \phi(x))(\nabla \phi(x)) + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi(x)\phi(x) :$$

$$\mathcal{L}(x) = |\partial_\mu \phi(x)|^2 - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 |\phi(x)|^2, \quad \mathcal{H}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi + \partial_0 \phi^* \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_0 \phi^*)} - \mathcal{L}(x) \quad (2.123)$$

$$\hat{H} = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}(x) \equiv \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} : \left| \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^0} \right|^2 + |\nabla \phi(x)|^2 + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 |\phi(x)|^2 :$$

である。

## Appendix 1:空間反転と積分

ここで、 $\int d\mathbf{p}f(\mathbf{p})$  の積分に  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  を施すと、

$$\begin{aligned}
 \int d\mathbf{p}f(\mathbf{p}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z f(\mathbf{p}) \xrightarrow{\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}} \int_{\infty}^{-\infty} d(-p_x) \int_{\infty}^{-\infty} d(-p_y) \int_{\infty}^{-\infty} d(-p_z) f(-\mathbf{p}) \\
 &= - \int_{\infty}^{-\infty} dp_x \int_{\infty}^{-\infty} dp_y \int_{\infty}^{-\infty} dp_z f(-\mathbf{p}) = - \left( - \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \right) \left( - \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \right) \left( - \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \right) f(-\mathbf{p}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z f(-\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p}f(-\mathbf{p})
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

なので、

$$\int d\mathbf{p}f(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p}f(-\mathbf{p}) \quad (f(\mathbf{p}) \text{ は任意の関数}) \tag{2.125}$$

がわかる。

## 第 2 章問題

1)  $d^4 p = dp^0 dp = d \frac{E}{c} dp_x dp_y dp_z$  はローレンツ変換に対して不変であることを示せ。簡単のため、

$\mathbf{p} = (0, 0, p)$  としてよい。z 方向に速度  $v$  で移動する観測者では、 $\beta = v/c$  とすると、

$$E' = \frac{E - \beta cp}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad cp' = \frac{cp - \beta E}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

がエネルギーと運動量の値になる。つまり、 $(d^4 p') = d \frac{E'}{c} dp'_x dp'_y dp'_z = d \frac{E}{c} dp_x dp_y dp_z (= d^4 p)$  を示せば良い。

2) 公式： $\delta(g(x)) = \sum_n \delta(x - x_n) / |g'(x_n)|$  with  $g(x_n) = 0$  &  $g'(x_n) \neq 0$  を用いて、(2.13)を示せ。

3) (2.19)と(2.21)から(2.22)を導け。

4) (2.112)より(2.42)を導け。

5) (2.31)を用いて  $[\phi(x), \phi(x')] \Big|_{x^0=x'^0} = 0$  を示せ。

6) (2.47)において、 $\Delta(x-x') = -\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int d^4 p \varepsilon(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right)$  から

$$\Delta(x-x') = -\frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})} \left( \exp\left(-\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{ip(x-x')}{\hbar}\right) \right) \Big|_{p^0=\omega(\mathbf{p})}$$
 を導け。

7) A) (2.48)の  $\left(\square + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right) \Delta(x) = 0$  を証明せよ。

B) (2.49)に関連して、グリーン関数  $G(x)$  が  $\frac{d^2 G(x)}{dx^2} - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 G(x) = \delta(x)$  を満たすとき、

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \varphi(x) = J(x)$$

の解を求めよ。

8) (2.55)の  $f(x) = \int d\mathbf{p} f(\mathbf{p}) \exp\left(\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right)$  から  $f(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dx f(x) \exp\left(-\frac{i\mathbf{p}x}{\hbar}\right)$  を導け。

9) (2.61)において、 $a^\dagger(\mathbf{p})$  は、 $a(\mathbf{p})$  を用いて  $(a(\mathbf{p}))^\dagger$  より計算できる。

A)  $\phi^\dagger(x) \left( \equiv (\phi(x))^\dagger \right) = \phi(x)$  を証明せよ。

B)  $a^\dagger(\mathbf{p})$  を求めよ。

1 0) (2.73)で、 $\phi(x)\frac{\partial\phi(x')}{\partial x'^0}$  や  $\phi(x')\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^0}$  の項が現れないのは何故か？

1 1) A) (2.75)から(2.76)を導け。

B) (2.77)を証明せよ。

1 2) (2.94)から(2.92)を導け。

1 3) (2.110)に関連して、ラグランジュ関数  $L = \frac{1}{2m}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x)$  から、一般化された力と、一般化された運動量を求めよ。

1 4E) A) (2.117)と(2.118)を導け。

B) 「 $\phi^\dagger(x) = \phi(x)$  であると電荷をもてない」を示せ。

1 5) (2.121)を導け。