

# 付録 C ボゴリューボフ変換

## 生成・消滅演算子の交換関係

生成・消滅演算子の  $\hat{a}$  と  $\hat{a}^\dagger$  の満たす基本式は、ボーズ粒子・フェルミ粒子に対して、 $[\hat{a}, \hat{a}] = 0$

(ボーズ粒子) は自明であるが

$$\begin{cases} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, [\hat{a}, \hat{a}] = 0 \cdots \text{boson} \\ \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1, \{\hat{a}, \hat{a}\} = 0 \cdots \text{fermion} \end{cases} \quad (1.1)$$

である。この時、「 $\hat{a}$  と  $\hat{a}^\dagger$  が生成・消滅演算子である事」を保証する条件  $[N, \hat{a}] = -\hat{a}$  は

$$N = \frac{1}{2} \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\} \cdots \text{boson}, \frac{1}{2} [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \cdots \text{fermion} \quad (1.2)$$

を用いて、(1.1)の元で

$$[N, \hat{a}] = \begin{cases} \frac{1}{2} \{[\hat{a}^\dagger, \hat{a}], \hat{a}\} = -\hat{a} \cdots \text{boson} \\ \frac{1}{2} (\{\{\hat{a}, \hat{a}\}, \hat{a}^\dagger\} - \{\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\}, \hat{a}\}) = -\hat{a} \cdots \text{fermion} \end{cases} \quad (1.3)$$

と正しい交換関係を導く。

### ボゴリューボフ変換 (Bogoliubov transformation)

$\hat{a}$  と  $\hat{a}^\dagger$  の任意の変換後を  $\hat{a}'$  と  $\hat{a}'^\dagger$  とする時、

$$\begin{cases} [\hat{a}', \hat{a}'^\dagger] = 1, [\hat{a}', \hat{a}'] = 0 \cdots \text{boson} \\ \{\hat{a}', \hat{a}'^\dagger\} = 1, \{\hat{a}', \hat{a}'\} = 0 \cdots \text{fermion} \end{cases} \quad (1.4)$$

であれば、 $\hat{a}'$  と  $\hat{a}'^\dagger$  も生成・消滅演算子になる。【付録 A パラボーズ粒子の生成消滅】擬似クリフォード代数と  $Sp(2, \mathbb{R})$  (1.74) によるボゾン粒子の場合と【付録 B パラフェルミ粒子の生成消滅】クリフォード代数と生成・消滅演算子 (1.80) によるフェルミ粒子の場合、エルミー

ト演算子の  $\gamma_\mu$  ( $\mu = 1, 2$ )

$$\gamma_1 = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \gamma_2 = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}i} \Leftrightarrow \hat{a} = \frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{\sqrt{2}}, \hat{a}^\dagger = \frac{\gamma_1 - i\gamma_2}{\sqrt{2}} \quad (1.5)$$

を用いている。ここでは、フェルミ粒子の場合の  $\gamma_1 = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}i}$ ,  $\gamma_2 = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}$  代わりに(1.5)を用いて

問題ない。 $\gamma_\mu$  は

$$\begin{cases} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu} \cdots \text{boson} (\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1) \\ \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \delta_{\mu\nu} \cdots \text{fermion} \end{cases} \quad (1.6)$$

を満たす。その時、

$$\begin{cases} [\gamma'_\mu, \gamma'_\nu] = [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \cdots \text{boson} \\ \{\gamma'_\mu, \gamma'_\nu\} = \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \cdots \text{fermion} \end{cases} \quad (1.7)$$

の変換を、 $\gamma'_\mu$  を  $\gamma_\mu^\dagger = \gamma'_\mu$  を保ちながら与える時、変換行列は、4 つ実数 :  $A, B, C, D$  とすると

$$\begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \equiv \mathcal{B} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

で記述され

- (1.7)を不変にする変換  $\mathcal{B}$  をポゴリユーボフ変換という。

## ボーズ粒子のポゴリユーボフ変換

$[\gamma'_\mu, \gamma'_\nu] = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$  (ボーズ粒子) を満たす変換を求める。ここで、

$$[\gamma_1, \gamma_2] = (\gamma_1 \ \gamma_2) G \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \Leftarrow G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

なので、 $[\gamma'_1, \gamma'_2] = [\gamma_1, \gamma_2]$  より

$$\boxed{\mathcal{B}^T G \mathcal{B} = G} \quad (1.10)$$

が導かれる。従って、

- 変換  $\mathcal{B}$  は  $Sp(2, \mathbb{R})$  群<sup>1</sup>

を与える。(1.10)から

$$\mathcal{B}^T G \mathcal{B} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = (AD - BC) G = G \quad (1.11)$$

より  $\det \mathcal{B} = 1$  が要請される。 $\det \mathcal{B} = \exp \text{Tr} \ln \mathcal{B} = 1$  を用いて、 $\text{Tr} \mathcal{B} = 0$  を満たす実行列の  $\mathcal{B}$  は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (= N = \sigma_3), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (= L = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2}), \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (= M = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2}) \quad (1.12)$$

で与えられる。従って、実変数  $\alpha_{1,2,3}$  として

$$\boxed{\mathcal{B} = \exp[-(\alpha_1 L + \alpha_2 M + \alpha_3 N)]} \quad (1.13)$$

を得る。<sup>2</sup> この変換を、 $\hat{a}$  と  $\hat{a}^\dagger$  の変換に直すには、(1.5)より

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} = \mathbf{u} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \Leftarrow \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

<sup>1</sup>  $(\mathcal{B}\mathbf{x})^T G (\mathcal{B}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T G \mathbf{x}$

<sup>2</sup>  $A = \exp\left(\sum_{n=1}^3 z_n \sigma_n\right) = \cosh z + \left(\sum_{n=1}^3 \frac{z_n}{z} \sigma_n\right) \sinh z$  with  $z^2 = \sum_{n=1}^3 z_n^2$  ( $z_n$ : 複素数) は満たされる。

なので、(1.8)を用いて

$$\begin{pmatrix} \hat{a}' \\ \hat{a}'^\dagger \end{pmatrix} = \mathbf{u} \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u} \mathcal{B} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u} \mathcal{B} \mathbf{u}^{-1} \mathbf{u} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u} \mathcal{B} \mathbf{u}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

を得る。つまり、

$$\boxed{\begin{pmatrix} \hat{a}' \\ \hat{a}'^\dagger \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} \Leftarrow K = \mathbf{u} \mathcal{B} \mathbf{u}^{-1} \text{ with } \det K = \det \mathcal{B} = 1} \quad (1.16)$$

である。従って、 $Ue^A U^{-1} = e^{U A U^{-1}}$  に注意して

$$K = \mathbf{u} \mathcal{B} \mathbf{u}^{-1} = \exp[-\mathbf{u}(\alpha_1 L + \alpha_2 M + \alpha_3 N) \mathbf{u}^{-1}] \quad (1.17)$$

を得る。

## ポゴリューボフ変換と $SO(2,1)$ 群

形式的に、

$$K = \exp[-i(\theta_1 J_1 + \theta_2 J_2 + \theta_3 J_3)] \quad (1.18)$$

と定義すると、(1.17)より

$$\begin{aligned} \ln K &= -\mathbf{u}(\alpha_1 L + \alpha_2 M + \alpha_3 N) \mathbf{u}^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & -\alpha_3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 - i\alpha_2 & \alpha_3 + i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_3 - i\alpha_2 + i(\alpha_1 + i\alpha_3) & \alpha_3 + i\alpha_2 + i(\alpha_1 - i\alpha_3) \\ \alpha_3 - i\alpha_2 - i(\alpha_1 + i\alpha_3) & \alpha_3 + i\alpha_2 - i(\alpha_1 - i\alpha_3) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i(\alpha_1 - \alpha_2) & 2\alpha_3 + i(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 2\alpha_3 - i(\alpha_1 + \alpha_2) & -i(\alpha_1 - \alpha_2) \end{pmatrix} = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} i\sigma_3 - \alpha_3 \sigma_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \sigma_2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

であるので、

$$\begin{cases} J_1 = -i\kappa_1 \frac{\sigma_1}{2}, \theta_1 = 2\kappa_1 \alpha_3 \\ J_2 = i\kappa_2 \frac{\sigma_2}{2}, \theta_2 = \kappa_2 (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (\kappa_{1,2,3} = \pm 1) \\ J_3 = \kappa_3 \frac{\sigma_3}{2}, \theta_3 = \kappa_3 (\alpha_1 - \alpha_2) \end{cases} \quad (1.20)$$

と定義すると、 $J_{1,2,3}$  を用いて

$$\begin{cases} [J_3, J_1] = \left[ \kappa_3 \frac{\sigma_3}{2}, -i\kappa_1 \frac{\sigma_1}{2} \right] = -i \left( i \frac{\sigma_2}{2} \right) \kappa_1 \kappa_3 = -i \left( i\kappa_2 \frac{\sigma_2}{2} \right) \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = -\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 i J_2 \\ [J_1, J_2] = \left[ -i\kappa_1 \frac{\sigma_1}{2}, i\kappa_2 \frac{\sigma_2}{2} \right] = \left( i \frac{\sigma_3}{2} \right) \kappa_1 \kappa_2 = i \left( \kappa_3 \frac{\sigma_3}{2} \right) \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 i J_3 \\ [J_2, J_3] = \left[ i\kappa_2 \frac{\sigma_2}{2}, \kappa_3 \frac{\sigma_3}{2} \right] = i \left( i \frac{\sigma_1}{2} \right) \kappa_2 \kappa_3 = -i \left( -i\kappa_1 \frac{\sigma_1}{2} \right) \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = -\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 i J_1 \end{cases} \quad (1.21)$$

を満たす事が分かる。ここで、改めて(1.19)を

$$\boxed{\alpha = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}, \theta = \alpha_3, \varepsilon = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}} \quad (1.22)$$

とすると

$$\ln K = -\mathbf{u}(\alpha_1 L + \alpha_2 M + \alpha_3 N)\mathbf{u}^{-1} = \begin{pmatrix} -i\alpha & -(\theta + i\varepsilon) \\ -(\theta - i\varepsilon) & i\alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} -i\alpha\sigma_3 - \theta\sigma_1 + \varepsilon\sigma_2 \\ -i\alpha N - (\theta + i\varepsilon)M - (\theta - i\varepsilon)L \end{cases} \quad (1.23)$$

である。従って

$$\boxed{\begin{aligned} K &= \exp[-i(\theta_1 J_1 + \theta_2 J_2 + \theta_3 J_3)] \\ [J_1, J_2] &= i\kappa J_3, [J_3, J_1] = -i\kappa J_2, [J_2, J_3] = -i\kappa J_1 \quad (\kappa = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} J_1 = -i\kappa_1 \frac{\sigma_1}{2}, \theta_1 = 2\kappa_1 \theta \\ J_2 = i\kappa_2 \frac{\sigma_2}{2}, \theta_2 = 2\kappa_2 \varepsilon \quad (\kappa_{1,2,3} = \pm 1) \\ J_3 = \kappa_3 \frac{\sigma_3}{2}, \theta_3 = 2\kappa_3 \alpha \end{cases} \end{aligned}} \quad (1.24)$$

と表わせる。以上から、(1.24)の $J_{1,2,3}$ は、 $SO(2,1)$ の生成子を記述する事が分かる。すなわち、

- $(J_1, J_2, J_3)$ は  $SO(2,1)$ の生成子(generator) :  $SO(2,1) \cong Sp(2, \mathbf{R})$

になる。

ここで、具体的な $K$ を求めておくと

$$\ln K = -\mathbf{u}(\alpha_1 L + \alpha_2 M + \alpha_3 N)\mathbf{u}^{-1} = \begin{pmatrix} -i\alpha & -(\theta + i\varepsilon) \\ -(\theta - i\varepsilon) & i\alpha \end{pmatrix} = -i\alpha\sigma_3 - \theta\sigma_1 + \varepsilon\sigma_2 \quad (1.25)$$

$$K = \cosh z + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -i\alpha & -(\theta + i\varepsilon) \\ -(\theta - i\varepsilon) & i\alpha \end{pmatrix} \sinh z = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \text{ with } z^2 = \theta^2 + \varepsilon^2 - \alpha^2$$

場合分け :  $\boxed{z^2 \geq 0, z^2 < 0}$  に注意して、 $z^2 \geq 0$ の時、 $A$ は

$$\begin{aligned} A &= \cosh z - i \frac{\alpha}{z} \sinh z = \frac{\sqrt{z^2 + \alpha^2}}{z} \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cosh z - i \frac{\alpha}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \sinh z \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos w = \alpha / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2} \quad (z^2 + \alpha^2 = \theta^2 + \varepsilon^2) \\ \sin w = z / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2} \end{cases} \\ &= \frac{1}{\sin w} (\sin w \cosh z - i \cos w \sinh z) = -i \frac{1}{\sin w} \left( \cos w \frac{e^z - e^{-z}}{2} + i \sin w \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{i \sin w} \left( \frac{e^z e^{iw} - e^{-z} e^{-iw}}{2} \right) = \frac{\sinh(z + iw)}{i \sin w} \end{aligned} \quad (1.26)$$

であり、 $z^2 < 0$  の時、 $z = iz'$ ,  $w = iw'$  として、 $\sin(iz) = i \sinh z$ ,  $\sinh(iz) = i \sin z$  に注意して

$$\begin{cases} \cos(iw') = \cosh w' = \alpha / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2} \\ \sin(iw') = i \sinh w' = z / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2} \end{cases} \quad (-z'^2 + \alpha^2 = \theta^2 + \varepsilon^2) \quad (1.27)$$

を導入すれば、

$$A = \frac{\sinh(z + iw)}{i \sin w} = \frac{\sinh(w' - iz')}{\sinh w'} \quad (1.28)$$

を得る。B として

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\theta + i\varepsilon}{z} \sinh z = -\frac{\sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2}}{z} \left( \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2}} + i \frac{\varepsilon}{\sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2}} \right) \sinh z \Leftarrow \begin{cases} \cos \eta = \theta / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2} \\ \sin \eta = \varepsilon / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2} \end{cases} \\ &= -\frac{1}{\sin w} (\cos \eta + i \sin \eta) \sinh z = -\frac{1}{\sin w} e^{i\eta} \sinh z \quad (z^2 \geq 0) \end{aligned} \quad (1.29)$$

及び

$$B = -\frac{1}{\sin w} e^{i\eta} \sinh z = -\frac{1}{\sinh w'} e^{i\eta} \sin z' \quad (z^2 < 0) \quad (1.30)$$

を得る。従って、

$$\boxed{K = \begin{cases} \frac{1}{\sin w} \begin{pmatrix} -i \sinh(z + iw) & -e^{i\eta} \sinh z \\ -e^{-i\eta} \sinh z & i \sinh(z - iw) \end{pmatrix} \dots z^2 \geq 0 \Leftarrow \begin{cases} \cos w = \alpha / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2} \\ \sin w = z / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2} \end{cases} \\ \frac{1}{\sinh w'} \begin{pmatrix} \sinh(w' - iz') & -e^{i\eta} \sin z' \\ -e^{-i\eta} \sin z' & \sinh(w' + iz') \end{pmatrix} \dots z'^2 > 0 \Leftarrow \begin{cases} \cosh w' = \alpha / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2} \\ \sinh w' = z' / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2} \end{cases} \begin{pmatrix} z = iz' \\ w = iw' \end{pmatrix} \\ \Leftarrow \cos \eta = \theta / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2}, \sin \eta = \varepsilon / \sqrt{\theta^2 + \varepsilon^2}, z^2 + \alpha^2 = \alpha^2 - z'^2 = \theta^2 + \varepsilon^2 \end{cases}} \quad (1.31)$$

を得る。ちなみに、

$$\det K = |A|^2 - |B|^2 = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 w} (\cosh^2 z \cdot \sin^2 w + \sinh^2 z \cos^2 w - \sinh^2 z) \\ \frac{1}{\sinh^2 w'} (\cos^2 z' \cdot \sinh^2 w' + \sin^2 z' \cosh^2 w' - \sin^2 z') \end{cases} = 1 \quad (1.32)$$

は、満たされている。

## フェルミ粒子の $U(1)$ 変換

$\{\gamma'_\mu, \gamma'_\nu\} = \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}$  (ボーズ粒子) を満たす変換を求める。ここで、

$$\begin{aligned} \{\gamma'_1, \gamma'_1\} &= \{A\gamma_1 + B\gamma_2, A\gamma_1 + B\gamma_2\} = A^2 \{\gamma_1, \gamma_1\} + B^2 \{\gamma_2, \gamma_2\} + 2AB \{\gamma_1, \gamma_2\} = A^2 + B^2 = 1 \\ \{\gamma'_{21}, \gamma'_2\} &= \{C\gamma_1 + D\gamma_2, C\gamma_1 + D\gamma_2\} = C^2 + D^2 = 1 \\ \{\gamma'_1, \gamma'_2\} &= \{A\gamma_1 + B\gamma_2, C\gamma_1 + D\gamma_2\} = AC \{\gamma_1, \gamma_1\} + BD \{\gamma_2, \gamma_2\} + (AD + BC) \{\gamma_1, \gamma_2\} \\ &= AC + BD = 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

なので、 $A = D = \cos \alpha$ ,  $B = -C = \sin \alpha$  が解である。即ち

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

を得る。これから

$$\begin{aligned} K &= \mathbf{u} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mathbf{u}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & e^{i\alpha} \\ -ie^{-i\alpha} & ie^{i\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} = \exp(-i\alpha\sigma_3) \end{aligned} \quad (1.35)$$

が導かれる。従って、

● **変換  $K$  は  $U(1)$  群**

を与える。つまり、(1.16)より

$$\hat{a}' = e^{-i\alpha} \hat{a}, \quad \hat{a}'^\dagger = e^{i\alpha} \hat{a}^\dagger \quad (1.36)$$

と変換する。(1.23)を考慮すると

$$\ln K = -i\alpha\sigma_3 - \theta\sigma_1 + \varepsilon\sigma_2 \Leftarrow \theta = \varepsilon = 0 \text{ for the fermion case} \quad (1.37)$$

とまとめられる。

## 生成・消滅演算子のユニタリー変換

[ $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ ]=1 や  $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}=1$  に依らない結果

ユニタリー変換  $U: U^\dagger = U^{-1}$  を用いて、 $\hat{a}$  と  $\hat{a}^\dagger$  の変換は  $U^\dagger \hat{a} U$  と  $U^\dagger \hat{a}^\dagger U$  で与えられ、その表現を  $K$  とする

$$\begin{pmatrix} \hat{a}' \\ \hat{a}'^\dagger \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} U = K \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

を満たす。このとき、任意と  $\hat{a}$  と  $\hat{a}^\dagger$  の多項式  $F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$  と  $G(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$  の関係:  $F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = G(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$  は

$$F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = G(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \Rightarrow U^\dagger F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) U = U^\dagger G(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) U \Rightarrow F(\hat{a}', \hat{a}'^\dagger) = G(\hat{a}', \hat{a}'^\dagger) \quad (1.39)$$

の如く保存される。従って、 $[F] = 1 (= G)$  や  $\{F\} = 1 (= G)$  に限らない不変性に

拡張できる。(1.24)より、**ボーズ粒子**に対して

$$K \simeq I + \begin{pmatrix} -i\alpha & -(\theta + i\varepsilon) \\ -(\theta - i\varepsilon) & i\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a}' = U^\dagger \hat{a} U \simeq (1 - i\alpha) \hat{a} - (\theta + i\varepsilon) \hat{a}^\dagger \\ \hat{a}'^\dagger = U^\dagger \hat{a}^\dagger U \simeq (1 + i\alpha) \hat{a} - (\theta - i\varepsilon) \hat{a}'^\dagger \end{cases} \quad (1.40)$$

と定義し、(1.36)より**フェルミ粒子**に対して

$$\begin{cases} \hat{a}' = e^{-i\alpha} \hat{a} \simeq (1 - i\alpha) \hat{a} = U^\dagger \hat{a} U \\ \hat{a}'^\dagger = e^{i\alpha} \hat{a}^\dagger \simeq (1 + i\alpha) \hat{a}^\dagger = U^\dagger \hat{a}^\dagger U \end{cases} \Leftarrow \theta = \varepsilon = 0 \text{ in (1.40)} \quad (1.41)$$

と定義する。その時、

- ボーズ粒子： $U$  の表現  $K$  が  $SO(2,1)$  なので  $U$  は 3 つの演算子で記述される
- フェルミ粒子： $U$  の表現  $K$  が  $U(1)$  なので、 $U$  は 1 つの演算子で記述される

ことになる。  $K = I - i\alpha N - (\theta + i\varepsilon)M - (\theta - i\varepsilon)L$  より、3 つの演算子を  $L, M, N$  として

$$U = I - i(x\alpha N + y(\varepsilon + i\theta)M + z(\varepsilon - i\theta)L): x, y, z = \text{parameters} \quad (1.42)$$

と記述できる。  $N$  のみの場合、 $U(1)$  を記述する。  $U^\dagger U = I$  より

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \left[ I + i(x\alpha N^\dagger + y(\varepsilon - i\theta)M^\dagger + z(\varepsilon + i\theta)L^\dagger) \right] \left[ I - i(x\alpha N + y(\varepsilon + i\theta)M + z(\varepsilon - i\theta)L) \right] \\ &\simeq I + i(x\alpha N^\dagger + y(\varepsilon - i\theta)M^\dagger + z(\varepsilon + i\theta)L^\dagger) - i(x\alpha N + y(\varepsilon + i\theta)M + z(\varepsilon - i\theta)L) = I \\ \Rightarrow \boxed{N = N^\dagger, L = M^\dagger, y = z} \end{aligned} \quad (1.43)$$

の条件を得る。

さて、(1.40)は

$$\begin{aligned} U^\dagger \hat{a} U &\simeq (1 - i\alpha) \hat{a} - (\theta + i\varepsilon) \hat{a}^\dagger = \\ &= \left[ I + i(x\alpha N^\dagger + y(\varepsilon - i\theta)M^\dagger + z(\varepsilon + i\theta)L^\dagger) \right] \hat{a} \left[ I - i(x\alpha N + y(\varepsilon + i\theta)M + z(\varepsilon - i\theta)L) \right] \\ &= \left[ I + i(x\alpha N - iy(\theta + i\varepsilon)L + iz(\theta - i\varepsilon)M) \right] \hat{a} \left[ I - i(x\alpha N + iy(\theta - i\varepsilon)M - iz(\theta + i\varepsilon)L) \right] \quad (1.44) \\ &\simeq \hat{a} + i(x\alpha N - iy(\theta + i\varepsilon)L + iz(\theta - i\varepsilon)M) \hat{a} - i\hat{a} (x\alpha N + iy(\theta - i\varepsilon)M - iz(\theta + i\varepsilon)L) \\ &= \hat{a} + i\alpha x [N, \hat{a}] + y(\theta + i\varepsilon) [L, \hat{a}] + z(\theta - i\varepsilon) [M, \hat{a}] \end{aligned}$$

なので、 $N, L, M$  への条件式：

$$[N, \hat{a}] = -\hat{a}/x, [L, \hat{a}] = -\hat{a}^\dagger/y, [M, \hat{a}] = 0 \quad (1.45)$$

を得る。ここで、

- $x=1$  のとき  $N = \hat{N}$  と見做す事

ができる。また、 $[\hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -2\hat{a}$  を考慮して、

- $y(=z)=1/2$  のとき  $L = \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger$  と見做す事

ができる。以上から、

- ボーズ粒子に対して

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}' &= U^\dagger \hat{a} U \\ U &= I - i \left( \alpha N + \frac{1}{2}(\varepsilon + i\theta)M + \frac{1}{2}(\varepsilon - i\theta)L \right) \quad (N^\dagger = N, L^\dagger = M) \\ [N, \hat{a}] &= -\hat{a}, [L, \hat{a}] = -2\hat{a}^\dagger, [M, \hat{a}] = 0 \end{aligned}} \quad (1.46)$$

- フェルミ粒子に対して

$$\boxed{\hat{a}' = U^\dagger \hat{a} U, U = I - i\alpha N \quad (N^\dagger = N), [N, \hat{a}] = -\hat{a}} \quad (1.47)$$

である。

ボーズ粒子の場合、ヤコビ恒等式(Jacobi identity):

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (1.48)$$

を用いると、3つの演算子間の交換関係として

$$\begin{aligned} [L, [N, \hat{a}]] + [N, [\hat{a}, L]] + [\hat{a}, [L, N]] &= 0 \\ \Rightarrow [[L, N], \hat{a}] &= [L, -\hat{a}] + [N, 2\hat{a}^\dagger] = -(-2\hat{a}^\dagger) + 2\hat{a}^\dagger = 4\hat{a}^\dagger = -2[L, \hat{a}] \\ \Rightarrow [L, N] &= -2L \Rightarrow [N^\dagger, L^\dagger] = -2L^\dagger \Rightarrow [N, M] = -2M \\ [M, [N, \hat{a}]] + [N, [\hat{a}, M]] + [\hat{a}, [M, N]] &= 0 \\ \Rightarrow [[M, N], \hat{a}] &= [M, [N, \hat{a}]] = [M, -\hat{a}] = 0 \\ \Rightarrow [N, M] &= -2M \text{ is a solution} \\ [M, [L, \hat{a}]] + [L, [\hat{a}, M]] + [\hat{a}, [M, L]] &= 0 \\ \Rightarrow [[M, L], \hat{a}] &= [M, [L, \hat{a}]] = [M, -2\hat{a}^\dagger] = [L^\dagger, -2\hat{a}^\dagger] = 2([L, \hat{a}])^\dagger \\ &= 2(-2\hat{a}^\dagger)^\dagger = -4\hat{a} = 4[N, \hat{a}] \\ \Rightarrow [M, L] &= 4N \end{aligned} \quad (1.49)$$

がわかる。従って、

$$\boxed{[L, N] = -2L, [M, N] = 2M, [L, M] = -4N} \quad (1.50)$$

を得る。ここで、 $Sp(2, \mathbf{R})$ の演算子  $J_{\mu\nu}$  ( $= J_{\nu\mu}$ ) ( $\mu, \nu = 1, 2$ ) は、【付録 A パラボーズ粒子の生成消滅】擬似クリフォード代数と  $Sp(2, \mathbf{R})$  (1.80)の交換関係

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} \text{ with } J_{\mu\nu} = J_{\nu\mu} \quad (\mu, \nu, \rho, \sigma = 1, 2) \\ g_{\mu\nu} &= \begin{cases} 1 \cdots (\mu, \nu) = (\text{odd}, \text{even}), & -1 \cdots (\mu, \nu) = (\text{even}, \text{odd}) \\ 0 \cdots (\mu, \nu) = (\text{even}, \text{even}), (\text{odd}, \text{odd}) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.51)$$

より

$$[J_{12}, J_{11}] = -2J_{11}, [J_{12}, J_{22}] = 2J_{22}, [J_{11}, J_{22}] = 4J_{12} \quad (1.52)$$

を見たす。これより、(1.50)と比較して

$$\boxed{L = J_{22}, M = J_{11}, N = J_{12}} \quad (1.53)$$

である。更に、 $SO(2, 1)$ の演算子： $(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$ が構成できるが、(1.50)と対比するには  $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$

を用いた  $[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm$ ,  $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = -2\hat{J}_3$  と(1.52)の対比より

$$\boxed{\hat{J}_+ = \frac{L}{2}, \hat{J}_- = \frac{M}{2}, \hat{J}_3 = \frac{N}{2}} \quad (1.54)$$



を得る。生成・消滅演算子では、交換関係(1.46)を用いて

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\}, M = \frac{1}{2}\{\hat{a}, \hat{a}\}, \hat{N} = \frac{1}{2}\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\}} \quad (1.55)$$

が(1.50)を満たす事が分かる。