

付録B パラフェルミ粒子の生成消滅

生成・消滅演算子

粒子の生成消滅を表すために、粒子の個数を表す状態を考える。このとき、粒子の個数は物理量であるので、エルミート(Hermite)演算子で表せる。それを \hat{N} とする。¹ また、粒子を1つ消す演算子を \hat{a} 、1つ作る演算子を \hat{b} とする。 \hat{a}, \hat{b} の役割を式で表すと、

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\text{個の粒子}\rangle &\propto |n-1\text{個の粒子}\rangle \\ \hat{b}|n\text{個の粒子}\rangle &\propto |n+1\text{個の粒子}\rangle\end{aligned}\tag{1.1}$$

になる。ここで、定義により、

$$n = 0, 1, 2, \dots\tag{1.2}$$

である。これより、

- $|n\text{個の粒子}\rangle$ を単に $|n\rangle$

とすれば、

$$\hat{a}|n+1\rangle \propto |n\rangle \Rightarrow \hat{b}\hat{a}|n+1\rangle \propto \hat{b}|n\rangle \propto |n+1\rangle\tag{1.3}$$

$$\hat{b}|n+1\rangle \propto |n+2\rangle \Rightarrow \hat{a}\hat{b}|n+1\rangle \propto \hat{a}|n+2\rangle \propto |n+1\rangle\tag{1.4}$$

なので、

$$\hat{b}\hat{a}|n+1\rangle \propto |n+1\rangle, \hat{a}\hat{b}|n+1\rangle \propto |n+1\rangle\tag{1.5}$$

とわかる。これを

- **反対称化**

して、

$$\frac{1}{2}(\hat{b}\hat{a} - \hat{a}\hat{b})|n+1\rangle \propto |n+1\rangle\tag{1.6}$$

比例係数を k とすると、

$$\frac{1}{2}(\hat{b}\hat{a} - \hat{a}\hat{b})|n+1\rangle = k|n+1\rangle \stackrel{\text{同じこと}}{\Rightarrow} \frac{1}{2}(\hat{b}\hat{a} - \hat{a}\hat{b})|n\rangle = k|n\rangle\tag{1.7}$$

と書き直せる。 $\hat{b}\hat{a} - \hat{a}\hat{b}$ を物理量とするには、

- $\hat{b}\hat{a} - \hat{a}\hat{b}$ はエルミート(Hermite)演算子

になる必要があり、その結果、 $\hat{b}\hat{a} - \hat{a}\hat{b}$ の固有値が実数になる。従って、

- k は実数

になる。 $\hat{b}\hat{a} - \hat{a}\hat{b}$ はエルミート演算子であるので

$$(\hat{b}\hat{a} - \hat{a}\hat{b})^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger = \hat{b}\hat{a} - \hat{a}\hat{b}\tag{1.8}$$

より、

¹以降、演算子には、 \hat{N} のように $\hat{}$ をつけて表す。

$$\hat{b} = \hat{a}^\dagger \quad (1.9)$$

が解であることがわかる。これを用いると、 \hat{a}, \hat{a}^\dagger の関係式にも比例係数を導入して

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= x_{n-1}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= y_{n+1}|n+1\rangle = x_n^*|n+1\rangle \\ \hat{N}|n\rangle &= N_n|n\rangle \text{ with } \hat{N} = \frac{1}{2}[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \quad (N_n: \text{実数}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (x_{n-1}, y_{n+1}, N_n: n\text{ごとに違う値}) \\ (\text{かもしれないので } n\text{に依存}) \end{array} \quad (1.10)$$

$$(*) \langle m|\hat{a}|n\rangle = \begin{cases} x_{n-1} \langle m|n-1\rangle \\ y_{m+1}^* \langle m+1|n\rangle \end{cases} \Rightarrow \langle n-1|\hat{a}|n\rangle = \begin{cases} x_{n-1} \\ y_n^* \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_n^* = x_{n-1}}$$

とまとめることができる。

粒子数

$\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle$ から、 $|n-1\rangle$ の定義により $\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (N_n - 1)\hat{a}|n\rangle$ が要請される。 $\hat{a}\hat{N}|n\rangle = N_n\hat{a}|n\rangle$ を考慮して

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad \& \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad (1.11)$$

が成立する。更に \hat{N} の定義より $\hat{N}\hat{a}|n\rangle = N_{n-1}\hat{a}|n\rangle$ なので

$$N_n - 1 = N_{n-1} \Rightarrow N_n - N_{n-1} = 1 \quad (1.12)$$

がわかる。 $N_n - N_{n-1} = 1$ を $n=1$ から出発すれば

$$\begin{aligned} \cancel{N_1} - N_0 &= 1 \\ \cancel{N_2} - \cancel{N_1} &= 1 \\ &\vdots \\ N_n - \cancel{N_{n-1}} &= 1 \end{aligned} \Rightarrow N_n = N_0 + n \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1.13)$$

になるので、

$$N_n = N_0 + n \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1.14)$$

を得る。 $|0\rangle$ に対して、

$$\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle \Rightarrow \hat{a}|0\rangle = x_{-1}|-1\rangle \quad (1.15)$$

に注意すると、「 $x_{-1} \neq 0$ のとき、 $\hat{a}|0\rangle$ は存在しない状態 $|-1\rangle$ になる」ので、

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (x_{-1} = 0) \quad (1.16)$$

が要請される。 $n=0$ の $|0\rangle$ に適用すると、(1.14)を用いて

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle &= N_0 = \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle = -\frac{1}{2} \langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle \\ \Rightarrow \boxed{\langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle = -2N_0} \oplus \langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle &= \|\hat{a}^\dagger | 0 \rangle\|^2 \geq 0 \quad (\text{等号は } \hat{a} = \hat{a}^\dagger = 0) \Rightarrow \boxed{N_0 \leq 0} \end{aligned} \quad (1.17)$$

が得られる。以上から、まとめると

$$\begin{aligned} \boxed{\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{a}] &= -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \\ \hat{N} | n \rangle &= N_n | n \rangle \quad \text{with } N_n = N_0 + n \geq 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ \hat{a} | 0 \rangle &= 0, \quad \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle = -2N_0 \geq 0 \end{aligned}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

である。次に、 \hat{N} を評価するために $\hat{a} \hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ の行列要素を計算する。

$\hat{a} \hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ の行列要素

$\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle$ と $\langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \begin{cases} \hat{a}^\dagger | n \rangle = x_n^* | n+1 \rangle \\ \hat{a} | n \rangle = x_{n-1} | n-1 \rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle = \hat{a} x_n^* | n+1 \rangle = x_n^* x_n | n \rangle \Rightarrow \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = |x_n|^2 | n \rangle \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = \hat{a}^\dagger x_{n-1} | n-1 \rangle = x_{n-1} x_{n-1}^* | n \rangle \Rightarrow \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = |x_{n-1}|^2 | n \rangle \end{cases} \\ \Rightarrow \boxed{\langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle = |x_n|^2, \quad \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = |x_{n-1}|^2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

を利用すると、

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{N} | n \rangle &= \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle = N_0 + n \Rightarrow \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle - \langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle = 2(N_0 + n) \\ \Rightarrow \boxed{|x_{n-1}|^2 - |x_n|^2 = 2(N_0 + n) \quad \text{with } \langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle = |x_0|^2 = -2N_0} \end{aligned} \quad (1.20)$$

より

$$\begin{aligned} n=1: |x_0|^2 - |x_1|^2 &= 2(N_0 + 1) \Rightarrow |x_1|^2 = |x_0|^2 - 2(N_0 + 1) = -2N_0 - 2(N_0 + 1) = -2(2N_0 + 1) \\ n=2: |x_1|^2 - |x_2|^2 &= 2(N_0 + 2) \Rightarrow |x_2|^2 = |x_1|^2 - 2(N_0 + 2) = -4N_0 - 2 - 2(N_0 + 2) = -3(2N_0 + 2) \\ n=3: |x_2|^2 - |x_3|^2 &= 2(N_0 + 3) \Rightarrow |x_3|^2 = |x_2|^2 - 2(N_0 + 3) = -6N_0 - 6 - 2(N_0 + 3) = -4(2N_0 + 3) \end{aligned} \quad (1.21)$$

なので、

$$\begin{aligned} |x_n|^2 &= -(n+1)(2N_0 + n) \Rightarrow |x_{n+1}|^2 = -(n+2)(2N_0 + n+1) \Rightarrow |x_n|^2 - |x_{n+1}|^2 = 2(N_0 + n+1) \\ \Rightarrow |x_{n+1}|^2 &= |x_n|^2 - 2(N_0 + n+1) = -(n+1)(2N_0 + n) - 2(N_0 + n+1) \\ &= -(n+1)2N_0 - (n+1)n - 2N_0 - 2(n+1) \\ &= -(n+2)2N_0 - (n+1)(n+2) = -(n+2)(2N_0 + n+1) \Rightarrow \text{OK} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$|x_n|^2 = -(n+1)(2N_0 + n) = (n+1)(-2N_0 - n) \quad (N_0 \leq 0)$$

を得る。そして

$$\boxed{-N_0 \geq \frac{n}{2} \quad (= 0, 1, 2, \dots)} \quad (1.23)$$

が条件になる。以上から

$$\boxed{\begin{aligned} \langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle &= |x_n|^2 = (n+1)(-2N_0 - n), \quad \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = |x_{n-1}|^2 = n(-2N_0 + 1 - n) \\ \hat{a} | n \rangle &= x_{n-1} | n-1 \rangle, \quad \hat{a}^\dagger | n \rangle = x_n^* | n+1 \rangle \end{aligned}} \quad (1.24)$$

になる。

\$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}\$ の行列要素

\$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}\$ と(1.24)より

$$\begin{aligned} \langle n | \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} | n \rangle &= (n+1)(-2N_0 - n) + n(-2N_0 + 1 - n) = (n+1+n)(-2N_0 - n) - n \\ &= (2n+1)(-2N_0 - n) + n = (2n+1)(-2N_0) - n(2n+1) + n = 2[(2n+1)(-N_0) - n^2] \quad (1.25) \\ &= 2 \left[\overbrace{-N_0}^{\geq 0} + 2n \overbrace{\left(-N_0 - \frac{n}{2}\right)}^{\geq 0} \right] > 0 \end{aligned}$$

を得るので \$\langle n | \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} | n \rangle > 0\$ と無矛盾である。。

$$\boxed{\langle n | \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} | n \rangle = 2[(2n+1)(-N_0) - n^2]} \quad (1.26)$$

を得る。行列要素が \$|n\rangle\$ に依存しない場合として、

$$\begin{cases} n=0: \langle 0 | \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} | 0 \rangle = 2(-N_0) \\ n=1: \langle 1 | \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} | 1 \rangle = 2[3(-N_0) - 1] \end{cases} = 1 \Leftarrow -N_0 = \frac{1}{2} \quad (1.27)$$

であるので

$$\boxed{-N_0 = \frac{1}{2}} \quad (1.28)$$

の時、状態 \$|0\rangle\$ と \$|1\rangle\$ に限れば

$$\boxed{\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1} \quad (1.29)$$

が導ける。更に、(1.23)より

$$-N_0 \left(= \frac{1}{2} \right) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow n = 0, 1 \quad (1.30)$$

から得られる条件が \$n=0,1\$ になり、(1.27)で必要とする状態 \$|0\rangle\$ と \$|1\rangle\$ と一致する。

生成・消滅演算子と回転群 \$SO(3)\$

この議論を一般化するには、角運動量演算子 \$(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)\$ との類似性を用いる。生成・消滅演算子は

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}^\dagger |n\rangle = x_n^* |n+1\rangle, \hat{a} |n\rangle = x_{n-1} |n-1\rangle \\ N |n\rangle = N_n |n\rangle \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{l} [N, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, [N, \hat{a}] = -\hat{a} \\ [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = 2\hat{N} \end{array} \right. \quad (1.31)$$

を満たす。そこで昇降演算子： $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$ とすると、 $SO(3)$ 群に付随する演算子の場合には

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{J}_+ |J, J_3\rangle \propto |J, J_3+1\rangle, \hat{J}_- |J, J_3\rangle \propto |J, J_3-1\rangle \\ \hat{J}_3 |J, J_3\rangle = J_3 |J, J_3\rangle \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{l} [\hat{J}_3, \hat{J}_+] = \hat{J}_+, [\hat{J}_3, \hat{J}_-] = -\hat{J}_- \\ [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3 \end{array} \right. \quad (1.32)$$

を満たす。(1.31)と(1.32)を比較して

$$\boxed{\hat{J}_+ = \hat{a}^\dagger, \hat{J}_- = \hat{a}, \hat{J}_3 = N} \quad (1.33)$$

と一致する事が分かる。² 或は

$$\boxed{\hat{J}_1 = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} = \frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{2}, \hat{J}_2 = \frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2} = \frac{\hat{a}^\dagger - \hat{a}}{2i}, \hat{J}_3 = \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger}{2}} \quad (1.34)$$

を得る。この固有ベクトルは、

$$|l, j_3\rangle \quad (j_3 = N_0 + n) \quad (1.35)$$

で表わされ

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{J}^2 |l, j_3\rangle = l(l+1) |l, j_3\rangle \\ \hat{J}_3 |l, j_3\rangle = j_3 |l, j_3\rangle \end{array} \right. \quad (1.36)$$

が固有値になる。更に、 $\hat{J}_- = \hat{a}$ より $\hat{a}|0\rangle = 0$ なので

$$\hat{J}_- |l, j_3\rangle = 0 \quad \text{with } n=0 \text{ \& } j_3 = N_0 \quad (1.37)$$

が条件になる。そこで、 $\hat{J}_- |l, j_3\rangle = 0$ よりノルム $\|\hat{J}_- |l, j_3\rangle\|^2$ を考えると、

$$\begin{aligned} 0 &= \|\hat{J}_- |l, j_3\rangle\|^2 = (\hat{J}_- |l, j_3\rangle)^\dagger \hat{J}_- |l, j_3\rangle = \langle l, j_3 | \hat{J}_+ \hat{J}_- |l, j_3\rangle \\ &= \langle l, j_3 | (\hat{J}^2 - \hat{J}_3(\hat{J}_3 - 1)) |l, j_3\rangle = \langle l, j_3 | \hat{J}^2 |l, j_3\rangle - \langle l, j_3 | \hat{J}_3(\hat{J}_3 - 1) |l, j_3\rangle \\ &= [\ell(\ell+1) - j_3(j_3 - 1)] \|\ell, j_3\rangle\|^2 = [\ell(\ell+1) - j_3(j_3 - 1)] \|\ell, j_3\rangle\|^2 \end{aligned} \quad (1.38)$$

と計算されるので、より

$$\ell(\ell+1) = j_3(j_3 - 1) \quad \text{for } \ell = -j_3 (= -N_0 \text{ for } n=0) \quad (1.39)$$

がわかる。以上から

² ボーズ粒子の場合 $\hat{J}_+ = \frac{1}{2}\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\}$, $\hat{J}_- = \frac{1}{2}\{\hat{a}, \hat{a}\}$, $\hat{J}_3 = \frac{1}{4}\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\}$ であるが、対応する関係式： $\hat{J}_+ = \frac{1}{2}[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger](=0)$, $\hat{J}_- = \frac{1}{2}[\hat{a}, \hat{a}](=0)$, $\hat{J}_3 = \frac{1}{4}[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]$ は使用できない。

$$\boxed{
\begin{aligned}
& \left[\begin{aligned} [\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] &= \pm \hat{J}_\pm, & [\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= 2\hat{J}_3 \\ [\hat{J}_1, \hat{J}_2] &= -i\hat{J}_3, & [\hat{J}_2, \hat{J}_3] &= i\hat{J}_1, & [\hat{J}_3, \hat{J}_1] &= i\hat{J}_2 \end{aligned} \right. \Leftarrow \hat{J}_+ = \hat{a}^\dagger, \hat{J}_- = \hat{a}, \hat{J}_3 = \hat{N} \\
& \hat{J}^2 |\ell, j_3\rangle = \ell(\ell+1) |\ell, j_3\rangle \quad \text{with } \ell = -N_0 \\
& \hat{J}_3 |\ell, j_3\rangle = j_3 |\ell, j_3\rangle
\end{aligned}
} \quad (1.40)$$

である。既約表現 $|\ell, j_3\rangle$ は、

$$|\ell, j_3\rangle: j_3 = \begin{cases} -\ell, -\ell+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell-1, \ell & (\ell = \text{integer}) \\ -\ell, -\ell+1, \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \ell-1, \ell & (\ell = \text{half integer}) \end{cases} \quad (1.41)$$

で与えられる。このことから、 $j_3 = N_0 + n$ から n との関連を表わすと

$$\boxed{\ell = \frac{p}{2} \ (p = \text{odd})} \quad N_0 + n = -\frac{p}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{p}{2} \Rightarrow \begin{cases} N_0 = -\frac{p}{2} \ (n=0), \dots, \\ N_0 + \frac{p-1}{2} = -\frac{1}{2} \ (n = \frac{p-1}{2}), \\ N_0 + \frac{p+1}{2} = \frac{1}{2} \ (n = \frac{p+1}{2}), \\ \dots, N_0 + p = \frac{p}{2} \ (n=p) \end{cases} \quad (1.42)$$

$$\boxed{\ell = p} \quad N_0 + n = -p, \dots, -1, 0, 1, \dots, p \Rightarrow \begin{cases} N_0 = -p \ (n=0), \dots, \\ N_0 + p - 1 = -1 \ (n = p-1), \\ N_0 + p = 0 \ (n = p), \\ N_0 + p + 1 = 1 \ (n = p+1), \\ \dots, N_0 + 2p = p \ (n = 2p) \end{cases} \quad (1.43)$$

となる。

拡張されるパウリの排他原理

$$\ell = 1/2$$

$\ell = \frac{1}{2} \left(= \frac{p}{2} \right)$ ($\Rightarrow p=1$) のとき

$$N_0 + n = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} N_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow |0\rangle \ (n=0) \\ N_0 + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow |1\rangle \ (n=1) \end{cases} \quad (1.44)$$

を得るので、(1.30)を与える事が分かる。その時、 $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1$ であった。同様にして

$$\begin{cases} \hat{a}\hat{a}|1\rangle = x_0\hat{a}|0\rangle = 0 \Rightarrow \hat{a}\hat{a} = 0 \\ \hat{a}\hat{a}|0\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\hat{a}, \hat{a}\} = 0 \quad (1.45)$$

がわかるので、

$$\boxed{\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1, \{\hat{a}, \hat{a}\} = 0} \text{ for } \ell = \frac{1}{2} \quad (1.46)$$

を得る。特に、 $\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\} = 0$ ($\{\hat{a}, \hat{a}\} = 0$) は

● 「同一状態は1つまで」のパウリの排他原理

を表わす。

$$\ell = 1$$

$\ell = 1 (= p)$ ($\Rightarrow p = 1$) のとき

$$N_0 + n = -1, 0, 1 \Rightarrow \begin{cases} N_0 = -1 \Rightarrow |0\rangle \quad (n = 0) \\ N_0 + 1 = 0 \Rightarrow |1\rangle \quad (n = 1) \\ N_0 + 2 = 1 \Rightarrow |2\rangle \quad (n = 2) \end{cases} \quad (1.47)$$

である。ここで、

● 状態 $|n\rangle$ に依存しない関係

を調べる。その際、 $\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = x_n^*|n+1\rangle$ を使用するので、 x_n は、

$$\begin{aligned} (\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle) &= |x_n|^2 = (n+1)(-2N_0 - n) = (n+1)(2-n) \\ (\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle) &= |x_{n-1}|^2 = n(-2N_0 + 1 - n) = n(3-n) \end{aligned} \quad (1.48)$$

であるので

$$|x_2|^2 = |x_{-1}|^2 = 0 \quad (1.49)$$

が導かれる。結果として、(1.24) : $\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger|n\rangle = x_n^*|n+1\rangle$ より、 $\hat{J}_-|\ell, -\ell\rangle = \hat{J}_+|\ell, \ell\rangle = 0$

に対応した

$$\hat{a}|0\rangle = \hat{a}^\dagger|2\rangle = 0 \quad (1.50)$$

が成立する。そこで、

1. $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}, \hat{a}\hat{a}$
2. $\{\hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}, \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}\hat{a}\hat{a}$

を評価する。

1. $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}, \hat{a}\hat{a}$

$$\boxed{\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}}$$

$$\boxed{n=0} \{ \hat{a}, \hat{a}^\dagger \} |0\rangle = \hat{a}\hat{a}^\dagger |0\rangle + \hat{a}^\dagger \hat{a} |0\rangle = \hat{a}x_0^* |1\rangle = x_0^* x_0 |0\rangle = \overbrace{(n+1)(2-n)}^{n=0} |0\rangle = 2|0\rangle \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} \boxed{n=1} \{ \hat{a}, \hat{a}^\dagger \} |1\rangle &= \hat{a}\hat{a}^\dagger |1\rangle + \hat{a}^\dagger \hat{a} |1\rangle = \hat{a}x_1^* |2\rangle + \hat{a}^\dagger x_0 |0\rangle = x_1^* x_1 |1\rangle + x_0 x_0^* |1\rangle \\ &= \left(\overbrace{(n+1)(2-n)}^{n=1} + \overbrace{(n+1)(2-n)}^{n=0} \right) |1\rangle = 2|1\rangle + 2|1\rangle = 4|1\rangle \end{aligned} \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} \boxed{n=2} \{ \hat{a}, \hat{a}^\dagger \} |2\rangle &= \hat{a}\hat{a}^\dagger |2\rangle + \hat{a}^\dagger \hat{a} |2\rangle = \hat{a}x_2^* |3\rangle + \hat{a}^\dagger x_1 |1\rangle = x_2^* x_2 |2\rangle + x_1 x_1^* |2\rangle \\ &= \left(\overbrace{(n+1)(2-n)}^{n=2} + \overbrace{(n+1)(2-n)}^{n=1} \right) |2\rangle = 2|2\rangle \end{aligned} \quad (1.53)$$

と評価できるので、

$$\{ \hat{a}, \hat{a}^\dagger \} = \begin{cases} 2 \cdots n=0 \\ 4 \cdots n=1 \\ 2 \cdots n=2 \end{cases} \quad (1.54)$$

がわかる。つまり、状態 $|n\rangle$ に依存する。

$$\boxed{\hat{a}\hat{a}}$$

$$\boxed{n=0} \hat{a}\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (1.55)$$

$$\boxed{n=1} \hat{a}\hat{a} |1\rangle = \hat{a}x_0 |0\rangle = 0 \quad (1.56)$$

$$\boxed{n=2} \hat{a}\hat{a} |2\rangle = \hat{a}x_1 |1\rangle = x_1 x_0 |0\rangle \quad (1.57)$$

がわかる。つまり、状態 $|n\rangle$ に依存する。

2. $\{ \hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger \}, \hat{a}\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}\hat{a}\hat{a}$

$$\boxed{\{ \hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger \}}$$

$$\boxed{n=0} \{ \hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger \} |0\rangle = \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger |0\rangle + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} |0\rangle = \hat{a}\hat{a}x_0^* |1\rangle = x_0^* x_0 \hat{a} |0\rangle = \overbrace{(n+1)(2-n)}^{n=0} \hat{a} |0\rangle = 2\hat{a} |0\rangle$$

$$\begin{aligned} \boxed{n=1} \{ \hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger \} |1\rangle &= \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger |1\rangle + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} |1\rangle = \hat{a}\hat{a}x_1^* |2\rangle + \hat{a}^\dagger \hat{a} x_0 |0\rangle = x_1^* x_1 \hat{a} |1\rangle \\ &= \overbrace{(n+1)(2-n)}^{n=1} \hat{a} |1\rangle = 2\hat{a} |1\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{n=2} \{ \hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger \} |2\rangle &= \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger |2\rangle + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} |2\rangle = x_1 \hat{a}^\dagger \hat{a} |1\rangle = x_1 x_1 \hat{a}^\dagger |0\rangle = x_1 x_1 x_1^* |1\rangle \\ &= |x_1|^2 \hat{a} |2\rangle = \overbrace{(n+1)(2-n)}^{n=1} \hat{a} |2\rangle = 2\hat{a} |2\rangle \end{aligned} \quad (1.58)$$

を得るので、状態 $|n\rangle$ に依存する事無く

$$\{\hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 2\hat{a} \quad (1.59)$$

と評価できる。

$$\boxed{\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}}$$

$$\boxed{n=0} \quad \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0 (= 2\hat{a}|0\rangle)$$

$$\boxed{n=1} \quad \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|1\rangle = \hat{a}\hat{a}^\dagger x_0|0\rangle = x_0 \hat{a} x_0^*|1\rangle = \overbrace{(n+1)(2-n)}^{n=0} \hat{a}|1\rangle = 2\hat{a}|1\rangle \quad (1.60)$$

$$\boxed{n=2} \quad \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|2\rangle = \hat{a}\hat{a}^\dagger x_1|1\rangle = x_1 x_1^* \hat{a}|2\rangle = \overbrace{(n+1)(2-n)}^{n=1} \hat{a}|2\rangle = 2\hat{a}|2\rangle$$

を得るので、状態 $|n\rangle$ に依存する事無く

$$\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} = 2\hat{a} \quad (1.61)$$

と評価できる。

$$\boxed{\hat{a}\hat{a}\hat{a}}$$

$$\boxed{n=0} \quad \hat{a}\hat{a}\hat{a}|0\rangle = 0$$

$$\boxed{n=1} \quad \hat{a}\hat{a}\hat{a}|1\rangle = \hat{a}\hat{a}x_0|0\rangle = 0 \quad (1.62)$$

$$\boxed{n=2} \quad \hat{a}\hat{a}\hat{a}|2\rangle = \hat{a}\hat{a}x_1|1\rangle = x_1 \hat{a} x_0|0\rangle = 0$$

を得るので、状態 $|n\rangle$ に依存する事無く

$$\hat{a}\hat{a}\hat{a} = 0 \quad (1.63)$$

と評価できる。以上から

$$\boxed{\{\hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 2\hat{a}, \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} = 2\hat{a}, \hat{a}\hat{a}\hat{a} = 0} \text{ for } \ell = 1 \quad (1.64)$$

を得る。特に、 $\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger = 0$ ($\hat{a}\hat{a}\hat{a} = 0$)は

- 「同一状態は2つまで」のパウリの排他原理を表わす。

クリフォード代数と生成・消滅演算子

クリフォード代数では、 f 個の反可換な基底 γ_μ ($\mu=1\cdots f$) :

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = g_{\mu\nu} \quad (1.65)$$

を導入する。ここで、 $g_{\mu\nu}$ は計量を表わし

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \cdots \mu = \nu = 1, \dots, n \\ -1 \cdots \mu = \nu = f - n, \dots, f \\ 0 \cdots \mu \neq \nu \end{cases} \quad (1.66)$$

で与える。 γ_μ で作られる演算子を

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (1.67)$$

で表わすと ((1.65)に於て $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ で定義されると $J_{\mu\nu} = \frac{1}{4i} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$)、

● $J_{\mu\nu}$ は $SO(n, f-n)$ の生成子(generator)

になる。

$SO(n, f-n)$: $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = g_{\mu\nu}$ に依らない結果

$SO(n, f-n)$ を記述するには、反交換関係の(1.65)を仮定する必要がなく

$$[J_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = i(g_{\mu\rho}\gamma_\nu - g_{\nu\rho}\gamma_\mu) \quad (1.68)$$

のみ要請すればよい。その結果、

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= \left([J_{\mu\nu}, \frac{1}{2i} \gamma_\rho \gamma_\sigma] - (\rho \leftrightarrow \sigma) \right) = \frac{1}{2i} \left([J_{\mu\nu}, \gamma_\rho] \gamma_\sigma + \gamma_\rho [J_{\mu\nu}, \gamma_\sigma] - (\rho \leftrightarrow \sigma) \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(i(g_{\mu\rho}\gamma_\nu - g_{\nu\rho}\gamma_\mu) \gamma_\sigma + \gamma_\rho i(g_{\mu\sigma}\gamma_\nu - g_{\nu\sigma}\gamma_\mu) - (\rho \leftrightarrow \sigma) \right) \\ &= -\frac{1}{2} (g_{\nu\rho}\gamma_\mu\gamma_\sigma - g_{\mu\rho}\gamma_\nu\gamma_\sigma + g_{\nu\sigma}\gamma_\rho\gamma_\mu - g_{\mu\sigma}\gamma_\rho\gamma_\nu - (\rho \leftrightarrow \sigma)) \\ &= -\frac{1}{2} (g_{\nu\rho}\gamma_\mu\gamma_\sigma - g_{\mu\rho}\gamma_\nu\gamma_\sigma + g_{\nu\sigma}\gamma_\rho\gamma_\mu - g_{\mu\sigma}\gamma_\rho\gamma_\nu - (g_{\nu\sigma}\gamma_\mu\gamma_\rho - g_{\mu\sigma}\gamma_\nu\gamma_\rho + g_{\nu\rho}\gamma_\sigma\gamma_\mu - g_{\mu\rho}\gamma_\sigma\gamma_\nu)) \\ &= -\frac{1}{2} (g_{\nu\rho} [\gamma_\mu, \gamma_\sigma] - g_{\mu\rho} [\gamma_\nu, \gamma_\sigma] + g_{\nu\sigma} [\gamma_\rho, \gamma_\mu] - g_{\mu\sigma} [\gamma_\rho, \gamma_\nu]) \\ &= -ig_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + ig_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + ig_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} - ig_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} \end{aligned} \quad (1.69)$$

となる。以上から

$$\boxed{J_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]} \quad (1.70)$$

$$\boxed{[J_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = i(g_{\mu\rho}\gamma_\nu - g_{\nu\rho}\gamma_\mu)} \quad (1.71)$$

の定義により

$$\boxed{[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = -ig_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + ig_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + ig_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} - ig_{\mu\sigma} J_{\nu\rho}} \quad (1.72)$$

が導かれる。(1.72)は $f=3$ の時に、 $J_{12} = \hat{J}_3$, $J_{23} = \hat{J}_1$, $J_{31} = \hat{J}_2$ & $g = \text{diag.}(1,1,1)$ と設定すると

$$[J_{12}, J_{23}] = -ig_{22}J_{13} = ig_{22}J_{31} = iJ_{31} \Rightarrow [\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_3 \quad (1.73)$$

を与え、 $SO(3)$ の生成子(generator)を与える事が分かる。従って、(1.72)の交換関係は、(1.66)

の正負の違いを考慮すると $SO(n, f-n)$ を記述することがわかる。

更に、

$$J_{\mu f+1} (\equiv -J_{\mu f+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\mu} \quad (1.74)$$

を導入すると、添え字として $\mu, \nu, \rho = 1 \dots f$ とすると

$$[J_{\mu\alpha}, J_{\nu\alpha}] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\mu}, \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\nu} \right] = \frac{1}{2}(2iJ_{\mu\nu}) = iJ_{\mu\nu} \quad (\alpha = f+1) \quad (1.75)$$

で $[J_{\mu\alpha}, J_{\nu\alpha}] = -i\delta_{\alpha\nu}J_{\mu\alpha} + i\delta_{\mu\nu}J_{\alpha\alpha} + i\delta_{\alpha\alpha}J_{\mu\nu} - i\delta_{\mu\alpha}J_{\alpha\nu} = iJ_{\mu\nu}$ を満たす。また、(1.71)を用いると

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\alpha}] = \left[J_{\mu\nu}, \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\rho} \right] = i\frac{1}{\sqrt{2}}(g_{\mu\rho}\gamma_{\nu} - g_{\nu\rho}\gamma_{\mu}) = i(\delta_{\mu\rho}J_{\nu\alpha} - \delta_{\nu\rho}J_{\mu\alpha}) \quad (1.76)$$

なので、 $[J_{\mu\nu}, J_{\rho\alpha}] = -i\delta_{\nu\rho}J_{\mu\alpha} + i\delta_{\mu\rho}J_{\nu\alpha} + i\delta_{\nu\alpha}J_{\mu\rho} - i\delta_{\mu\alpha}J_{\nu\rho} = i(\delta_{\mu\rho}J_{\nu\alpha} - \delta_{\nu\rho}J_{\mu\alpha})$ を満たす。以上から、

$$\boxed{\begin{cases} J_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] \\ J_{\mu f+1} = -J_{f+1\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\mu} \end{cases} \quad (\mu, \nu = 1, \dots, f) \quad (1.77)}$$

$$\boxed{[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = -ig_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + ig_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + ig_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - ig_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} \quad (\mu, \nu, \rho, \sigma = 1, \dots, f+1)} \quad (1.78)$$

により、 g_{f+1f+1} の計量の違いにより

$$\bullet \quad SO(n, f+1-n): g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \dots \mu = \nu = f+1 \\ 0 \dots \mu \neq \nu \end{cases}, \quad SO(n+1, f-n): g_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 \dots \mu = \nu = f+1 \\ 0 \dots \mu \neq \nu \end{cases} \quad \text{を記述}$$

する。

クリフォード代数

クリフォード代数の要請式(1.65)は、 $[J_{\mu\nu}, \gamma_{\rho}] = i(g_{\mu\rho}\gamma_{\nu} - g_{\nu\rho}\gamma_{\mu})$ の解を与える。つまり

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, \gamma_{\rho}] &= \left[\frac{1}{2i}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}, \gamma_{\rho} \right] - (\mu \leftrightarrow \nu) = \frac{1}{2i}(\gamma_{\mu}\{\gamma_{\nu}, \gamma_{\rho}\} - \{\gamma_{\mu}, \gamma_{\rho}\}\gamma_{\nu}) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \frac{1}{2i}(\gamma_{\mu}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}\gamma_{\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu)) = \frac{1}{2i}(\gamma_{\mu}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}g_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}\gamma_{\mu}) = i(g_{\mu\rho}\gamma_{\nu} - g_{\nu\rho}\gamma_{\mu}) \end{aligned} \quad (1.79)$$

と計算され $[J_{\mu\nu}, \gamma_{\rho}] = i(g_{\mu\rho}\gamma_{\nu} - g_{\nu\rho}\gamma_{\mu})$ が導かれる。

【付録A パラボーズ粒子の生成消滅】擬似クリフォード代数と $Sp(2, \mathbb{R})$ によるとボゾン粒子の場合の γ_μ ($\mu=1,2$) から(1.65)を満たす2つのエルミート演算子を構成でき、

$$\gamma_1 = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}}, \quad \gamma_2 = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (1.80)$$

と定義する。³ **フェルミ粒子** ($l=1/2$ ($\Rightarrow p=1$) のパラフェルミ粒子) の場合に $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1$, $\{\hat{a}, \hat{a}\} = 0$, $\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\} = 0$ が成立するので、基本式の(1.65)は

$$\begin{cases} \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_1 = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}} \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}} = \frac{\cancel{\hat{a}\hat{a}^\dagger} - \cancel{\hat{a}^\dagger\hat{a}}}{2i} + \frac{\cancel{\hat{a}^\dagger\hat{a}} - \cancel{\hat{a}\hat{a}^\dagger}}{2i} = 0 \\ \gamma_1 \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_1 = 2 \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}} \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}} = -2 \frac{-\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger}{2} = \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\} = 1 \\ \gamma_2 \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_2 = 2 \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} = 2 \frac{\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger}{2} = \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\} = 1 \end{cases} \quad (1.81)$$

より $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \delta_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu=1,2$) として満たされる。この段階で $SO(2)$ を記述できる。更に、(1.77)

に従って $J_{\mu 3} (\equiv -J_{3\mu}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_\mu$ を導入すると、 $SO(3)$ を記述する。従って

$$\boxed{\gamma_1 = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}}, \quad \gamma_2 = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad J_{\mu 3} = -J_{3\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_\mu \quad (\mu, \nu=1,2)} \quad (1.82)$$

$$\boxed{[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = -ig_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + ig_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + ig_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} - ig_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} \quad \text{with } J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu} \quad (\mu, \nu, \rho, \sigma=1,2,3)} \quad (1.83)$$

により、 a, a^\dagger の演算子系は $g_{33} = 1$ として

● $SO(3)$ を記述する

ことになる。ここで

$$\begin{cases} J_{12} = \hat{J}_3 = \frac{1}{2i} \left(\frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}} \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} - \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}} \right) = \frac{\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger}{2} = \hat{N} \\ J_{23} = \hat{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{2} \\ J_{31} = \hat{J}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}} = \frac{\hat{a}^\dagger - \hat{a}}{2i} \end{cases} \quad (1.84)$$

より、 $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$ は

³ ボゾンの場合 $\gamma_1 = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/\sqrt{2}$, $\gamma_2 = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/\sqrt{2i}$ と選択が逆であるが、この選択は、後ほど、角運動量の交換関係(1.78)により \hat{a}^\dagger を生成演算子、 \hat{a} を消滅演算子として定義するためである。

$$\begin{cases} \hat{J}_+ = \hat{J}_1 + i\hat{J}_2 = \frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{2} + i\frac{\hat{a}^\dagger - \hat{a}}{2i} = \hat{a}^\dagger \\ \hat{J}_- = \hat{J}_1 - i\hat{J}_2 = \frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{2} - i\frac{\hat{a}^\dagger - \hat{a}}{2i} = \hat{a} \end{cases} \quad (1.85)$$

なので、 $[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm$ を適用すると、 $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ と $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ が導かれる。つまり

$$\begin{cases} [\hat{J}_3, \hat{J}_+] = \hat{J}_+ \Rightarrow [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger = \hat{J}_+ \\ [\hat{J}_3, \hat{J}_-] = -\hat{J}_- \Rightarrow [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} = -\hat{J}_- \end{cases} \quad (1.86)$$

より、(1.80)を選択した理由：

- \hat{a}^\dagger を生成演算子、 \hat{a} を消滅演算子が導かれた。

パラフェルミ(parafermi)粒子

パラボーズ粒子を特徴づける生成・消滅演算子の関係として、**三重交換関係**(trilinear commutation relation)がある。パラフェルミ粒子に対しては、三重交換関係として(1.11)を用いれば良い。つまり、

$$[N, \hat{a}] = -\hat{a} \Rightarrow \left[\frac{1}{2}[\hat{a}^\dagger, \hat{a}], \hat{a} \right] = -\hat{a} \quad (1.87)$$

から、

$$[\hat{a}, [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]] = 2\hat{a} \quad (1.88)$$

が成立する。また、 $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$ を用いると

$$\begin{aligned} [\hat{a}, [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]] &= [\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] - [\hat{a}, \hat{a} \hat{a}^\dagger] = \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} \hat{a} - \hat{a}^\dagger \{\hat{a}, \hat{a}\} - \{\hat{a}, \hat{a}\} \hat{a}^\dagger + \hat{a} \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = \{\hat{a}, \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}\} - \{\hat{a}^\dagger, \{\hat{a}, \hat{a}\}\} \end{aligned} \quad (1.89)$$

である。残りは、(1.59)から示唆される $[\hat{a}, [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]]$ と $[\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}]]$ であるが、 $[\hat{a}, [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]] = 0$ と

$[\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}]] = 0$ は自明である。形式的に $[\hat{a}, [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]] = [\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}]] = 0$ も含むと三重交換関係は

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{a}, [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]] &= \{\hat{a}, \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}\} - \{\hat{a}^\dagger, \{\hat{a}, \hat{a}\}\} = 2\hat{a} \\ [\hat{a}, [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger]] &= 0 \\ [\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}]] &= 0 \end{aligned}} \quad (1.90)$$

である。この解の一つとして

$$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1, \{\hat{a}, \hat{a}\} = 0 \quad (1.91)$$

があるが、これはフェルミ粒子 (**同一状態は 1 つまで**) の生成・消滅演算子である。もちろん、(1.64) (**同一状態は 2 つまで**) に対して

$$\left[\hat{a}, \left[\hat{a}^\dagger, \hat{a} \right] \right] = \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} = 2 \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \left\{ \hat{a} \hat{a}, \hat{a}^\dagger \right\} = 2(2\hat{a}) - 2\hat{a} = 2\hat{a} \quad (1.92)$$

が成立し(1.90)を満たす。