

# 付録A パラボース粒子の生成消滅

## 生成・消滅演算子

粒子の生成消滅を表すために、粒子の個数を表す状態を考える。このとき、粒子の個数は物理量であるので、エルミート(Hermite)演算子で表せる。それを $\hat{N}$ とする。<sup>1</sup> また、粒子を1つ消す演算子を $\hat{a}$ 、1つ作る演算子を $\hat{b}$ とする。 $\hat{a}, \hat{b}$ の役割を式で表すと、

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\text{個の粒子}\rangle &\propto |n-1\text{個の粒子}\rangle \\ \hat{b}|n\text{個の粒子}\rangle &\propto |n+1\text{個の粒子}\rangle\end{aligned}\tag{1.1}$$

になる。ここで、定義により、

$$n = 0, 1, 2, \dots\tag{1.2}$$

である。これより、

- $|n\text{個の粒子}\rangle$  を単に  $|n\rangle$

とすれば、

$$\hat{a}|n+1\rangle \propto |n\rangle \Rightarrow \hat{b}\hat{a}|n+1\rangle \propto \hat{b}|n\rangle \propto |n+1\rangle\tag{1.3}$$

$$\hat{b}|n+1\rangle \propto |n+2\rangle \Rightarrow \hat{a}\hat{b}|n+1\rangle \propto \hat{a}|n+2\rangle \propto |n+1\rangle\tag{1.4}$$

なので、

$$\hat{b}\hat{a}|n+1\rangle \propto |n+1\rangle, \hat{a}\hat{b}|n+1\rangle \propto |n+1\rangle\tag{1.5}$$

とわかる。これを

- **対称化**

して、

$$\frac{1}{2}(\hat{b}\hat{a} + \hat{a}\hat{b})|n+1\rangle \propto |n+1\rangle\tag{1.6}$$

比例係数を  $k$  とすると、

$$\frac{1}{2}(\hat{b}\hat{a} + \hat{a}\hat{b})|n+1\rangle = k|n+1\rangle \overset{\text{同じこと}}{\Rightarrow} \frac{1}{2}(\hat{b}\hat{a} + \hat{a}\hat{b})|n\rangle = k|n\rangle\tag{1.7}$$

と書き直せる。 $\hat{b}\hat{a} + \hat{a}\hat{b}$  を物理量とするには、

- $\hat{b}\hat{a} + \hat{a}\hat{b}$  はエルミート(Hermite)演算子

になる必要があり、その結果、 $\hat{b}\hat{a} + \hat{a}\hat{b}$  の固有値が実数になる。従って、

- $k$  は実数

になる。 $\hat{b}\hat{a} + \hat{a}\hat{b}$  はエルミート演算子であるので

$$(\hat{b}\hat{a} + \hat{a}\hat{b})^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger = \hat{b}\hat{a} + \hat{a}\hat{b}\tag{1.8}$$

より、

<sup>1</sup>以降、演算子には、 $\hat{N}$  のように  $\hat{\phantom{N}}$  をつけて表す。

$$\hat{b} = \hat{a}^\dagger \quad (1.9)$$

が解であることがわかる。これを用いると、 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$  の関係式にも比例係数を導入して

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}|n\rangle &= x_{n-1}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= y_{n+1}|n+1\rangle = x_n^*|n+1\rangle \\ \hat{N}|n\rangle &= N_n|n\rangle \text{ with } \hat{N} = \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) \quad (N_n: \text{実数}) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (x_{n-1}, y_{n+1}, N_n: n \text{ごとに違う値}) \\ \text{かもしれないので } n \text{に依存} \end{array} \quad (1.10)$$

$$(*) \langle m|\hat{a}|n\rangle = \begin{cases} x_{n-1} \langle m|n-1\rangle \\ y_{m+1}^* \langle m+1|n\rangle \end{cases} \Rightarrow \langle n-1|\hat{a}|n\rangle = \begin{cases} x_{n-1} \\ y_n^* \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_n^* = x_{n-1}}$$

とまとめることができる。

## 粒子数

$\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle$  が成立するためには、 $|n-1\rangle$  の定義により  $\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (N_n - 1)\hat{a}|n\rangle$  が要請される。つまり

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad \& \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad (1.11)$$

が成立する。更に

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle \stackrel{\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle}{=} \hat{N}x_{n-1}|n-1\rangle = x_{n-1}N_{n-1}|n-1\rangle = N_{n-1}\hat{a}|n\rangle \quad (1.12)$$

より、

$$N_n - 1 = N_{n-1} \Rightarrow N_n - N_{n-1} = 1 \quad (1.13)$$

がわかる。 $N_n - N_{n-1} = 1$  を  $n=1$  から出発すれば

$$\begin{aligned} \cancel{N_1} - N_0 &= 1 \\ \cancel{N_2} - \cancel{N_1} &= 1 \\ &\vdots \\ N_n - \cancel{N_{n-1}} &= 1 \end{aligned} \Rightarrow N_n = N_0 + n \quad (n=0,1,2,3,\dots) \quad (1.14)$$

になるので、

$$N_n = N_0 + n \quad (n=0,1,2,3,\dots) \quad (1.15)$$

を得る。 $n=0$  の  $|0\rangle$  に適用すると、(1.10)を用いて

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{N}|0\rangle &= N_0 = \frac{1}{2}\langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = \frac{1}{2}\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle \\ \Rightarrow \boxed{\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = 2N_0} \oplus \langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle &= \|\hat{a}^\dagger|0\rangle\|^2 \geq 0 \quad (\text{等号は } \hat{a} = \hat{a}^\dagger = 0) \Rightarrow \boxed{N_0 \geq 0} \end{aligned} \quad (1.16)$$

が得られる。以上から、まとめると

$$\begin{aligned}
& \boxed{\begin{aligned}
& [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \\
& \hat{N}|n\rangle = N_n|n\rangle \text{ with } N_n = N_0 + n \geq 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \\
& \hat{a}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\hat{N}|0\rangle = \langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = 2N_0 \geq 0
\end{aligned}}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

である。次に、 $\hat{N}$  を評価するために  $\hat{a}\hat{a}^\dagger$  と  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$  の行列要素を計算する。

### $\hat{a}\hat{a}^\dagger$ と $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ の行列要素

$\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle$  と  $\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle$  は、

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle = x_n^*|n+1\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}\hat{a}^\dagger|n-1\rangle = |x_{n-1}|^2|n+1\rangle \\ \hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = x_n^*\hat{a}|n+1\rangle = |x_n|^2|n\rangle \end{cases} \\
& \Rightarrow \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = |x_{n-1}|^2, \quad \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = |x_n|^2 \Rightarrow \langle n+1|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n+1\rangle = \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle
\end{aligned} \tag{1.18}$$

を利用すると、

$$\begin{aligned}
& \langle n|N|n\rangle = \frac{1}{2}\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = N_0 + n \Rightarrow \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle + \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = 2(N_0 + n) \\
& \Rightarrow \boxed{|x_{n-1}|^2 + |x_n|^2 = 2(N_0 + n) \text{ with } \langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = |x_0|^2 = 2N_0 > 0}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

より

$$\begin{aligned}
n=1: & |x_0|^2 + |x_1|^2 = 2(N_0 + 1) \Rightarrow |x_1|^2 = 2(N_0 + 1) - |x_0|^2 = 2(N_0 + 1) - 2N_0 = 2 \\
n=2: & |x_1|^2 + |x_2|^2 = 2(N_0 + 2) \Rightarrow |x_2|^2 = 2(N_0 + 2) - |x_1|^2 = 2(N_0 + 2) - 2 = 2N_0 + 2 \\
n=3: & |x_2|^2 + |x_3|^2 = 2(N_0 + 3) \Rightarrow |x_3|^2 = 2(N_0 + 3) - |x_2|^2 = 2(N_0 + 3) - 2(N_0 + 1) = 4 \\
n=4: & |x_3|^2 + |x_4|^2 = 2(N_0 + 4) \Rightarrow |x_4|^2 = 2(N_0 + 4) - |x_3|^2 = 2(N_0 + 4) - 4 = 2N_0 + 4 \\
n=5: & |x_4|^2 + |x_5|^2 = 2(N_0 + 5) \Rightarrow |x_5|^2 = 2(N_0 + 5) - |x_4|^2 = 2(N_0 + 5) - 2(N_0 + 2) = 6
\end{aligned} \tag{1.20}$$

なので、

$$\begin{aligned}
& |x_n|^2 = \begin{cases} 2N_0 + n \cdots n = \text{even} \\ n+1 \cdots n = \text{odd} \end{cases} \Rightarrow |x_{n+1}|^2 = \begin{cases} 2N_0 + n+1 \cdots n+1 = \text{even} \\ n+2 \cdots n+1 = \text{odd} \end{cases} \\
& |x_{n+1}|^2 + |x_n|^2 = 2(N_0 + n+1) \\
& \Rightarrow |x_{n+1}|^2 = 2(N_0 + n+1) - |x_n|^2 = \begin{cases} 2(N_0 + n+1) - (2N_0 + n) \cdots n = \text{even} \\ 2(N_0 + n+1) - (n+1) \cdots n = \text{odd} \end{cases} \\
& = \begin{cases} n+2 \cdots n = \text{even} \\ 2N_0 + n+1 \cdots n = \text{odd} \end{cases} = \begin{cases} n+2 \cdots n+1 = \text{odd} \\ 2N_0 + n+1 \cdots n+1 = \text{even} \end{cases} \Rightarrow \text{OK}
\end{aligned} \tag{1.21}$$

より

$$\boxed{\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = |x_n|^2 = \begin{cases} 2N_0 + n \cdots n = \text{even} \\ n+1 \cdots n = \text{odd} \end{cases}, \quad \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = |x_{n-1}|^2 = \begin{cases} n \cdots n = \text{even} \\ 2N_0 + n-1 \cdots n = \text{odd} \end{cases}} \tag{1.22}$$

を得る。

### $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]$ の行列要素

$\langle n | [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] | n \rangle$  は

$$\langle n | [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] | n \rangle = \langle n | \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} | n \rangle = |x_n|^2 - |x_{n-1}|^2 = \begin{cases} 2N_0 + n - n = 2N_0 \cdots n = \text{even} \\ n + 1 - (2N_0 + n - 1) = 2(1 - N_0) \cdots n = \text{odd} \end{cases} \quad (1.23)$$

なので

$$\langle n | [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] | n \rangle = \begin{cases} 2N_0 \cdots n = \text{even} \\ 2(1 - N_0) \cdots n = \text{odd} \end{cases} \quad (N_0 > 0) \quad (1.24)$$

を得る。

## 生成・消滅演算子の代数

$N_0 = \frac{1}{2}$  の時は、(1.24)は

$$\langle n | [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] | n \rangle = \begin{cases} 2N_0 \cdots n = \text{even} \\ 2(1 - N_0) \cdots n = \text{odd} \end{cases} \stackrel{N_0=1/2}{=} 1 \quad (1.25)$$

になり状態に依存することなく

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \text{ for } N_0 = \frac{1}{2} \quad (1.26)$$

が成立し通常の変換関係を得る。また、 $N_0 = 1$  の時は

$$|x_n| = \begin{cases} \sqrt{2+n} \cdots n = \text{even} \\ \sqrt{1+n} \cdots n = \text{odd} \end{cases} \quad (1.27)$$

より、(1.10)の  $\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle$ ,  $\hat{a}^\dagger|n\rangle = x_n^*|n+1\rangle$  に注意して

$$\begin{cases} \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle = \hat{a}\hat{a}x_n^*|n+1\rangle = x_n^*\hat{a}x_n|n\rangle = |x_n|^2\hat{a}|n\rangle \\ \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}x_{n-1}|n-1\rangle = x_{n-1}\hat{a}^\dagger x_{n-2}|n-2\rangle = x_{n-1}x_{n-2}x_{n-2}^*|n-1\rangle \\ \quad = |x_{n-2}|^2 x_{n-1}|n-1\rangle = |x_{n-2}|^2\hat{a}|n\rangle \end{cases} \quad (1.28)$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} [\hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger]|n\rangle &= \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger|n\rangle - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}|n\rangle = (|x_n|^2 - |x_{n-2}|^2)\hat{a}|n\rangle \\ &= \begin{cases} [2+n - (2+n-2)]\hat{a}|n\rangle = 2\hat{a}|n\rangle \cdots n = \text{even} \\ [1+n - (1+n-2)]\hat{a}|n\rangle = 2\hat{a}|n\rangle \cdots n = \text{odd} \end{cases} = 2\hat{a}|n\rangle \end{aligned} \quad (1.29)$$

なので、 $[\hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger]|n\rangle$  は状態に依らずに

$$\boxed{[\hat{a}\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 2\hat{a} \text{ for } N_0 = 1} \quad (1.30)$$

が分かる。この関係を

$$[\{\hat{a}, \hat{a}\}, \hat{a}^\dagger] = 4\hat{a} \quad (1.31)$$

として拡張すればパラボーズ粒子の生成・消滅演算子の関係(1.38)を与える。

## パラボーズ(parabose)粒子

パラボーズ粒子を特徴づける生成・消滅演算子の関係として、三重交換関係(trilinear commutation relation)として(1.11)を用いれば良い。つまり、

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \Rightarrow \left[ \frac{1}{2} \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\}, \hat{a} \right] = -\hat{a} \quad (1.32)$$

から、

$$[\hat{a}, \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\}] = 2\hat{a} \quad (1.33)$$

が成立する。残りは、(1.31)から示唆される  $[\hat{a}, \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\}]$  と  $[\hat{a}, \{\hat{a}, \hat{a}\}]$  である。  $[\hat{a}, \{\hat{a}, \hat{a}\}] = 0$  は明らかなので

$[\hat{a}, \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\}]$  の評価は、(1.10) :  $\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle, \hat{a}^\dagger|n\rangle = x_n^*|n+1\rangle$  及び(1.22) :  $|x_n|^2 =$

$\begin{cases} 2N_0 + n \cdots n = \text{even} \\ n+1 \cdots n = \text{odd} \end{cases}$  に注意して、

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\}]|n\rangle &= \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|n\rangle - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \hat{a}\hat{a}^\dagger x_n^*|n+1\rangle - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger x_{n-1}|n-1\rangle \\ &= x_n^*\hat{a}x_{n+1}^*|n+2\rangle - x_{n-1}\hat{a}^\dagger x_{n-1}^*|n\rangle = x_n^*x_{n+1}x_{n+1}^*|n+1\rangle - |x_{n-1}|^2 x_n^*|n+1\rangle \\ &= (|x_{n+1}|^2 - |x_{n-1}|^2) \hat{a}^\dagger|n\rangle = \begin{cases} 2N_0 + n + 1 - (2N_0 + n - 1) \cdots n + 1 = \text{even} \\ n + 2 - n \cdots n + 1 = \text{odd} \end{cases} = 2\hat{a}^\dagger|n\rangle \end{aligned} \quad (1.34)$$

より

$$[\hat{a}, \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\}] = 4\hat{a}^\dagger \quad (1.35)$$

を得る。また、  $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$  を用いると

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\}] &= [\hat{a}, \hat{a}^\dagger\hat{a}] + [\hat{a}, \hat{a}\hat{a}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\hat{a} + \hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}, \hat{a}]\hat{a}^\dagger + \hat{a}[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \\ &= [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\hat{a} + \hat{a}[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \{\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\} \\ [\hat{a}, \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\}] &= 2([\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]) = 2\{\hat{a}^\dagger, [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\} \end{aligned} \quad (1.36)$$

である。また、  $[\hat{a}, \{\hat{a}, \hat{a}\}] = 0$  は当たり前であるが、形式的に

$$[\hat{a}, \{\hat{a}, \hat{a}\}] = 2([\hat{a}, \hat{a}]\hat{a} + [\hat{a}, \hat{a}]\hat{a}) = 2\{\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}]\} \quad (1.37)$$

以上から、形式的に  $[\hat{a}, \{\hat{a}, \hat{a}\}] = 0$  も含むと三重交換関係は

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{a}, \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}\}] &= \{\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\} = 2\hat{a} \\ [\hat{a}, \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\}] &= 2\{\hat{a}^\dagger, [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\} = 4\hat{a}^\dagger \\ [\hat{a}, \{\hat{a}, \hat{a}\}] &= 2\{\hat{a}, [\hat{a}, \hat{a}]\} = 0 \end{aligned}} \quad (1.38)$$

である。この解の一つとして

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (\text{及び} [\hat{a}, \hat{a}] = 0) \quad (1.39)$$

があるが、これはボース粒子の生成・消滅演算子である。

## 角運動量

通常、角運動量演算子  $(\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$  は、

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_3, \quad [\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hat{J}_1, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hat{J}_2 \quad (1.40)$$

を満たし、 $SO(3)$  群に付随する演算子になる。昇降演算子を  $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{J}_+ |J, J_3\rangle \propto |J, J_3 + 1\rangle, \quad \hat{J}_- |J, J_3\rangle \propto |J, J_3 - 1\rangle \\ \hat{J}_3 |J, J_3\rangle = J_3 |J, J_3\rangle \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{l} [\hat{J}_3, \hat{J}_+] = \hat{J}_+, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_-] = -\hat{J}_- \\ [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3 \end{array} \right. \quad (1.41)$$

をみます。この交換関係と

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}^\dagger |n\rangle = x_n^* |n+1\rangle, \quad \hat{a} |n\rangle = x_{n-1} |n-1\rangle \\ \hat{N} |n\rangle = N_n |n\rangle \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{l} [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \\ \langle n | [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] | n \rangle = \begin{cases} 2N_0 \cdots n = \text{even} \\ 2(1-N_0) \cdots n = \text{odd} \end{cases} \end{array} \right. \quad (1.42)$$

と比較して、

$$\hat{J}_+ \Leftrightarrow \hat{a}^\dagger, \quad \hat{J}_- \Leftrightarrow \hat{a}, \quad \hat{J}_3 \Leftrightarrow \hat{N}, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3 \Leftrightarrow \langle n | [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] | n \rangle = \begin{cases} 2N_0 \cdots n = \text{even} \\ 2(1-N_0) \cdots n = \text{odd} \end{cases} \quad (1.43)$$

と対応できそうであるが、 $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] \Leftrightarrow [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$  の対応が正しくない。少なくとも、行列要素に依らない

$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$  の対応関係が必要になる。<sup>2</sup> まず、 $[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm$  に対応する  $\hat{J}_\pm$  として

$\hat{J}_+ \Leftrightarrow \hat{a}^{\dagger k}, \quad \hat{J}_- \Leftrightarrow \hat{a}^k$  を想定すれば、 $f^k \equiv [N, \hat{a}^{\dagger k}]$  として

<sup>2</sup> 但し、 $N_0=1/2$  の時には、行列要素に依らずに  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]=1$  を与えている。しかし、 $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] \Leftrightarrow [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$  対応では  $c$  数の  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$  は、演算子を与える  $[\hat{J}_+, \hat{J}_-]$  に対応できない。

$$\begin{aligned}
f^k \left( = [\hat{N}, \hat{a}^{\dagger k}] \right) &= [\hat{N}, \hat{a}^{\dagger}] \hat{a}^{\dagger k-1} + \hat{a}^{\dagger} [\hat{N}, \hat{a}^{\dagger k-1}] = \hat{a}^{\dagger k} + \hat{a}^{\dagger} f^{k-1} \Rightarrow f^k - \hat{a}^{\dagger} f^{k-1} = \hat{a}^{\dagger k} \\
\Rightarrow &\begin{cases} \cancel{f^k - \hat{a}^{\dagger} f^{k-1}} = \hat{a}^{\dagger k} \\ \cancel{\hat{a}^{\dagger} f^{k-1} - \hat{a}^{\dagger 2} f^{k-2}} = \hat{a}^{\dagger k} \\ \vdots \\ \cancel{\hat{a}^{\dagger k} f^1 - \hat{a}^{\dagger k-1} f^1} = \hat{a}^{\dagger k} \end{cases} \\
\Rightarrow f^k - \hat{a}^{\dagger k-1} f^1 &= (k-1) \hat{a}^{\dagger k} \Rightarrow f^k - \hat{a}^{\dagger k-1} [\hat{N}, \hat{a}^{\dagger}] = (k-1) \hat{a}^{\dagger k} \Rightarrow f^k - \hat{a}^{\dagger k-1} \hat{a}^{\dagger} = (k-1) \hat{a}^{\dagger k} \quad (1.44) \\
\Rightarrow f^k &= [\hat{N}, \hat{a}^{\dagger k}] = k \hat{a}^{\dagger k}
\end{aligned}$$

より

$$\left[ \hat{N}, \frac{1}{k} \hat{a}^k \right] = -\hat{a}^k, \quad \left[ \hat{N}, \frac{1}{k} \hat{a}^{\dagger k} \right] = \hat{a}^{\dagger k} \Leftrightarrow \hat{J}_+ \Leftrightarrow \frac{1}{k} \hat{a}^{\dagger k}, \quad \hat{J}_- \Leftrightarrow \frac{1}{k} \hat{a}^k \quad (1.45)$$

を得る。特に、 $k=2$  の場合は

$$\begin{aligned}
\boxed{k=2} \langle n | \left[ \frac{1}{2} \hat{a}^{\dagger 2}, \frac{1}{2} \hat{a}^2 \right] | n \rangle &= \frac{1}{4} \langle n | [\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}^2] | n \rangle = \frac{1}{4} \langle n | ([\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}] \hat{a} + \hat{a} [\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}]) | n \rangle \\
&= \frac{1}{4} \langle n | (\hat{a}^{\dagger} [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] \hat{a} + [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] \hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^{\dagger} [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] + \hat{a} [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] \hat{a}^{\dagger}) | n \rangle \Leftarrow \begin{cases} \hat{a}^{\dagger} | n \rangle = x_n^* | n+1 \rangle \\ \hat{a} | n \rangle = x_n | n-1 \rangle \end{cases} \\
&= \frac{1}{4} \left( |x_{n-1}|^2 \langle n-1 | [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] | n-1 \rangle + |x_{n-1}|^2 \langle n | [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] | n \rangle + |x_n|^2 \langle n | [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] | n \rangle \right. \\
&\quad \left. + |x_n|^2 \langle n+1 | [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] | n+1 \rangle \right) \quad (1.46) \\
&= \frac{1}{4} \left( |x_{n-1}|^2 \langle n-1 | [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] | n-1 \rangle + \overbrace{(|x_{n-1}|^2 + |x_n|^2)}^{2(N_0+n+1)} \langle n | [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] | n \rangle + |x_n|^2 \langle n+1 | [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] | n+1 \rangle \right) \\
&= \frac{1}{4} (|x_{n-1}|^2 \langle n-1 | [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] | n-1 \rangle + 2(N_0+n) \langle n | [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] | n \rangle + |x_n|^2 \langle n+1 | [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] | n+1 \rangle)
\end{aligned}$$

なので  $\langle n | [\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] | n \rangle = \begin{cases} 2N_0 \cdots n = \text{even} \\ 2(1-N_0) \cdots n = \text{odd} \end{cases}$ 、 $|x_n|^2 = \begin{cases} 2N_0 + n \cdots n = \text{even} \\ n+1 \cdots n = \text{odd} \end{cases}$  に注意して

$$\begin{aligned}
\boxed{\begin{matrix} n = \text{even} \\ n \pm 1 = \text{odd} \end{matrix}} \langle n | \left[ \frac{1}{2} \hat{a}^{\dagger 2}, \frac{1}{2} \hat{a}^2 \right] | n \rangle &= \frac{1}{4} (n [-2(1-N_0)] + 2(N_0+n)(-2N_0) + (2N_0+n)[-2(1-N_0)]) \\
&= \frac{1}{4} ((n+2N_0+n)[-2(1-N_0)] + 2(N_0+n)(-2N_0)) \quad (1.47) \\
&= \frac{1}{4} (2(N_0+n)(-2) + \cancel{2(N_0+n)2N_0} + \cancel{2(N_0+n)(-2N_0)}) \\
&= -(N_0+n) = -\langle n | \hat{N} | n \rangle \Rightarrow \left[ \frac{1}{2} \hat{a}^{\dagger 2}, \frac{1}{2} \hat{a}^2 \right] = -\hat{N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \boxed{\begin{array}{l} n = \text{odd} \\ n \pm 1 = \text{even} \end{array}} \langle n | \left[ \frac{1}{2} \hat{a}^{\dagger 2}, \frac{1}{2} \hat{a}^2 \right] | n \rangle = \frac{1}{4} \left( (2N_0 + n - 1)(-2N_0) + 2(N_0 + n)[-2(1 - N_0)] + (n + 1)(-2N_0) \right) \\
& = \frac{1}{4} \left( (2N_0 + n - 1 + n + 1)(-2N_0) + 2(N_0 + n)[-2(1 - N_0)] \right) \\
& = \frac{1}{4} \left( \cancel{2(N_0 + n)} \cancel{(-2N_0)} + 2(N_0 + n)(-2) + \cancel{2(N_0 + n)} \cancel{2N_0} \right) \\
& = -(N_0 + n) = -\langle n | \hat{N} | n \rangle \Rightarrow \left[ \frac{1}{2} \hat{a}^{\dagger 2}, \frac{1}{2} \hat{a}^2 \right] = -\hat{N}
\end{aligned} \tag{1.48}$$

より、 $n = \text{even, odd}$  とともに同一の式

$$\boxed{\left[ \frac{1}{2} \hat{a}^{\dagger 2}, \frac{1}{2} \hat{a}^2 \right] = -\hat{N}} \tag{1.49}$$

を得る。対応

$$\hat{J}_+ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \hat{a}^{\dagger 2}, \quad \hat{J}_- \Leftrightarrow \frac{1}{2} \hat{a}^2, \quad \hat{J}_3 \Leftrightarrow \frac{\hat{N}}{2} \tag{1.50}$$

を基にすると、(1.41)の $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3$ に反して

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = -2\hat{J}_3 \tag{1.51}$$

の関係が導かれる。これより $[\hat{J}_1, \hat{J}_2]$ として

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = [\hat{J}_1 + i\hat{J}_2, \hat{J}_1 - i\hat{J}_2] = -2i[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = -2\hat{J}_3 \Rightarrow [\hat{J}_1, \hat{J}_2] = -i\hat{J}_3 \tag{1.52}$$

が要請される。従って、

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{J}_+ = \frac{1}{2} \hat{a}^{\dagger 2} = \frac{1}{2} \{ \hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger \}, \quad \hat{J}_- = \frac{1}{2} \hat{a}^2 = \frac{1}{2} \{ \hat{a}, \hat{a} \}, \quad \hat{J}_3 = \frac{\hat{N}}{2} = \frac{1}{4} \{ \hat{a}^\dagger, \hat{a} \} \\ [\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = -2\hat{J}_3 \end{array}} \tag{1.53}$$

或は

$$\boxed{\hat{J}_1 = \frac{\hat{J}_+ + \hat{J}_-}{2} = \frac{\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2}{4}, \quad \hat{J}_2 = \frac{\hat{J}_+ - \hat{J}_-}{2} = \frac{\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2}{4i}, \quad \hat{J}_3 = \frac{\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}}{4}} \tag{1.54}$$

は

$$\boxed{[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = -i\hat{J}_3, \quad [\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hat{J}_1, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hat{J}_2} \tag{1.55}$$

を満たす事が分かる。これは、

- 回転群  $SO(2,1)$ : 3次元ローレンツ群の角運動量

を表わす。

## 回転群 $SO(2,1)$

【安江正樹@東海大学理学部物理学科】



回転群の演算子が  $T^{\mu\nu} (= -T^{\nu\mu})$  ( $\mu, \nu = 1 \sim N$ ) の時、元  $U$  に対して、パラメーターを  $\omega_{\mu\nu} (= -\omega_{\nu\mu})$  を用

い  $U = \exp\left(\frac{1}{2}i\omega_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\right)$  と表わせる。ここに、計量  $\eta_{\mu\nu} (= \eta_{\nu\mu})$  を用いて、 $\omega_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = \sum_{\mu,\nu,\mu',\nu'=1}^N \eta_{\mu\mu'}\eta_{\nu\nu'}\omega^{\mu\nu}T^{\mu'\nu'}$

である。  $T^{\mu\nu}$  は、

$$[T^{\mu\nu}, T^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}T^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}T^{\mu\rho} - \eta^{\nu\rho}T^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}T^{\nu\rho}) \quad (1.56)$$

を満たす。  $SO(2,1)$  の交換関係(1.55)を再現するには

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \quad \& \quad \eta^{\mu\nu} = (\eta^{-1})_{\mu\nu} \quad (1.57)$$

及び

$$T^{12} = \hat{J}^3, \quad T^{23} = \hat{J}^1, \quad T^{31} = \hat{J}^2 \quad (1.58)$$

と定義する。その結果、(1.56)より

$$\begin{aligned} [T^{23}, T^{31}] &= i(-\eta^{33}T^{21}) \Rightarrow [\hat{J}^1, \hat{J}^2] = i\eta^{33}\hat{J}^3 \stackrel{\eta^{33}=-1}{=} -i\hat{J}^3 \\ [T^{31}, T^{12}] &= i(-\eta^{11}T^{32}) \Rightarrow [\hat{J}^2, \hat{J}^3] = i\eta^{11}\hat{J}^1 \stackrel{\eta^{11}=1}{=} i\hat{J}^1 \\ [T^{12}, T^{23}] &= i(-\eta^{22}T^{13}) \Rightarrow [\hat{J}^3, \hat{J}^1] = i\eta^{22}\hat{J}^2 \stackrel{\eta^{22}=1}{=} i\hat{J}^2 \end{aligned} \quad (1.59)$$

となり、確かに(1.55)を導く。

通常の角運動量の議論に従って、ベクトル  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{J}_1\mathbf{i} + \hat{J}_2\mathbf{j} + \hat{J}_3\mathbf{k}$  を導入する。  $\hat{\mathbf{J}}^2$  を

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu,\mu',\nu'=1}^N \eta_{\mu\mu'}\eta_{\nu\nu'}\hat{J}^{\mu\nu}\hat{J}^{\mu'\nu'} \\ &= \frac{1}{2}(\hat{J}^{12}\hat{J}^{12} + \hat{J}^{21}\hat{J}^{21} - \hat{J}^{23}\hat{J}^{23} - \hat{J}^{32}\hat{J}^{32} - \hat{J}^{31}\hat{J}^{31} - \hat{J}^{13}\hat{J}^{13}) = \hat{J}^3\hat{J}^3 - \hat{J}^1\hat{J}^1 - \hat{J}^2\hat{J}^2 \end{aligned} \quad (1.60)$$

と定義すると  $[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_{1,2,3}] = 0$  を満たすことがわかる。さらに、

$$\boxed{\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_3^2 - \frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+)} \quad (1.61)$$

と書きかえられるので、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}^2 &= \hat{J}_3^2 - \frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+) \stackrel{[\hat{J}_+\hat{J}_-] = -2\hat{J}_3}{\Rightarrow} \hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_3^2 - \frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_+\hat{J}_- + 2\hat{J}_3) \\ &\Rightarrow \hat{J}_+\hat{J}_- = -\hat{\mathbf{J}}^2 + \hat{J}_3(\hat{J}_3 - 1) \Rightarrow \hat{J}_-\hat{J}_+ = -\hat{\mathbf{J}}^2 + \hat{J}_3(\hat{J}_3 + 1) \end{aligned} \quad (1.62)$$

より

$$\boxed{\hat{J}_+ \hat{J}_- = -\hat{J}^2 + \hat{J}_3 (\hat{J}_3 - 1), \hat{J}_- \hat{J}_+ = -\hat{J}^2 + \hat{J}_3 (\hat{J}_3 + 1)} \quad (1.63)$$

の関係式が成り立つ。

## 回転群 $SO(2,1)$ のスペクトラム

さて、(1.55)から同時観測可能固有値として、

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 |A\rangle &= A |A\rangle \\ \hat{J}_3 |j_3\rangle &= B_n |j_3\rangle \text{ for } j_3 = \frac{N_0 + n}{2} \geq \frac{N_0}{2} \left( n \geq 0, N_0 = \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle \right) \end{aligned} \quad (1.64)$$

と定義する。従って、

$$\text{固有ベクトル} = |A, j_3\rangle \quad (1.65)$$

と取れる。更に、 $\hat{J}_- = \frac{1}{2} \hat{a}^2$  より  $\hat{a}^2 |1\rangle = \hat{a}^2 |0\rangle = 0$  なので

$$\hat{J}_- \left[ \overbrace{A, j_3 = \frac{N_0}{2}}^{n=0} \right] = \hat{J}_- \left[ \overbrace{A, j_3 = \frac{N_0 + 1}{2}}^{n=1} \right] = 0 \quad (1.66)$$

が条件になる。そこで、 $\hat{J}_- |A, j_3\rangle = 0$  よりノルム  $\|\hat{J}_- |A, j_3\rangle\|^2$  を考えると、

$$\begin{aligned} 0 &= \|\hat{J}_- |A, j_3\rangle\|^2 = (\hat{J}_- |A, j_3\rangle)^\dagger \hat{J}_- |A, j_3\rangle = \langle A, j_3 | \hat{J}_+ \hat{J}_- |A, j_3\rangle \\ &= \langle A, j_3 | \left( -\hat{J}^2 + \hat{J}_3 (\hat{J}_3 - 1) \right) |A, j_3\rangle = -\langle A, j_3 | \hat{J}^2 |A, j_3\rangle + \langle A, j_3 | \hat{J}_3 (\hat{J}_3 - 1) |A, j_3\rangle \quad (1.67) \\ &= [-A + j_3 (j_3 - 1)] \| |A, j_3\rangle \|^2 = [-A + j_3 (j_3 - 1)] \| |A, j_3\rangle \|^2 \end{aligned}$$

と計算されるので、 $\hat{J}^2 |\ell\rangle = \ell(\ell+1) |\ell\rangle$  と定義すると

$$A = j_3 (j_3 - 1) = \ell(\ell+1) \text{ for } \ell = -j_3 = -\frac{N_0}{2} \ (n=0) \text{ or } -\frac{N_0+1}{2} \ (n=1) \quad (1.68)$$

がわかる。<sup>3</sup> 以上から

$$\boxed{\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = -2\hat{J}_3 \\ &[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = -i\hat{J}_3, \quad [\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hat{J}_1, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hat{J}_2 \end{aligned} \right. \leftarrow \hat{J}_+ = \frac{1}{2} \hat{a}^{\dagger 2}, \quad \hat{J}_- = \frac{1}{2} \hat{a}^2, \quad \hat{J}_3 = \frac{\hat{N}}{2} \\ &\hat{J}^2 |\ell, j_3\rangle = \ell(\ell+1) |\ell, j_3\rangle \text{ with } \ell = \begin{cases} -\frac{N_0}{2} \text{ starting from } n=0 & \left( N_0 = \frac{1}{2} \langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle \right) \\ -\frac{N_0+1}{2} \text{ starting from } n=1 & \left( j_3 = \frac{N_0+n}{2} : n=0,1,2,\dots \right) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.69)$$

<sup>3</sup>  $\hat{J}^2 |\ell\rangle = \ell(\ell-1) |\ell\rangle \leftarrow \ell = j_3$  で定義してもよい。

を得る。

### 固有値 $j_3$ の遷移

基底状態  $|\ell, j_3\rangle$  から生成される状態  $\hat{a}^k |\ell, j_3\rangle$  ( $\hat{a}^{k\dagger} |\ell, j_3\rangle$ ) の  $\hat{J}_3$  の固有値は

$$\begin{cases} [\hat{J}_3, \hat{a}^k] = \left[ \frac{N}{2}, \hat{a}^k \right] = -\frac{k}{2} \hat{a}^k \\ [\hat{J}_3, \hat{a}^{k\dagger}] = \left[ \frac{N}{2}, \hat{a}^{k\dagger} \right] = \frac{k}{2} \hat{a}^{k\dagger} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{J}_3 \hat{a}^k |\ell, j_3\rangle = \hat{a}^k \left( \hat{J}_3 - \frac{k}{2} \right) |\ell, j_3\rangle = \left( j_3 - \frac{k}{2} \right) \hat{a}^k |\ell, j_3\rangle \\ \hat{J}_3 \hat{a}^{k\dagger} |\ell, j_3\rangle = \hat{a}^{k\dagger} \left( \hat{J}_3 + \frac{k}{2} \right) |\ell, j_3\rangle = \left( j_3 + \frac{k}{2} \right) \hat{a}^{k\dagger} |\ell, j_3\rangle \end{cases} \quad (1.70)$$

なので、固有値を  $\pm 1$  変化させる演算  $\hat{J}_\pm$  に対して

$$\begin{cases} \hat{J}_\pm \hat{a}^k |\ell, j_3\rangle \propto \left( j_3 - \frac{k}{2} \pm 1 \right) \hat{a}^k |\ell, j_3\rangle = \left( \frac{N_0 + n}{2} - \frac{k}{2} \pm 1 \right) \hat{a}^k |\ell, j_3\rangle = \frac{N_0 + (n - k \pm 2)}{2} \hat{a}^k |\ell, j_3\rangle \\ \hat{J}_\pm \hat{a}^{k\dagger} |\ell, j_3\rangle \propto \left( j_3 + \frac{k}{2} \pm 1 \right) \hat{a}^{k\dagger} |\ell, j_3\rangle = \left( \frac{N_0 + n}{2} + \frac{k}{2} \pm 1 \right) \hat{a}^{k\dagger} |\ell, j_3\rangle = \frac{N_0 + (n + 2 \pm 2)}{2} \hat{a}^{k\dagger} |\ell, j_3\rangle \end{cases} \quad (1.71)$$

を得る。従って、(1.69)の

$$\ell = \begin{cases} -\frac{N_0}{2} \text{ starting from } n=0 \\ -\frac{N_0+1}{2} \text{ starting from } n=1 \end{cases} \quad (1.72)$$

を考慮すると、 $SO(2,1)$  には  $\hat{J}_+$  の演算により

$$\begin{aligned} |\ell, j_3(n=0)\rangle & \left( \ell = -\frac{N_0}{2} \right) \xrightarrow{\hat{J}_+} |\ell, j_3(n=2)\rangle \xrightarrow{\hat{J}_+} |\ell, j_3(n=4)\rangle \xrightarrow{\hat{J}_+} \dots \\ & \searrow_{\hat{a}^\dagger} \quad \nearrow_{\hat{a}^\dagger} \quad \searrow_{\hat{a}^\dagger} \quad \nearrow_{\hat{a}^\dagger} \quad \searrow_{\hat{a}^\dagger} \\ |\ell, j_3(n=1)\rangle & \left( \ell = -\frac{N_0+1}{2} \right) \xrightarrow{\hat{J}_+} |\ell, j_3(n=3)\rangle \xrightarrow{\hat{J}_+} |\ell, j_3(n=5)\rangle \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (1.73)$$

と推移する 2 種類の表現が現れる事がわかる。

## 擬似クリフォード代数と $Sp(2, \mathbb{R})$

クリフォード代数では**反可換な基底**  $\gamma_\mu$  ( $\mu=1 \dots f$ ) と計量  $g_{\mu\nu}$  ( $=g_{\nu\mu}$ ) を用い  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = g_{\mu\nu} = 1$  for  $\mu=\nu=1$

$\sim n$ ,  $-1$  for  $\mu=\nu=n+1 \sim f$ ,  $0$  for  $\mu \neq \nu$  を導入し、 $\gamma_\mu$  で作られる演算子を  $J_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$  で表わすと、 $J_{\mu\nu}$

は  $SO(n, f-n)$  の生成子(generator)になる。これを参考にして、エルミート演算子  $\gamma_\mu$  ( $\mu=1, 2$ ) として、

$$\gamma_1 = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}i} \Leftrightarrow \hat{a} = \frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\gamma_1 - i\gamma_2}{\sqrt{2}} \quad (1.74)$$

を定義すると ( $\gamma_1 = \hat{x}$ ,  $\gamma_2 = \hat{p}$  にあたる)

$$[\gamma_1, \gamma_2] = \frac{1}{2i} [\hat{a} + \hat{a}^\dagger, \hat{a} - \hat{a}^\dagger] = \frac{1}{2i} ([\hat{a}^\dagger, \hat{a}] - [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]) = i \quad (1.75)$$

を与える。従って、

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = i g_{\mu\nu} = i \varepsilon_{\mu\nu} \quad (\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0) \quad (1.76)$$

と設定できる。その生成子は、

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} (= J_{\nu\mu}) \quad \text{with } J_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}^\dagger \quad (1.77)$$

である。さらに、 $[J_{\mu\nu}, \gamma_\rho]$  の交換関係は

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} [J_{22}, \gamma_2] &= \left[ \frac{1}{2} \{ \gamma_2, \gamma_2 \}, \gamma_2 \right] = 0 \\ [J_{11}, \gamma_1] &= \left[ \frac{1}{2} \{ \gamma_1, \gamma_1 \}, \gamma_1 \right] = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow [J_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = i (g_{\mu\rho} \gamma_\nu + g_{\nu\rho} \gamma_\mu) = 0 \\ & \left\{ \begin{aligned} [J_{22}, \gamma_1] &= \left[ \frac{1}{2} \{ \gamma_2, \gamma_2 \}, \gamma_1 \right] = \gamma_2 [\gamma_2, \gamma_1] + [\gamma_2, \gamma_1] \gamma_2 = i \varepsilon_{21} \gamma_2 = i g_{21} \gamma_2 \\ [J_{11}, \gamma_2] &= \left[ \frac{1}{2} \{ \gamma_1, \gamma_1 \}, \gamma_2 \right] = \gamma_1 [\gamma_1, \gamma_2] + [\gamma_1, \gamma_2] \gamma_1 = i \varepsilon_{12} \gamma_1 = i g_{12} \gamma_2 \end{aligned} \right. \\ & \Rightarrow [J_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = i (g_{\mu\rho} \gamma_\nu + g_{\nu\rho} \gamma_\mu) \\ & [J_{12}, \gamma_1] = [J_{21}, \gamma_1] = \left[ \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2, \gamma_1 \right] + \left[ \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_1, \gamma_1 \right] = \frac{1}{2} \left( \gamma_1 [\gamma_2, \gamma_1] + [\gamma_1, \gamma_1] \gamma_2 \right. \\ & \quad \left. + \gamma_2 [\gamma_1, \gamma_1] + [\gamma_2, \gamma_1] \gamma_1 \right) \\ & = \frac{1}{2} (\gamma_1 i \varepsilon_{21} + i \varepsilon_{21} \gamma_1) = i g_{21} \gamma_1 \Rightarrow [J_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = i (g_{\mu\rho} \gamma_\nu + g_{\nu\rho} \gamma_\mu) \\ & [J_{12}, \gamma_2] = [J_{21}, \gamma_2] = \left[ \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2, \gamma_2 \right] + \left[ \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_1, \gamma_2 \right] = \frac{1}{2} \left( \gamma_1 [\gamma_2, \gamma_2] + [\gamma_1, \gamma_2] \gamma_2 \right. \\ & \quad \left. + \gamma_2 [\gamma_1, \gamma_2] + [\gamma_2, \gamma_2] \gamma_1 \right) \\ & = \frac{1}{2} (i \varepsilon_{12} \gamma_2 + \gamma_2 i \varepsilon_{12}) = i g_{12} \gamma_2 \Rightarrow [J_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = i (g_{\mu\rho} \gamma_\nu + g_{\nu\rho} \gamma_\mu) \end{aligned} \quad (1.78)$$

と計算され

$$\boxed{[J_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = i (g_{\mu\rho} \gamma_\nu + g_{\nu\rho} \gamma_\mu)} \quad (1.79)$$

を導く。

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = i g_{\mu\nu} \text{ に依らない結果}$$

生成子(1.77)の満たす交換関係 $[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}]$ は、(1.79)を用いて計算できる。その際、(1.76)の $[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = i g_{\mu\nu}$

は必要ない。実際、

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= \left[ J_{\mu\nu}, \frac{1}{2} \{ \gamma_\rho, \gamma_\sigma \} \right] = \frac{1}{2} [J_{\mu\nu}, \gamma_\rho \gamma_\sigma] + (\rho \leftrightarrow \sigma) \\ &= \frac{1}{2} ([J_{\mu\nu}, \gamma_\rho] \gamma_\sigma + \gamma_\rho [J_{\mu\nu}, \gamma_\sigma] + (\rho \leftrightarrow \sigma)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( i(g_{\mu\rho}\gamma_\nu + g_{\nu\rho}\gamma_\mu)\gamma_\sigma + \gamma_\rho i(g_{\mu\sigma}\gamma_\nu + g_{\nu\sigma}\gamma_\mu) + (\rho \leftrightarrow \sigma) \right) \\
&= \frac{i}{2} \left( g_{\mu\rho} \{\gamma_\nu, \gamma_\sigma\} + g_{\nu\rho} \{\gamma_\mu, \gamma_\sigma\} + g_{\mu\sigma} \{\gamma_\nu, \gamma_\rho\} + g_{\nu\sigma} \{\gamma_\mu, \gamma_\rho\} \right) \\
&= i(g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho})
\end{aligned} \tag{1.80}$$

である。つまり、

$$\boxed{
\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= i(g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}) \text{ with } J_{\mu\nu} = J_{\nu\mu} \ (\mu, \nu, \rho, \sigma = 1, 2) \\
g_{\mu\nu} (= -g_{\nu\mu}) &= \varepsilon_{\mu\nu} \ (\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1)
\end{aligned}
} \tag{1.81}$$

を得る。この交換関係を満たすとき、

●  $J_{\mu\nu}$  は  $Sp(2n, \mathbf{R})$  ( $n=1$  にあたる) の生成子(generator) : 総数は  $3=2nH_2=n(2n+1)$  for  $n=1$  になる。生成・消滅演算子を用いて

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{1}{2} \{\gamma_1, \gamma_1\} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger}{2} = \hat{N} + \frac{\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2} \\
J_{22} &= \frac{1}{2} \{\gamma_2, \gamma_2\} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}} \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}} = -\frac{\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger}{2} = \hat{N} - \frac{\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2} \\
J_{12} &= \frac{1}{2} \{\gamma_1, \gamma_2\} = \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}} + \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2i}} \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2i}
\end{aligned} \tag{1.82}$$

より、交換関係を使用すれば

$$\begin{aligned}
\odot [J_{12}, J_{11}] &= \left[ \frac{\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2i}, \hat{N} + \frac{\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2} \right] = \frac{1}{2i} [\hat{N}, \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}] - \frac{1}{4i} 2 [\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger, \hat{a}\hat{a}] \\
&= -\frac{1}{2} i (2\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - (-2\hat{a}\hat{a})) + \frac{1}{2} i (-2) (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) = -i (\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}) - i (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) \\
&= -2i \left( \hat{N} + \frac{\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2} \right) = -2iJ_{11} \\
\odot [J_{12}, J_{22}] &= \left[ \frac{\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2i}, \hat{N} - \frac{\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2} \right] = \frac{1}{2i} [\hat{N}, \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}] + \frac{1}{4i} 2 [\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger, \hat{a}\hat{a}] \\
&= -\frac{1}{2} i (2\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger - (-2\hat{a}\hat{a})) - \frac{1}{2} i (-2) (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) = -i (\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}) + i (\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger) \\
&= 2i \left( \hat{N} - \frac{\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2} \right) = 2iJ_{22} \\
\odot [J_{11}, J_{22}] &= \left[ \hat{N} + \frac{\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2}, \hat{N} - \frac{\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2} \right] = 2 \left[ \hat{N}, -\frac{\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2} \right] = -((-2\hat{a}\hat{a}) + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger) \\
&= 4i \frac{\hat{a}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger}{2i} = 4iJ_{12}
\end{aligned} \tag{1.83}$$

がわかる。一方、(1.81)を用いると、

$$\begin{cases} [J_{12}, J_{11}] = i(g_{11}J_{21} + g_{21}J_{11} + g_{11}J_{21} + g_{21}J_{11}) = -2iJ_{11} \\ [J_{12}, J_{22}] = i(g_{12}J_{22} + g_{22}J_{12} + g_{12}J_{22} + g_{22}J_{12}) = 2iJ_{22} \\ [J_{11}, J_{22}] = i(g_{12}J_{12} + g_{12}J_{12} + g_{12}J_{12} + g_{12}J_{12}) = 4iJ_{12} \end{cases} \quad (1.84)$$

を得て同じ結果を導き、(1.81)を再現する。