

第十一章 繰り込み群

無限大の繰り込み

繰り込み条件として、質量や運動量に特別な値を用いている。つまり

- $\Sigma(\not{p} = mc) = 0$ & $\left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p}=mc} = 0$ については・・・ $\not{p} = mc$ (質量という特別な値)
- $\Pi(p^2 = 0) = 0$ については・・・ $p^2 = 0$ (質量 = 0 という特別な値)
- $\Gamma_\mu(q = 0) = 0$ ($q = p_2 - p_1$) については・・・ $q = 0$ (移行運動量 = 0 という特別な値)

である。この特別な値を

- 繰り込み点

と呼ぶ。これらは、量子効果に現れる無限大を決める再定義操作 (繰り込み) として導入された。

また、無限大を取り除いた後の理論で「有限量の繰り込み」を行う事もできる。これら繰り込み操作は、

- 人為的な物であり、物理には無関係のはず

である。このことは数学的に

- 繰り込み群方程式 (renormalization group equation)

として表現される。

例として、

- 光子の自己エネルギー

について考えてみる。光子の自己エネルギーは、2 次の量子効果では、(8.94)より

$$i \frac{\Pi_{\mu\nu}(p)}{\hbar^3 c \mu_0} = \text{Diagram: a wavy line with momentum } p \text{ entering from the left, a shaded circle labeled } \text{PI} \text{ in the middle, and a wavy line with momentum } p \text{ exiting to the right.}$$

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{i(\not{k} + \not{p} + mc)}{(k+p)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k} + mc)}{k^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\nu) \right\}$$

$$= (p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) i\Pi(p)$$

$$i\Pi(p) = \frac{i\alpha_{em}}{3\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma \right) + i\Pi_R(p) \tag{11.1}$$

$$i\Pi_R(p) = -\frac{2i\alpha_{em}}{\pi} \int_0^1 dx (1-x) x \ln \left[m^2 c^2 + (1-x)x(-p^2) \right]$$

と計算できる。繰り込みは、 $p^2 = 0$ の繰り込み点でなされて

$$Z_3 = \frac{1}{1 + \Pi(0)} \tag{11.2}$$

で与えられる。この点を、 $p^2 = 0$ から

$$p^2 = -\mu^2 < 0 \tag{11.3}$$

に変えて繰り込みをする。ここで、

- 繰り込みパラメーター μ は任意

であることに注意する。また、 $p^2 < 0$ に制限しているのは、(11.1) の被積分関数の \ln 内が、

$$m^2 c^2 + (1-x)x(-p^2) > 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

である事による。実際には、 $f(x) = m^2 c^2 + (1-x)x(-p^2)$ は

$$p^2 < 4m^2 c^2$$

の時に $f(x) > 0$ である。この条件は、

- 光子が消滅して、電子・陽電子生成を行わない条件になっている。 (11.4)

問題 1 : (11.4) の理由を述べよ

逆に、

- $p^2 > 4m^2 c^2$ の領域では、光子が消滅して、電子・陽電子生成されることになり、この効果を $\Pi^{\mu\nu}(p)$ に取り込む必要がある。¹ $p^2 < 0$ 求めた結果を

- 解析接続 (【例】 $\ln(-p^2) = \ln(p^2) + i\pi$) (11.5)

する (問題 2)。

問題 2 : $\ln(-p^2) = \ln(p^2) + i\pi$ を導け

その帰結として、

- $p^2 > 4m^2 c^2$ の領域では、 $\Pi^{\mu\nu}(p)$ は複素数になることに注意する。

$p^2 = -\mu^2 < 0$ での繰り込みも、2 次の量子効果の $\Pi^{\mu\nu}(p)$ を用いて、 Z_3 は、

$$Z_3 = \frac{1}{1 + \Pi(-\mu^2)} \quad (11.6)$$

であり、従って

$$Z_3^{-1} = 1 + \frac{\alpha_{em}}{3\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma \right) - \frac{2\alpha_{em}}{\pi} \int_0^1 dx (1-x)x \ln[m^2 c^2 + (1-x)x\mu^2] \quad (11.7)$$

である。ここで、繰り込み点で光子の波動関数の繰り込みを強調するため、 Z_3 を μ^2 の関数

¹ 従って、電子・陽電子生成の影響以外にも、陽子・反陽子生成など、光子のエネルギーが転化して生成可能なあらゆる粒子の生成の影響を考慮することになる。

$$Z_3 = Z_3(\mu^2) \quad (11.8)$$

として表わす。ここで、電荷は

$$e_B \left(= \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} e \right) = Z_3^{-1/2} e \quad (11.9)$$

で表わされる繰り込みをうけるので、

- 繰り込まれた電荷も μ^2 に依存

する。繰り込まれた電荷を $e(\mu^2)$ とすると、

$$e_B = Z_3^{-1/2}(\mu^2) e(\mu^2) \quad (11.10)$$

である。 $Z_3(\mu^2)$ は、光子の伝搬関数(10.59)や(10.60)の

$$\tilde{D}_{F\mu\nu}(p) = \left(\frac{-G_{\mu\nu}}{1 + Z_3(\Pi(p^2) - \Pi(0))} + a \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{i\hbar^3 c \mu_0}{p^2 + i\varepsilon} \quad (11.11)$$

$$Z_3 = \frac{1}{1 + \Pi(0)}$$

を用いて、無限大の繰り込み点 $p^2 = 0$ から $p^2 = -\mu^2$ にする。つまり

$$\tilde{D}_{F\mu\nu}(p, \mu^2) = \left(\frac{-G_{\mu\nu}}{1 + Z_3(\mu^2)(\Pi(p^2) - \Pi(-\mu^2))} + a_0 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{i\hbar^3 c \mu_0}{p^2 + i\varepsilon} \quad (11.12)$$

$$Z_3(\mu^2) = \frac{1}{1 + \Pi(-\mu^2)}$$

である。以降の使用のため

$$\tilde{D}_{F\mu\nu}(p, \mu^2) = \frac{-G_{\mu\nu}}{1 + \tilde{\Pi}(p^2, \mu^2)} \frac{i\hbar^3 c \mu_0}{p^2 + i\varepsilon} + a_0 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \frac{i\hbar^3 c \mu_0}{p^2 + i\varepsilon} \quad (11.13)$$

$$\tilde{\Pi}(p^2, \mu^2) = Z_3(\mu^2)(\Pi(p^2) - \Pi(-\mu^2))$$

$$Z_3(\mu^2) = \frac{1}{1 + \Pi(-\mu^2)}$$

と表記する。

有限の繰り込みと繰り込み群

さて、有限繰り込み開始点として μ_0 を用いる。(11.10)は

$$e_B = Z_3^{-1/2}(\mu_0^2) e(\mu_0^2) \quad (11.14)$$

の関係になる。以降、混乱を避けるために、(11.11)などに現れる真空の透磁率 μ_0 を

- 透磁率 $\frac{1}{c^2 \varepsilon_0} (= \mu_0)$

と表わす。次に、

- (無限大が) 繰り込まれた電荷 $e(\mu_0^2)$ に対して、更に**有限を繰り込み**

をする。このとき、有限繰り込みは、出発点を e_b から $p^2 = -\mu_0^2$ で繰り込まれた電荷 $e(\mu_0^2)$ を元にして、電荷を測る基準を $p^2 = -\mu^2$ や $p^2 = -\lambda^2$ にすることができるが、元の電荷 $e(\mu_0^2)$ に対しても (11.14) と同様の関係式が成立し、

$$e(\mu_0^2) = Z_3^{-1/2}(\mu^2, \mu_0^2) e(\mu^2) = Z_3^{-1/2}(\lambda^2, \mu_0^2) e(\lambda^2) = \dots \quad (11.15)$$

である。ここで、

- μ_0^2 からの繰り込みを強調するため $Z_3(\mu^2)$ の代わりに $Z_3(\mu^2, \mu_0^2)$

とした。次に、 $Z_3(\mu^2, \mu_0^2)$ と $Z_3(\lambda^2, \mu_0^2)$ を求めるため、有限化された光子の伝搬関数 $\tilde{D}_{F\mu\nu}(p, \mu_0^2)$ を元にして、

- 有限値の繰り込み

を行う。今度は、

- $\Pi(p^2)$ の代わりに $\tilde{\Pi}(p^2, \mu_0^2)$ を用いる

ので、繰り込み点 $p^2 = -\mu^2$ では、(11.13) を参考にして

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{F\mu\nu}(p, \mu^2) &= \frac{-G_{\mu\nu}}{1 + \tilde{\Pi}(p^2, \mu^2)} \frac{\hbar^3}{c\epsilon_0} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} + a_0 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \frac{\hbar^3}{c\epsilon_0} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \\ \tilde{\Pi}(p^2, \mu^2) &= Z_3(\mu^2, \mu_0^2) (\tilde{\Pi}(p^2, \mu_0^2) - \tilde{\Pi}(-\mu^2, \mu_0^2)) \end{aligned} \quad (11.16)$$

$$Z_3(\mu^2, \mu_0^2) = \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}(-\mu^2, \mu_0^2)} = \frac{1}{1 + Z_3(\mu_0^2) (\Pi(-\mu^2) - \Pi(-\mu_0^2))}$$

と表わすことになる。また、異なる繰り込み点 $p^2 = -\lambda^2$ では、

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{F\mu\nu}(p, \lambda^2) &= \frac{-G_{\mu\nu}}{1 + \tilde{\Pi}(p^2, \lambda^2)} \frac{\hbar^3}{c\epsilon_0} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} + a_0 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \frac{\hbar^3}{c\epsilon_0} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \\ \tilde{\Pi}(p^2, \lambda^2) &= Z_3(\lambda^2, \mu_0^2) (\tilde{\Pi}(p^2, \mu_0^2) - \tilde{\Pi}(-\lambda^2, \mu_0^2)) \end{aligned} \quad (11.17)$$

$$Z_3(\lambda^2, \mu_0^2) = \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}(-\lambda^2, \mu_0^2)} = \frac{1}{1 + Z_3(\mu_0^2) (\Pi(-\lambda^2) - \Pi(-\mu_0^2))}$$

になることは明らかである。従って、

$$Z_3(\mu^2, \mu_0^2) = \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}(-\mu^2, \mu_0^2)} = \frac{1}{1 + Z_3(\mu_0^2) (\Pi(-\mu^2) - \Pi(-\mu_0^2))} \quad (11.18)$$

$$Z_3(\lambda^2, \mu_0^2) = \frac{1}{1 + \tilde{\Pi}(-\lambda^2, \mu_0^2)} = \frac{1}{1 + Z_3(\mu_0^2) (\Pi(-\lambda^2) - \Pi(-\mu_0^2))}$$

で与えられる。ここで、 $\tilde{\Pi}(p^2, \mu^2)$ は、(11.16) より

$$\tilde{\Pi}(p^2, \mu^2) = Z_3(\mu^2, \mu_0^2) (\tilde{\Pi}(p^2, \mu_0^2) - \tilde{\Pi}(-\mu^2, \mu_0^2)) \quad (11.19)$$

なので、(11.13)より、

$$\tilde{\Pi}(p^2, \mu^2) = Z_3(\mu^2, \mu_0^2) Z_3(\mu_0^2) (\Pi(p^2) - \Pi(-\mu^2)) \quad (11.20)$$

である。ところで、無限大を $-p^2 = \mu_0^2$ の代わりに $-p^2 = \mu^2$ で繰り込んでみると

$$e_B = Z_3^{-1/2}(\mu^2) e(\mu^2) \quad (11.21)$$

である。更に、

- 無限大を $-p^2 = \mu^2$ で繰り込んだ 2 つの式(11.13)の $\tilde{\Pi}(p^2, \mu^2)$ と(11.20)は、繰り込み可能理論なら同じ

なので

$$Z_3(\mu^2) = Z_3(\mu^2, \mu_0^2) Z_3(\mu_0^2) \quad (11.22)$$

が成立する。従って、

$$\boxed{Z_3(\mu^2, \mu_0^2) = \frac{Z_3(\mu^2)}{Z_3(\mu_0^2)}} \quad (11.23)$$

(11.23)より有限繰り込みに対して

$$Z_3(\lambda'^2, \lambda^2) Z_3(\lambda^2, \mu^2) = Z_3(\lambda'^2, \mu^2) \quad (11.24)$$

が成立することがわかる。ここで、

- Z_3 が無次元量

であることから

$$\bullet \quad Z_3(\lambda^2, \mu^2) = \frac{Z_3(\lambda^2)}{Z_3(\mu^2)} \text{ は } \frac{\lambda^2}{\mu^2} \text{ の関数}$$

がわかるので

$$Z_3(\lambda^2, \mu^2) = Z_3\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) \quad (11.25)$$

と表せる。従って

$$\boxed{Z_3\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) Z_3\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}\right) = Z_3\left(\frac{\lambda'^2}{\mu^2}\right)} \quad (11.26)$$

である。

さて、 $e(\mu_0^2)$ に対応して運動量に依存する電荷を \bar{g} :

$$\bar{g}(-p^2, \mu^2, g_\mu) \quad (11.27)$$

と表す。(11.15)は、 $e(\mu_0^2)$ を g_μ で表わし

$$g_\mu = e(\mu_0^2) \quad (11.28)$$

$$\bar{g}(\mu^2, \mu^2, g_\mu) = g_\mu \quad (11.29)$$

と置き換える。一方、 $-p^2 = \lambda^2$ で繰り込んだ値は、 g_λ で表わし

$$\bar{g}(\lambda^2, \mu^2, g_\mu) = g_\lambda (\neq g_\mu) \quad (11.30)$$

である。これは、 $-p^2 = \mu^2$ を基準にした $-p^2 = \lambda^2$ での繰り込みなので、(11.15)より

$$g_\mu = Z_3^{-1/2} \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right) g_\lambda \Rightarrow \boxed{g_\lambda = Z_3^{1/2} \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right) g_\mu} \quad (11.31)$$

である。更に、(11.15)より

$$\bar{g}(-p^2, \mu^2, g_\mu) = \bar{g}(-p^2, \lambda^2, g_\lambda) \quad (11.32)$$

を得る。ところで

- 電荷 \bar{g} から作られる $\frac{\bar{g}^2}{\varepsilon_0 \hbar c}$ は無次元であるので、 $\frac{\bar{g}^2}{\varepsilon_0 \hbar c}$ は、無次元量の関数であることに気がつく、

$$\bar{g}(-p^2, \mu^2, g_\mu) = \bar{g}\left(\frac{-p^2}{\mu^2}, g_\mu\right) \quad (11.33)$$

と表せる事がわかる。

次に、物理量を $\Gamma(-p^2, \mu^2, g_\mu)$ とするとき、有限の繰り込みは、 $-p^2 = \lambda^2 (\neq \mu^2)$ で行い、 Γ への繰り込みの効果を、定数 Z を用い、

$$\Gamma(-p^2, \mu^2, g_\mu) = Z \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right) \Gamma(-p^2, \lambda^2, g_\lambda) \quad (11.34)$$

と定義する。ここで、(11.34)を続けて 2 回実行すると

$$\begin{aligned} \Gamma(-p^2, \mu^2, g_\mu) &= Z \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right) \Gamma(-p^2, \lambda^2, g_\lambda) \quad \left(\bar{g}(\lambda^2, \mu^2, g(\mu^2)) = g_\lambda \right) \\ \Gamma(-p^2, \lambda^2, g_\lambda) &= Z \left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} \right) \Gamma(-p^2, \lambda'^2, g_{\lambda'}) \quad \left(\bar{g}(\lambda'^2, \lambda^2, g(\lambda^2)) = g_{\lambda'} \right) \end{aligned} \quad (11.35)$$

である。即ち、

$$\Gamma(-p^2, \mu^2, g_\mu) = Z\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) Z\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}\right) \Gamma(-p^2, \lambda'^2, g_{\lambda'}) \quad (11.36)$$

である。一方、(11.34)を 1 回実行すると

$$\Gamma(-p^2, \mu^2, g_\mu) = Z\left(\frac{\lambda'^2}{\mu^2}\right) \Gamma(-p^2, \lambda'^2, g_{\lambda'}) \quad (\bar{g}(\lambda'^2, \lambda^2, g(\lambda^2)) = g_{\lambda'}) \quad (11.37)$$

である。(11.36)と(11.37)が同じ結果を与えるので、(11.26)と同様の関係式

$$\boxed{Z\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) Z\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}\right) = Z\left(\frac{\lambda'^2}{\mu^2}\right)} \quad (11.38)$$

を得る ((11.26)も同様)。 $Z\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right)$ は、群を形成することがわかる。つまり、(11.38)から

- 単位元 : $Z(1) = 1$
- 逆元 : $Z\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) Z\left(\frac{\mu^2}{\lambda^2}\right) = 1$
- 可換則 : $Z\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) Z\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}\right) = Z\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}\right) Z\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right)$
- 結合則 : $\left[Z\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) Z\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}\right) \right] Z\left(\frac{\lambda''^2}{\lambda'^2}\right) = Z\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) \left[Z\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}\right) Z\left(\frac{\lambda''^2}{\lambda'^2}\right) \right]$

と群の性質を満たしている。この群を

- 繰り込み群 (renormalization group)

という。

繰り込み群方程式

次の変数 :

$$\boxed{x = \frac{-p^2}{\mu^2}, t = \frac{\lambda}{\mu}} \quad (11.39)$$

を用いて、(11.33)を x で書き換えて

$$\bar{g}(x, g_\mu) = \bar{g}\left(\frac{-p^2}{\mu^2}, g_\mu\right) = \bar{g}(-p^2, \mu^2, g_\mu) \quad (11.40)$$

であるので、エラー! 参照元が見つかりません。 $g_\mu = \bar{g}(\mu^2, \mu^2, g_\mu)$ と (11.30) $g_\lambda = \bar{g}(\lambda^2, \lambda^2, g_\lambda)$ は、

更に、 t を用いて

$$g_\mu = \bar{g}(1, g_\mu), \quad g_\lambda = \bar{g}(t^2, g_\mu) \quad (11.41)$$

と表わせる。また、(11.34)は

$$\Gamma(-p^2, \mu^2, g_\mu) = Z \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right) \Gamma(-p^2, \lambda^2, g_\lambda) \Rightarrow \Gamma(x\mu^2, \mu^2, g_\lambda) = Z(t^2) \Gamma(-p^2, t^2\mu^2, g_\lambda) \quad (11.42)$$

と書き換えられる。(11.40)と(11.42)より

$$\boxed{\bar{g}(x, g_\mu) = \bar{g}\left(\frac{x}{t^2}, g_\lambda\right) \text{ with } g_\lambda = \bar{g}(1, g_\lambda) = \bar{g}(t^2, g_\mu)} \quad (11.43)$$

$$\boxed{\Gamma(-p^2, \mu^2, g_\lambda) = \Gamma(x\mu^2, \mu^2, g_\lambda) = Z(t^2) \Gamma(-p^2, t^2\mu^2, g_\lambda)} \quad (11.44)$$

である。

さて、(11.44)の $\Gamma(x\mu^2, \mu^2, g_\lambda)$ は t によらないので、 $d\Gamma(x\mu^2, \mu^2, g_\lambda)/dt = 0$ 。故に、(11.44)より

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left[Z(t^2) \Gamma(-p^2, t^2\mu^2, g_\lambda) \right] = \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right) \Gamma(-p^2, t^2\mu^2, g_\lambda) + Z \frac{d}{dt} \Gamma(-p^2, t^2\mu^2, g_\lambda) \\ &= \left(Z \frac{\partial \ln Z}{\partial t} \right) \Gamma(-p^2, t^2\mu^2, g_\lambda) + Z \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial g_\lambda}{\partial t} \frac{\partial}{\partial g_\lambda} \right) \Gamma(-p^2, t^2\mu^2, g_\lambda) \\ &= Z \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial g_\lambda}{\partial t} \frac{\partial}{\partial g_\lambda} \right) \Gamma(-p^2, t^2\mu^2, g_\lambda) \end{aligned} \quad (11.45)$$

を得る。ここで、 $t=1$ ($\lambda = \mu, g_\lambda = g_\mu$) と置くと、 $\Gamma(-p^2, \mu^2, g_\mu)$ への条件式になり

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(-p^2, t^2\mu^2, g_\lambda) \right|_{t=1} + \left(\left. \frac{\partial \ln Z}{\partial t} \right|_{t=1} + \left. \frac{\partial g_\lambda}{\partial t} \right|_{t=1} \frac{\partial}{\partial g_\lambda} \right) \Gamma(-p^2, \mu^2, g_\lambda) = 0 \quad (11.46)$$

を得る。ここで、

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(-p^2, t^2\mu^2, g_\lambda) \right|_{t=1} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma(-p^2, \mu^2, g_\lambda) \quad (11.47)$$

問題 3 : (11.47)を導け

及び $g_\lambda = \bar{g}(t^2, g_\mu)$ に注意すると、最終的に

● 繰り込み群方程式 (renormalization group equation)

と呼ばれる方程式：

$$\boxed{\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_\mu) \frac{\partial}{\partial g_\mu} + \gamma(g_\mu) \right) \Gamma(-p^2, \mu^2, g_\lambda) = 0} \quad \begin{cases} \beta(g_\mu) = \left. \frac{\partial \bar{g}(t^2, g_\mu)}{\partial t} \right|_{t=1} \\ \gamma(g_\mu) = \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial t} \right|_{t=1} \end{cases} \quad (11.48)$$

を得る。ここで

- $\beta(g_\mu)$ は繰り込み群方程式の **ベータ関数**

と呼ばれている。同様に、 $\bar{g}(x, g_\mu)$ について実行すると、(11.43) より

- (11.43) の両辺を t で微分し $t=1$ を用いる

と

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_\mu) \frac{\partial}{\partial g_\mu} \right) \bar{g}(x, g_\mu) = 0 \quad (11.49)$$

問題 4 : (11.49) を導け

を得る。

繰り込みポイントの変更で「繰り込み方程式」が得られたが、それでは、運動量の増大による「結合定数」の変化を見てみよう。今度は、

- (11.43) の両辺を x で微分し、 $x=t^2$ ($-p^2 = \lambda^2$) を用いる

と、

$$Q \frac{d}{dQ} \bar{g}(Q^2, \mu^2, g_\mu) = \beta(\bar{g}(Q^2, \mu^2, g_\mu)) \quad (Q^2 = -p^2, Q \equiv \sqrt{Q^2}) \quad (11.50)$$

問題 5 : (11.50) を導け

と書き換えることができる。これが結合定数のエネルギー依存性を決める基礎方程式になる。

(11.50) は形式的に解く事ができ、

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{d\bar{g}}{\beta(\bar{g})} \quad (11.51)$$

より

$$\ln Q = \int \frac{d\bar{g}}{\beta(\bar{g})} + C \quad (11.52)$$

なので、初期条件を

$$Q = \mu \quad (11.53)$$

で設定すれば $\bar{g}(\mu^2, \mu^2, g_\mu) = g_\mu$ なので

$$\ln \frac{Q}{\mu} = \int_{g_\mu}^{\bar{g}(Q^2, \mu^2, g_\mu)} \frac{d\bar{g}}{\beta(\bar{g})} \quad (11.54)$$

を得る。

(11.54) を具体的に解くために、

$$\beta(\bar{g}) = b_0 \bar{g}^n \quad (11.55)$$

と仮定してみる。(11.55)から

$$\frac{1}{\bar{g}^{n-1}(Q^2, \mu^2, g_\mu)} = \frac{1}{\bar{g}^{n-1}(\mu^2, \mu^2, g_\mu)} - (n-1)b_0 \ln \frac{Q}{\mu} \quad (n \neq 1)$$

$$\bar{g}(Q^2, \mu^2, g_\mu) = \bar{g}(\mu^2, \mu^2, g_\mu) \left(\frac{Q}{\mu} \right)^{b_0} \quad (n=1)$$
(11.56)

問題 6 : (11.56)を導け

を得る。

QED に於ける結合定数

QED における「ベータ関数」を求めてみる。 g の代わりに e とする。(11.30)と(11.31)より

$$e_\lambda = \bar{e}(\lambda^2, \mu^2, e_\mu) = \bar{e}(t, e_\mu)$$

$$e_\lambda = Z_3^{1/2}(t^2) e_\mu$$
(11.57)

を用いて、(11.31)より

$$\beta(e_\mu) = \left. \frac{\partial \bar{e}(t^2, e_\mu)}{\partial t} \right|_{t=1} = \left. \frac{\partial e_\lambda}{\partial t} \right|_{t=1} = \left. \frac{\partial (Z_3^{1/2}(t^2) e_\mu)}{\partial t} \right|_{t=1} = \left. \frac{\partial Z_3^{1/2}(t^2)}{\partial t} \right|_{t=1} e_\mu$$
(11.58)

として求められるので

- $\beta(e_\mu)$ の計算には、 $Z_3(t^2)$ が必要

になる。ここで、(11.23)と(11.25)より

$$Z_3(t^2) = Z\left(\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right) = Z_3(\lambda^2, \mu^2) = \frac{Z_3(\lambda^2)}{Z_3(\mu^2)} = \frac{1 + \Pi(-\mu^2)}{1 + \Pi(-\lambda^2)}$$
(11.59)

である。2 次の量子効果の結果を用いると、

$$\Pi(p^2) = \frac{\alpha_{em}}{3\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma \right) + \Pi_R(p^2)$$
(11.60)

$$\Pi_R(p^2) = -\frac{2\alpha_{em}}{\pi} \int_0^1 dx (1-x)x \ln \left[m^2 c^2 + (1-x)x(-p^2) \right]$$

である。ここで、(11.59)に

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$
(11.61)

を用いると、

$$Z_3(\lambda^2, \mu^2) = \frac{1 + \Pi(-\mu^2)}{1 + \Pi(-\lambda^2)} = \left[1 + \Pi(-\mu^2) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\Pi(-\lambda^2) \right)^n$$

$$= \left[1 + \Pi(-\mu^2) \right] \left[1 - \Pi(-\lambda^2) + \Pi^2(-\lambda^2) - \Pi^3(-\lambda^2) + \dots \right]$$
(11.62)

更に、

- 2 次の量子効果の結果は 2 次の量子効果までしか正しくない事に注意すると

$$\begin{aligned}
Z_3(\lambda^2, \mu^2) &= 1 - \overset{\text{2次の量子効果}}{\Pi(-\lambda^2)} + \overset{\text{4次の量子効果}}{\cancel{\Pi^2(-\lambda^2)}} + \overset{\text{6次の量子効果}}{\cancel{\Pi^3(-\lambda^2)}} + \dots \\
&+ \overset{\text{2次の量子効果}}{\Pi(-\mu^2)} - \overset{\text{4次の量子効果}}{\cancel{\Pi(-\mu^2)\Pi(-\lambda^2)}} + \overset{\text{6次の量子効果}}{\cancel{\Pi(-\mu^2)\Pi^2(-\lambda^2)}} - \overset{\text{8次の量子効果}}{\cancel{\Pi(-\mu^2)\Pi^3(-\lambda^2)}} + \dots \quad (11.63) \\
&= 1 - \overset{\text{2次の量子効果}}{\Pi(-\lambda^2)} + \overset{\text{2次の量子効果}}{\Pi(-\mu^2)}
\end{aligned}$$

より、

$$Z_3(\lambda^2, \mu^2) = 1 + \Pi(-\mu^2) - \Pi(-\lambda^2) \quad (11.64)$$

である。(11.60)を用いて、

$$Z_3(t^2) = 1 - \frac{2\alpha_{\mu em}}{\pi} \int_0^1 dx (1-x)x \ln(m^2 c^2 + (1-x)x\mu^2) + \frac{2\alpha_{\lambda em}}{\pi} \int_0^1 dx (1-x)x \ln(m^2 c^2 + (1-x)xt^2\mu^2) \quad (11.65)$$

であるが、2 次の量子効果までが正しい結果なので、(11.57)より

$$e_\lambda = Z_3^{1/2}(t^2)e_\mu = e_\mu$$

である。従って

$$\boxed{Z_3(t^2) = 1 - \frac{2\alpha_{\mu em}}{\pi} \int_0^1 dx (1-x)x \ln\left(\frac{m^2 c^2 + (1-x)x\mu^2}{m^2 c^2 + (1-x)xt^2\mu^2}\right) \left(t = \frac{\lambda}{\mu}\right)} \quad (11.66)$$

を得る。

(11.66)を評価するため、

$$\ln(m^2 c^2 + (1-x)x(-p^2)) = \ln(-p^2) + \ln\left[\frac{m^2 c^2}{-p^2} + (1-x)x\right] \quad (11.67)$$

に注意し

$$I(-p^2) = \int_0^1 dx (1-x)x \ln[m^2 c^2 + (1-x)x(-p^2)] \quad (11.68)$$

の積分を実行する。ここに

$$Z_3(t) = 1 - \frac{2\alpha_{\mu em}}{\pi} (I(\mu^2) - I(\lambda^2)) \quad (11.69)$$

である。 x の完全平方形に留意し $x = \frac{1+z}{2}$ の変数変換を用いて

$$I(-p^2) = \frac{1}{4} \int_0^1 dz (1-z^2) \ln\left[m^2 c^2 + \frac{1}{4}(1-z^2)(-p^2)\right] \quad (11.70)$$

問題 7 : (11.70)を導け

を得るので、

$$I(-p^2) = \frac{1}{6} \ln(-p^2) + \frac{1}{4} \int_0^1 dz (1-z^2) \ln \left(\frac{m^2 c^2}{-p^2} + \frac{1-z^2}{4} \right)$$

である。更に、残りの積分に部分積分を用い

$$I(-p^2) = \frac{1}{6} \ln m^2 c^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 dz \left(z^2 - \frac{1}{3} z^4 \right) \frac{1}{4\varepsilon + 1 - z^2} \quad \left(\varepsilon = \frac{m^2 c^2}{-p^2} \right) \quad (11.71)$$

問題 8 : (11.71) を導け

を得る。また、積分の公式：

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{a+bx^2} dx &= \frac{1}{b} - \frac{a}{b} \int_0^1 \frac{1}{a+bx^2} dx \\ \int_0^1 \frac{x^4}{a+bx^2} dx &= \frac{1}{b^2} \left(\frac{1}{3} b - a \right) + \frac{a}{b^2} \int_0^1 \frac{1}{a+bx^2} dx \end{aligned} \quad (11.72)$$

問題 9 : (11.72) を導け。【ヒント】 $X = a + bx^2$ を用いて被積分関数を表わしてみると良い。

を用いる。従って、

$$\int_0^1 dz \left(z^2 - \frac{1}{3} z^4 \right) \frac{1}{a+bz^2} = \frac{8}{9b} + \frac{1}{3} \frac{a}{b^2} - \left(1 + \frac{a}{3b} \right) \frac{a}{b} \int_0^1 \frac{1}{a+bz^2} dz \quad (11.73)$$

なので、

$$\begin{aligned} I(-p^2) &= \frac{1}{6} \ln(-p^2) + \int_0^1 dx (1-x)x \ln[\varepsilon + (1-x)x] = \frac{1}{6} \ln(-p^2) + \frac{1}{4} \int_0^1 dz (1-z^2) \ln \left[\varepsilon + \frac{1}{4}(1-z^2) \right] \\ &= \frac{1}{6} \ln(-p^2) + \frac{1}{6} \ln \varepsilon + \frac{1}{2} \int_0^1 dz \left(z^2 - \frac{1}{3} z^4 \right) \frac{1}{4\varepsilon + 1 - z^2} \\ &= \frac{1}{6} \ln m^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{8}{9b} + \frac{1}{3} \frac{a}{b^2} - \left(1 + \frac{a}{3b} \right) \frac{a}{b} \int_0^1 \frac{1}{a+bz^2} dz \right) \\ &= \frac{1}{6} \ln m^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{8}{9} + \frac{1}{3}(1+4\varepsilon) - \left(1 - \frac{1+4\varepsilon}{3} \right) \frac{1+4\varepsilon}{-1} \int_0^1 \frac{1}{a+bz^2} dz \right) \quad \left(\varepsilon = \frac{m^2}{-p^2} \right) \\ &= \frac{1}{6} \ln m^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{9} + \frac{4\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}(1-2\varepsilon)(1+4\varepsilon) \int_0^1 \frac{1}{a+bz^2} dz \right) \end{aligned} \quad (11.74)$$

がわかる。ここで、

$$\begin{aligned} (a > 0 \ \& \ b > 0 / a < 0 \ \& \ b < 0) \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{a+bz^2} dz = \frac{\theta_0}{a} = \frac{\operatorname{sgn}(a)}{|a|} \theta_0 \quad \left(\tan \theta_0 = \sqrt{\frac{|b|}{|a|}} \right) \\ (a > 0 \ \& \ b < 0 / a < 0 \ \& \ b > 0) \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{a+bz^2} dz = \frac{\operatorname{sgn}(a)}{2\sqrt{|a||b|}} \ln \left| \frac{\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}} \right| \end{aligned} \quad (11.75)$$

問題 1 0 : (11.75) の積分を求めよ。【ヒント】 ($a > 0$ & $b > 0/a < 0$ & $b < 0$) の時、
 $bz^2 = a \tan^2 \theta, 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}, d \tan \theta = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$ を用いると良い。 $a > 0$ & $b < 0/a < 0$ & $b > 0$
 の時、 $\frac{1}{(\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|z})(\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|z})} = \frac{1}{2\sqrt{|a|}} \left(\frac{1}{\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|z}} + \frac{1}{\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|z}} \right)$ を用いるとよい。

と計算される。今の場合、

$$a = 1 + 4\varepsilon, \quad b = -1 \tag{11.76}$$

なので、

$$\int_0^1 \frac{1}{a + bz^2} dz \stackrel{\substack{a=1+4\varepsilon \\ b=-1}}{=} \frac{1}{2\sqrt{1+4\varepsilon}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+4\varepsilon} + 1}{\sqrt{1+4\varepsilon} - 1} \right| = \frac{1}{2\sqrt{1+4\varepsilon}} \ln \left(\frac{\sqrt{1+4\varepsilon} + 1}{\sqrt{1+4\varepsilon} - 1} \right) \quad \left(\varepsilon = \frac{m^2}{-p^2} \right) \tag{11.77}$$

である。従って、(11.74)は

$$I(-p^2) = \frac{1}{6} \left(\ln m^2 c^2 - \frac{5}{3} + 4 \frac{m^2 c^2}{-p^2} + \left(1 - \frac{2m^2 c^2}{-p^2} \right) \sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{-p^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{-p^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{-p^2}} - 1} \right) \right) \tag{11.78}$$

問題 1 1 : (11.78) を求めよ

問題 1 2 : (11.70) より $I(0) = \frac{1}{6} \ln m^2 c^2$ である。(11.78) より $I(0)$ を計算して $I(0) = \frac{1}{6} \ln m^2 c^2$ に成ることを示せ。【ヒント】 $\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{-p^2}}$
 $= \sqrt{\frac{4m^2 c^2}{-p^2}} \sqrt{1 + \frac{-p^2}{4m^2 c^2}} = \sqrt{\frac{4m^2 c^2}{-p^2}} \left(1 - \frac{p^2}{8m^2 c^2} \right)$ (as $p^2 \rightarrow 0$) を用いると良

である。以上から、

$$\int_0^1 dx (1-x)x \ln \left[m^2 c^2 + (1-x)x(-p^2) \right] = \frac{1}{6} \left(\ln m^2 c^2 - \frac{5}{3} + 4 \frac{m^2 c^2}{-p^2} + \left(1 - \frac{2m^2 c^2}{-p^2} \right) \sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{-p^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{-p^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{-p^2}} - 1} \right) \right) \tag{11.79}$$

が得られた。

(11.78) を用いると、ベータ関数を計算できる。(11.58) と (11.69) より

$$\beta(e_\mu) = \left. \frac{\partial Z_3^{1/2}(t^2)}{\partial t} \right|_{t=1} e_\mu, \quad Z_3(t^2) = 1 - \frac{2\alpha_{\mu em}}{\pi} (I(\mu^2) - I(t^2\mu^2)) \quad (11.80)$$

なので、 $Z_3^{1/2}(t^2)$ は、2 次の量子効果まで正しいので

$$Z_3^{1/2}(t^2) = \sqrt{1 - \frac{2\alpha_{\mu em}}{\pi} (I(\mu^2) - I(t^2\mu^2))} = 1 - \frac{\alpha_{\mu em}}{\pi} (I(\mu^2) - I(t^2\mu^2)) + \times \quad (11.81)$$

より

$$\frac{\partial Z_3^{1/2}(t^2)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(1 - \frac{\alpha_{\mu em}}{\pi} (I(\mu^2) - I(t^2\mu^2)) \right) = \frac{\alpha_{\mu em}}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} I(t^2\mu^2) \quad (11.82)$$

である。(11.78)より

$$I(t^2\mu^2) = \frac{1}{6} \left(\ln m^2 c^2 - \frac{5}{3} + 4 \frac{m^2 c^2}{t^2 \mu^2} + \left(1 - \frac{2m^2 c^2}{t^2 \mu^2} \right) \sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{t^2 \mu^2}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{t^2 \mu^2} + 1}}{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{t^2 \mu^2} - 1}} \right) \right) \quad (11.83)$$

なので

$$\frac{\partial Z_3^{1/2}(t^2)}{\partial t} = \frac{\alpha_{\mu em}}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} I(t^2\mu^2) = \frac{\alpha_{\mu em}}{\pi} \frac{2}{t} \left(\frac{1}{6} - \frac{m^2 c^2}{t^2 \mu^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{t^2 \mu^2}}} \left(\frac{m^2 c^2}{t^2 \mu^2} \right)^2 \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{t^2 \mu^2} + 1}}{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{t^2 \mu^2} - 1}} \right) \right) \quad (11.84)$$

問題 1 3 : (11.84)を求めよ

である。 $t=1$ にして

$$\left. \frac{\partial Z_3^{1/2}(t^2)}{\partial t} \right|_{t=1} = \frac{2\alpha_{\mu em}}{\pi} \left(\frac{1}{6} - \frac{m^2 c^2}{\mu^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{\mu^2}}} \left(\frac{m^2 c^2}{\mu^2} \right)^2 \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{\mu^2} + 1}}{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{\mu^2} - 1}} \right) \right) \quad (11.85)$$

を得る。以上から、(11.80)より

$$\beta(e_\mu) = \frac{e_\mu^3}{2\pi^2 \varepsilon_0 \hbar c} \left(\frac{1}{6} - \frac{m^2 c^2}{\mu^2} + \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{\mu^2}}} \left(\frac{m^2 c^2}{\mu^2} \right)^2 \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{\mu^2} + 1}}{\sqrt{1 + \frac{4m^2 c^2}{\mu^2} - 1}} \right) \right) \quad (11.86)$$

がわかる。

標準模型に於ける結合定数

式(11.86)で得られた QED の結果は、標準模型

- QEWD (Quantum Electroweak Dynamics) : $SU(2)_L \times U(1)_Y$
- QCD (Quantum Chromo Dynamics) : $SU(3)_c$

に現れるフェルミオン (クォーク・レプトン) にも適用できる。QED と標準模型では、

- QED では、フェルミオン (電子等) のループには、左巻き (L) と右巻き (R) の状態が同時に現れている
- 標準模型では、特に $SU(2)_L$ に関してフェルミオン (電子やクォーク等) のループには、左巻き (L) しか現れない
- 標準模型では、フェルミオン (電子やクォーク等) の質量はゼロである。

という根本的な違いがある。もともと、 Z_3 は、 $\Pi^{\mu\nu}(q)$:

$$(QED): i\Pi^{\mu\nu}(q) = -\frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{i(\not{k} + \not{q} + mc)}{(k+q)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k} + mc)}{k^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\nu) \right\} \quad (11.87)$$

の寄与であった。これは、(10.8)で与えられる $S_F(\not{k})$ を用いて、

$$(QED): i\Pi^{\mu\nu}(q) = -\frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{S_F(\not{k} + \not{q})}{\hbar^2 c} (ie\gamma^\mu) \frac{S_F(\not{k})}{\hbar^2 c} (ie\gamma^\nu) \right\} \quad (11.88)$$

と表わせる。更に、 $S_F(\not{k})$ の定義は、(6.55)より

$$\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\overline{\psi}_\beta(y))|0\rangle = \frac{i\hbar^2 c}{(2\pi\hbar)^4} \int \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} d^4 p = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} S_{F\alpha\beta}(\not{p}) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \quad (11.89)$$

であった。ここで、左巻き (L) のみの寄与を調べるため、

$$\psi(x) = \frac{1-\gamma_5}{2} \psi(x) + \frac{1+\gamma_5}{2} \psi(x) \equiv \psi_L(x) + \psi_R(x) \quad (11.90)$$

より、 $\psi(x)$ の代わりに、 $\psi_L(x)$ を用いることになる。左巻き (L) のみの寄与がわかれば、

- 右巻き (R) のみの寄与は、左巻き (L) の寄与で $\gamma_5 \rightarrow -\gamma_5$ で求まる (11.91)

ことに注意する。(11.90)より、

- QED には、 ψ_L と ψ_R の 2 つの寄与がある

ので、単純に $\Pi^{\mu\nu}(q:m=0)^{\psi_L\text{からの寄与}} = \Pi^{\mu\nu}(q:m=0)^{\psi_L\text{からの寄与}} + \Pi^{\mu\nu}(q:m=0)^{\psi_R\text{からの寄与}}$ と考えると

$$\Pi^{\mu\nu}(q:m=0)^{\psi_L\text{からの寄与}} = \Pi^{\mu\nu}(q:m=0)^{\psi_R\text{からの寄与}} = \frac{1}{2} \Pi^{\mu\nu}(q:m=0)^{\psi\text{からの寄与}} \quad (11.92)$$

が推測できる。ここに、 $\Pi^{\mu\nu}(q; m=0)$ は $\Pi^{\mu\nu}(q)$ において、 $m=0$ の式である。実際に、(11.92) であることを以下で確認する。

左巻き (L) のみの寄与は、伝搬関数を、

- $\langle 0|T(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y))|0\rangle$ から $\langle 0|T(\psi_{L\alpha}(x)\bar{\psi}_{L\beta}(y))|0\rangle$ にする

ことで得られ

$$\begin{aligned} S_{F\alpha\beta}^{(L)}(x-y) &\equiv \langle 0|T(\psi_{L\alpha}(x)\bar{\psi}_{L\beta}(y))|0\rangle = \langle 0|T\left(\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)_{\alpha\alpha'} \psi_{\alpha'}(x) \bar{\psi}_{L\beta'}(y) \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)_{\beta'\beta}\right)|0\rangle \\ &= \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)_{\alpha\alpha'} S_{F\alpha\beta}(x-y) \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)_{\beta'\beta} = \frac{i\hbar^2 c}{(2\pi)^4} \int \frac{\left(\frac{1-\gamma_5}{2} \not{p} \frac{1+\gamma_5}{2}\right)_{\alpha\beta}}{p^2 + i\varepsilon} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} d^4 p \\ &= \frac{i\hbar^2 c}{(2\pi)^4} \int \frac{\left(\frac{1-\gamma_5}{2} \not{p}\right)_{\alpha\beta}}{p^2 + i\varepsilon} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} d^4 p = \frac{i\hbar^2 c}{(2\pi)^4} \int \frac{\left(\not{p} \frac{1+\gamma_5}{2}\right)_{\alpha\beta}}{p^2 + i\varepsilon} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} d^4 p \end{aligned} \quad (11.93)$$

なので、

$$S_F^{(L)} = \frac{1-\gamma_5}{2} S_F(\not{p}; m=0) = S_F(\not{p}; m=0) \frac{1+\gamma_5}{2} \quad (11.94)$$

を得る。従って、

$$(L\text{のみ}) : i\Pi^{\mu\nu}(q) = -\frac{1}{\hbar c \varepsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{S_F^{(L)}(\not{k} + \not{q})}{\hbar^2 c} (ie\gamma^\mu) \frac{S_F^{(L)}(\not{k})}{\hbar^2 c} (ie\gamma^\nu) \right\} \quad (11.95)$$

である。(11.93)を用いて、

$$(L\text{のみ}) : i\Pi^{\mu\nu}(q) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\hbar c \varepsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{S_F^{(L)}(\not{k} + \not{q})}{\hbar^2 c} (ie\gamma^\mu) \frac{S_F^{(L)}(\not{k})}{\hbar^2 c} (ie\gamma^\nu) \right\} \quad (11.96)$$

問題 1 4 : (11.96)を求めよ

を得る。同様にして、右巻き (R) のみの寄与は、(11.91)より(11.96)と同じ事が分かる。以上から(11.92)証明できた。

さて、QED と標準模型では、光子 (やゲージボゾン) の結合が少し異なり、

$$\text{QED} : e\bar{\psi} Q_{em} \gamma_\mu \psi A^\mu = e\bar{\psi}_L Q_{em} \gamma_\mu \psi_L A^\mu + e\bar{\psi}_R Q_{em} \gamma_\mu \psi_R A^\mu \quad (\text{ex. } Q_{em} = -1 \text{ for the electron})$$

$$\text{QEDW} : g_L \sum_{i=1}^3 \bar{\psi}_L \frac{\tau^i}{2} \gamma_\mu \psi_L V^{(i)\mu} + g' \bar{\psi}_L \frac{Y}{2} \gamma_\mu \psi_L B^\mu \quad \left(Q_{em} = \frac{\tau^3 + Y}{2} \right)$$

$$\text{QCD} : g_c \sum_{a=1}^8 \bar{\psi} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \psi G^{(a)\mu} = g_c \sum_{a=1}^8 \bar{\psi}_L \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \psi_L G^{(a)\mu} + g_c \sum_{a=1}^8 \bar{\psi}_R \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu \psi_R G^{(a)\mu}$$

である。それぞれの $i\Pi^{\mu\nu}(q)$ への寄与は

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left(\frac{\tau^i}{2} \frac{\tau^j}{2}\right) &= \frac{1}{2} \delta^{ij} \\ \text{Tr}\left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2}\right) &= \frac{1}{2} \delta^{ab} \end{aligned} \quad (11.97)$$

である。一般的に、(11.97)は群の表現の次数によって決まる量で $SU(N)^{loc}$ のとき、

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left(\frac{\tau^i}{2} \frac{\tau^j}{2}\right) &= T(\text{基本表現}) \delta^{ij} \\ \text{Tr}\left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2}\right) &= T(\text{基本表現}) \delta^{ab} \end{aligned} \quad (11.98)$$

と表わすことができ、従って、

$$T(\text{基本表現}) = \frac{1}{2} \quad (11.99)$$

である。ヤング図を使うと他の規約表現の粒子に対しても(11.99)に対応する式があり、例えば

$$T(\square) = \frac{1}{2}, T(\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}) = \frac{N-2}{2}, T(\square\square) = \frac{N+2}{2}, T(\text{ADJ}) = N \quad (11.100)$$

である。ここで、ADJは群の随伴表現 (Adjoint representation) であり、そのメンバーの数は $N^2 - 1$ である。ちなみに、基本表現のメンバーの数は N である。特に、フェルミオンの場合、 $T(\text{Fermion})$ は、ゲージ場 \mathcal{G}^μ との相互作用はゲージ結合定数を g とすれば

$$\overline{f_L} \gamma_\mu \left(i\partial^\mu - g \sum_{a=1}^{N^2-1} T^{(a)} \mathcal{G}^{(a)\mu} \right) f_L \quad (11.101)$$

の相互作用項から、

$$\text{Tr}(T^{(a)} T^{(b)}) = \delta^{ab} T(\text{Fermion}) \quad (11.102)$$

で与えられる。従って、 $\text{Fermion} = \square = SU(2)$ の基本表現のとき、

$$\text{Tr}\left(\frac{\tau^{(a)}}{2} \frac{\tau^{(b)}}{2}\right) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \Rightarrow T(\square) = \frac{1}{2} \quad (11.103)$$

になる。スカラーの場合も同様である。

以上から、標準模型に於けるフェルミオンからのベータ関数がわかる。QED では、(11.86)であるが、標準模型では質量が 0 であるので、

$$\beta(e_\mu) = \frac{e_\mu^3}{12\pi^2 \epsilon_0 \hbar c} \quad (11.104)$$

である。これを、電子の電荷がマイナスを $Q_{em} = -1$ で表わすと

$$\beta(e_\mu) = Q_{em}^2 \frac{e_\mu^3}{12\pi^2 \epsilon_0 \hbar c} \tag{11.105}$$

問題 15 : 電子の電荷 e_μ がマイナス ($Q_{em} = -1$) であることに注意すると、(11.104)は $\beta(e_\mu) = \frac{(-Q_{em} e_\mu)^3}{12\pi^2 \epsilon_0 \hbar c} = -Q_{em}^3 \frac{e_\mu^3}{12\pi^2 \epsilon_0 \hbar c}$ が正しい表式になりそうであるが、(11.105)になることを示せ。

である。従って、

- QED の場合の(11.92)で求めた ψ_L と ψ_R それぞれの $\frac{1}{2}$
- (11.100)の群の表現の次数によって決まる T

に注意して、また

- ψ_L と ψ_R それぞれの寄与を加える約束 : \sum_L と \sum_R で和の寄与を表わす。
- ψ_L と ψ_R の Y の値を、 Y_L と Y_R で表わす。

にして

$$\beta(g_L) = \frac{g_L^3}{12\pi^2 \epsilon_0 \hbar c} \frac{1}{2} \sum_L T(Fermion)$$

$$\beta(g') = \frac{g'^3}{12\pi^2 \epsilon_0 \hbar c} \frac{1}{2} \left(\sum_L \left(\frac{Y_L}{2}\right)^2 + \sum_R \left(\frac{Y_R}{2}\right)^2 \right) \quad (*) Y \text{の値は } L \text{と } R \text{で違う : } Y_L = -1 \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, Y_R = -2(e_R)$$

$$\beta(g_c) = \frac{g_c^3}{12\pi^2 \epsilon_0^{QCD} \hbar c} \frac{1}{2} \left(\sum_L T(Fermion) + \sum_R T(Fermion) \right) \tag{11.106}$$

また、

- ゲージボゾン

$$(\text{Gauge boson}) = \text{cloud diagram} + \text{blob diagram} \tag{11.107}$$

- スカラー

$$(\text{Scalar}) = \text{loop diagram} + \text{blob diagram} \tag{11.108}$$

問題 16 : (11.107)と(11.108)に於いて $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ理論のラグランジアンでこれらのファイマン図を与える相互作用項を説明せよ。ゲージボゾンは $SU(2)_L$ 、スカラーはヒッグス粒子とする。

の寄与も計算されている。以上をまとめると、 $SU_L(2):N=2$ と $SU_c(3):N=3$ に対して・・・

$$\beta(\bar{g}) = \frac{b_0}{\varepsilon_0 \hbar c} \bar{g}^3 \quad (\bar{g} = \bar{g}_L, \bar{g}_c)$$

$$b_0 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3} T(Gauge) - \frac{2}{3} T(Femion) - \frac{1}{3} T(Scalar) \right)$$
(11.109)

である。また、 $U(1)_Y$ に対して、超電荷を $Y_f \cdots Fermion$ 、 $Y_s \cdots Scalar$ とすれば・・・

$$\beta(\bar{g}') = \frac{b_0}{\varepsilon_0 \hbar c} \bar{g}'^3$$

$$b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{3} \sum_f \left(\frac{Y_f}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \sum_s \left(\frac{Y_s}{2} \right)^2 \right)$$
(11.110)

である。これから、(11.56)より、 $n=3$ を用いて

$$\frac{1}{\alpha_R(Q)} = \frac{1}{\alpha_R(\mu)} - 8\pi b_0 \ln \left(\frac{Q}{\mu} \right)$$

$$\alpha_R(Q) = \frac{\bar{g}^2(Q^2, \mu^2, g_\mu)}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$$
(11.111)

と求まる。これにより

- 任意のエネルギーでの結合定数の値を予測

問題 17 : (11.111)において QCD の $SU(3)$ ($N=3$) に対して

A) フェルミオンが一つの場合 : $b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} T(Femion) \left(T(Femion) = \frac{1}{2} \right)$ の時

B) ゲージボゾンのみの場合 : $b_0 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{3} T(Gauge) \left(T(Gauge) = N = 3 \right)$ の時

に $\mu = 1$ (GeV) として $\alpha_R(\mu) = 0.1$ を用いて $Q = 1000$ (GeV) までの $\alpha_R(Q)$ のグラフを描き、違いを述べよ。また、

C) ゲージボゾンのみの場合のような結合定数の振る舞いを、物理用語で何というかを述べよ。

できる。ここで、(11.109)において

- $\frac{11}{3} T(Gauge)$ が他と符号が違う事が大発見

で発見した 3 人 (Georgi, Politzer, Wilczek) が 2004 年度のノーベル賞をもらっている。

第 1 1 章問題

- 1) (11.4)の理由を述べよ。
- 2) (11.5)の【例】の式を証明せよ。
- 3) (11.47)を導け
- 4) (11.49)を導け。
- 5) (11.50)を導け。
- 6) (11.56)を導け。
- 7) (11.70)を導け。
- 8) (11.71)を導け。
- 9) (11.72)を導け。【ヒント】 $X = a + bx^2$ を用いて被積分関数を表わしてみると良い。

1 0) (11.75) の積分を求めよ。【ヒント】 ($a > 0$ & $b > 0/a < 0$ & $b < 0$) の時、

$$bz^2 = a \tan^2 \theta, 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}, d \tan \theta = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \text{ を用いると良い。 } a > 0 \text{ \& } b < 0/a < 0 \text{ \& } b > 0 \text{ の時、}$$

$$\frac{1}{(\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|z})(\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|z})} = \frac{1}{2\sqrt{|a|}} \left(\frac{1}{\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|z}} + \frac{1}{\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|z}} \right) \text{ を用いるとよい。}$$

1 1) (11.78)を求めよ。

1 2) (11.70)より $I(0) = \frac{1}{6} \ln m^2$ である。(11.78)より $I(0)$ を計算して $I(0) = \frac{1}{6} \ln m^2$ に成ることを示

$$\text{せ。【ヒント】 } \sqrt{1 + \frac{4m^2}{-p^2}} = \sqrt{\frac{4m^2}{-p^2}} \sqrt{1 + \frac{-p^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{4m^2}{-p^2}} \left(1 - \frac{p^2}{8m^2} \right) \text{ (as } p^2 \rightarrow 0) \text{ を用いると良い。}$$

1 3) (11.84)を求めよ。

1 4) (11.96)を求めよ。

1 5) 電子の電荷 e_μ がマイナス ($Q_{em} = -1$) であることに注意すると、(11.104)は $\beta(e_\mu) = \frac{(-Q_{em} e_\mu)^3}{12\pi^2 \epsilon_0 \hbar c}$

$$= \frac{(-Q_{em} e_\mu)^3}{12\pi^2 \epsilon_0 \hbar c} = -Q_{em}^3 \frac{e_\mu^3}{12\pi^2 \epsilon_0 \hbar c} \text{ が正しい表式になりそうであるが、(11.105)になることを示せ。}$$

1 6) (11.107)と(11.108)に於いて $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ理論のラグランジアンでこれらのファイマン

ン図を与える相互作用項を説明せよ。ゲージボソンは $SU(2)_L$ 、スカラーはヒッグスとする。

1 7) (11.111)において QCD の $SU(3)$ ($N=3$) に対して

$$\text{A) フェルミオンが一つの場合 : } b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} T(\text{Femion}) \left(T(\text{Femion}) = \frac{1}{2} \right) \text{ の時}$$

B) ゲージボゾンのみの場合 : $b_0 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{3} T(\text{Gauge})$ ($T(\text{Gauge}) = N = 3$) の時

に $\mu = 1$ (GeV) として $\alpha_R(\mu) = 0.1$ を用いて $Q = 1000$ (GeV) までの $\alpha_R(Q)$ のグラフを描き、
違いを述べよ。また、

C) ゲージボゾンのみの場合のような結合定数の振る舞いを、物理用語で何というかを述べよ。