

第十章 繰り込み

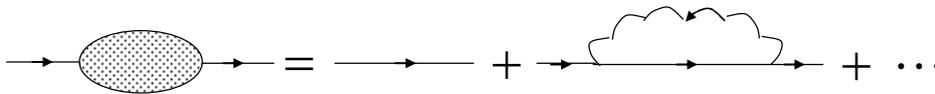
QED の繰り込み

まず、量子電磁気学 (QED) の繰り込みを復習する。QED のラグランジアン密度 (\mathcal{L}_{QED}) は、最初に用意する素 (bare) の量を添え字 B であらわすと

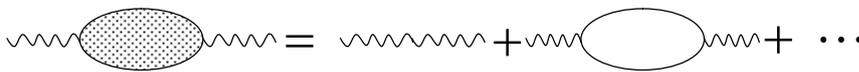
$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4\mu_0} F_B^{\mu\nu} F_{B\mu\nu} + \bar{\psi}_B \left(i\not{D} - \frac{m_B c}{\hbar} \right) \psi_B = -\frac{1}{4\mu_0} F_B^{\mu\nu} F_{B\mu\nu} + \bar{\psi}_B \left(i\not{\partial} - \frac{m_B c}{\hbar} \right) \psi_B - \frac{e_B}{\hbar} \bar{\psi}_B \not{A}_B \psi_B \quad (10.1)$$

である。このラグランジアン密度から得られるハミルトニアン密度を用いて、量子補正を計算すると、【第八章 ファイマン図：量子クーロン散乱】の議論の様に 3 種類の発散項が現れ

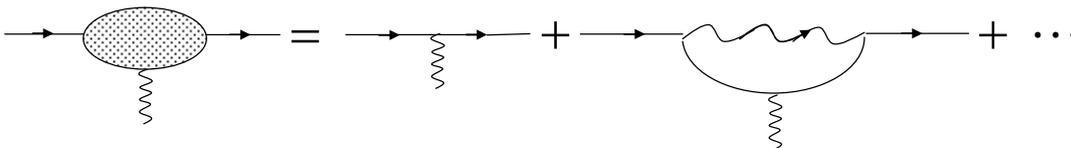
- 電子の自己エネルギーへの量子補正：



- 光子の自己エネルギーへの量子補正



- 光子と電子の結合への量子補正



これら 3 種類の発散は 4 種類の素の量である

- 電子の質量と波動関数
- 光子の波動関数
- 光子と電子の結合定数

を

- 再定義 (renormalization: 繰り込み)

することで、繰り込むことができる。それぞれ、繰り込みパラメーターとして

- Z_1 : 光子と電子の結合定数 (10.2)

- δm : 電子の質量 (10.3)

- Z_2 : 電子の波動関数 (10.4)

- Z_3 : 光子の波動関数 (10.5)

を用いる。ここで、ゲージ不変性に起因する「ワード・高橋の恒等式」:

$$-i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} = \text{diagram of electron self-energy} \quad \Lambda_\mu(p, p) = \text{diagram of vertex correction}$$

を用いて

$$-\frac{\partial \Sigma(\not{p})}{\partial p^\mu} = \Lambda_\mu(p, p) \quad (10.6)$$

と与えられる。 Z_1 と Z_2 の間に関係式

$$\boxed{Z_1 = Z_2} \tag{10.7}$$

が成立する。実際に、 $Z_{1,2,3}$ と δm をどのように決定するかを以下で議論する。また、運動量表示の伝搬関数として、(8.30)より、 $S_F(p)$ の代わりに $S_F(\not{p})$ として

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_F(p) &= \frac{i\hbar^3 c}{p^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \Leftarrow D_F(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \Delta_F(p) e^{\frac{ipx}{\hbar}} \\ S_F(\not{p}) &= \frac{i\hbar^2 c (\not{p} + mc)}{p^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} = \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} - mc + i\varepsilon} \Leftarrow K_F(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} S_F(\not{p}) e^{\frac{ipx}{\hbar}} \\ D_{F\mu\nu}(p) &= \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \Leftarrow D_{F\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} D_{F\mu\nu}(p) e^{\frac{ipx}{\hbar}} \end{aligned}} \tag{10.8}$$

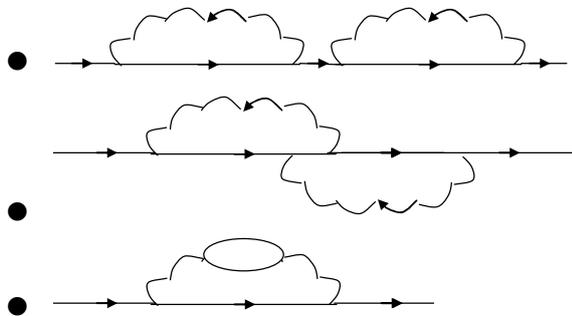
である。

1 粒子規約グラフ

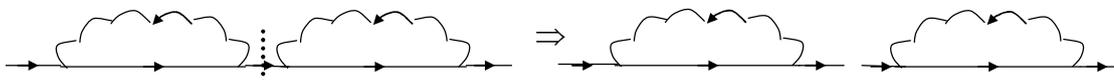
2 次の量子効果以降の 3 次や 4 次を含む量子効果として、その次数に特有なグラフを

- 1 粒子規約グラフ (一本の線を切って 2 つのグラフにならないグラフ : one particle irreducible graph=1PI)

という。具体的には、4 次の量子効果を例にとる。 $\Sigma(p)$ として、



等があるが、最初のグラフは



のように、2 つのグラフに分かれるので

- \rightarrow は 1PI ではないことになる。

==電子の自己エネルギー==

この 1PI のみで構成された電子の自己エネルギー $\Sigma(\not{p})$ は、2 次の量子効果を含んで

$$-i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} = \text{fermion line with 1PI loop} = \text{fermion line with fermion loop} + \text{fermion line with photon loop} + \text{fermion line with fermion loop and photon loop} + \dots$$

である。また、 $-i\Sigma(\not{p})$ は 2 次の量子効果の場合には

$$-i\Sigma(\not{p}) = -\frac{e^2}{\varepsilon_0 \hbar c} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + mc) \gamma_\mu}{((k+p)^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon)(k^2 + i\varepsilon)} = \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma \right) (\not{p} - 4mc) - i\Sigma_R(\not{p})$$

$$-i\Sigma_R(\not{p}) = \frac{i\alpha_{em}}{4\pi} \int_0^1 dx [-2(1-x)\not{p} + 4mc] \ln \left[(m^2 c^2 - (1-x)p^2)x \right] \quad (10.9)$$

で定義される。そして、

● 繰り込みは、これらの効果を取り込んだときに現れることになる。その伝搬関数を $S'_F(\not{p})$ として

$$\times \xrightarrow{P} \text{[loop]} \xrightarrow{P} \times = S'_F(\not{p}) \quad (10.10)$$

とする。また、自由場の伝搬関数の $S_F(p)$ を

$$\times \xrightarrow{p} \times \equiv S_F(\not{p}) \left(= \frac{i\hbar^2 c (\not{p} + m_B c)}{p^2 - m_B^2 c^2 + i\varepsilon} \right) = \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} - m_B c + i\varepsilon} \quad (10.11)$$

で表す。 $S_F(p)$ の質量には、

● 素 (bare) の量を示すと B という添え字を用いている。そして、

● 実際に観測にかかる質量を m とし、1PI の影響を取り込むことになる。

$$\begin{aligned} & \times \xrightarrow{P} \text{[loop]} \xrightarrow{P} \times \\ & = \times \xrightarrow{P} \times + \times \xrightarrow{P} \times \text{[1PI]} \xrightarrow{P} \times + \times \xrightarrow{P} \times \text{[1PI]} \xrightarrow{P} \times \text{[1PI]} \xrightarrow{P} \times + \dots \end{aligned} \quad (10.12)$$

である。式であらわすと、

$$S'_F(\not{p}) = S_F(\not{p}) + S_F(\not{p}) \left(-i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} \right) S_F(\not{p}) + S_F(\not{p}) \left(-i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} \right) S_F(\not{p}) \left(-i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} \right) S_F(\not{p}) + \dots \quad (10.13)$$

これは無限に続くことを考慮して

$$\begin{aligned} & S_F(\not{p}) + S_F(\not{p}) \left(-i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} \right) S_F(\not{p}) + S_F(\not{p}) \left(-i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} \right) S_F(\not{p}) \left(-i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} \right) S_F(\not{p}) + \dots \\ & = S_F(\not{p}) + S_F(\not{p}) \left(-i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} \right) \left[S_F(\not{p}) + S_F(\not{p}) \left(-i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} \right) S_F(\not{p}) + \dots \right] \end{aligned} \quad (10.14)$$

第二項に(10.13)を用いて、

$$S'_F(\not{p}) = S_F(\not{p}) + S_F(\not{p}) \left(-i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} \right) S'_F(\not{p}) \quad (10.15)$$

これより

$$S'^{-1}(\not{p}) = S_F^{-1}(\not{p}) + i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} \quad (10.16)$$

即ち

$$\boxed{S'_F(\not{p}) = \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} - (m_B c + \Sigma(\not{p}))}} \quad (10.17)$$

問題 1 : (10.17)を求めよ

を得る。

==光子の自己エネルギー==

1PI のみで構成された光子の自己エネルギー $\Pi_{\mu\nu}(p)$ は、2 次の量子効果を含んで

$$i \frac{\Pi_{\mu\nu}(p)}{\hbar^3 c \mu_0} = \text{wavy line} \text{---} \text{1PI} \text{---} \text{wavy line} = \text{wavy loop} + \text{wavy loop with fermion} + \text{wavy loop with photon} + \dots$$

である。 $i\Pi^{\mu\nu}(p)$ は 2 次の量子効果の場合には

$$\begin{aligned} i\Pi^{\mu\nu}(p) &= -\frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \frac{i(\not{k} + \not{p} + mc)}{(k+p)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k} + mc)}{k^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\nu) \right\} \\ &= (p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) (i\Pi(p^2)) \end{aligned} \quad (10.18)$$

$$i\Pi(p^2) = \frac{i\alpha_{em}}{3\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma \right) + i\Pi_R(p^2)$$

$$i\Pi_R(p^2) = -\frac{2i\alpha_{em}}{\pi} \int_0^1 dx (1-x) x \ln [m^2 c^2 + (1-x)x(-p^2)]$$

である。

これらの効果を取り込んだ伝搬関数を $D'_{F\mu\nu}(p)$ として

$$\text{wavy line} \text{---} \text{1PI} \text{---} \text{wavy line} = D'_{F\mu\nu}(p) \quad (10.19)$$

とする。また、自由場の伝搬関数の $D_{F\mu\nu}(p)$ であり

$$\text{wavy line} \text{---} \text{wavy line} \equiv D_{F\mu\nu}(p) = \frac{i\hbar^3 c \mu_0 \left(-G_{\mu\nu} + a_0 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)}{p^2 + i\epsilon} \left(G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (10.20)$$

で表す。ここで、 a_0 を

- ゲージパラメータ

という。このゲージパラメータは、通常 $a_0 = -1$ をとり、

$$D_{F\mu\nu}(p) = \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \tag{10.21}$$

である。これを

- ファイマンゲージ (Faymann Gauge)

問題 2 : ランダウゲージ (Landau Gauge)、トーフーフト・ベルトマンゲージ ('tHooft-Veltman Gauge) を説明せよ。

という。ゲージ不変性により、

- 物理結果は、このゲージパラメータの値に依らない

ことが保証されている。 $G_{\mu\nu}$ 部と a_0 部に分けたのは

$$G_{\mu\nu} G^{\nu\rho} = G_{\mu}^{\rho} \tag{10.22}$$

$$p^{\mu} G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} p^{\nu} = 0 \tag{10.23}$$

が成り立つからである。(10.23)は $G_{\mu\nu}$ と $p^{\mu} p^{\nu}$ の直交性を表わしている。

1PI の影響を取り込むため

$$\begin{aligned} & \text{wavy line with blob} \\ &= \text{wavy line} + \text{wavy line with 1PI blob} + \text{wavy line with 1PI blob} + \text{wavy line with 1PI blob} + \dots \end{aligned} \tag{10.24}$$

である。式であらわすため、 $\Pi^{\mu\nu}(p)$ の一般系

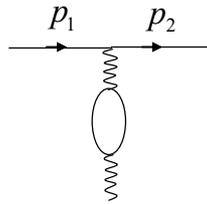
$$\Pi^{\mu\nu}(p) = (p^{\mu} p^{\nu} - p^2 g^{\mu\nu}) \Pi(p^2) = -p^2 G_{\mu\nu} \Pi(p^2) \tag{10.25}$$

を用いる。(10.24)を式で表すと、

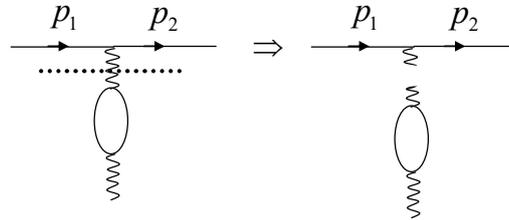
$$\begin{aligned} D'_{F\mu\nu}(p) &= D_{F\mu\nu}(p) + D_{F\mu\mu'}(p) \left(i \frac{\Pi^{\mu'\nu'}(p)}{\hbar^3 c \mu_0} \right) D_{F\nu'\nu}(p) \\ &\quad + D_{F\mu\mu'}(p) \left(i \frac{\Pi^{\mu'\nu'}(p)}{\hbar^3 c \mu_0} \right) D_{F\nu'\nu''}(p) \left(i \frac{\Pi^{\nu''\nu'''}(p)}{\hbar^3 c \mu_0} \right) D_{F\nu'''\nu}(p) + \dots \end{aligned} \tag{10.26}$$

である。右辺の和が無限に続くことを考慮して

$$D_{F\mu\nu}(p) + D_{F\mu\mu'}(p) \left(i \frac{\Pi^{\mu'\nu'}(p)}{\hbar^3 c \mu_0} \right) D_{F\nu'\nu}(p) + D_{F\mu\mu'}(p) \left(i \frac{\Pi^{\mu'\nu'}(p)}{\hbar^3 c \mu_0} \right) D_{F\nu'\nu''}(p) \left(i \frac{\Pi^{\nu''\nu'''}(p)}{\hbar^3 c \mu_0} \right) D_{F\nu'''\nu}(p) + \dots$$



が無いのは、以下のように、2つのグラフに分かれ

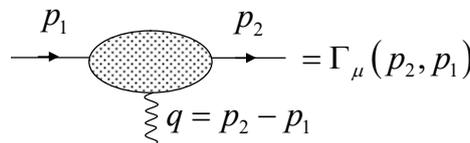


1PI では無いからである。 $\Lambda^\mu(p_2, p_1)$ は 2 次の量子効果の場合には、(8.105)より

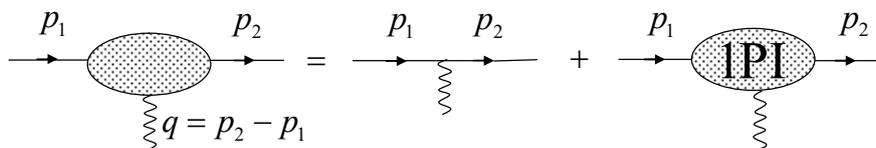
$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(p_2, p_1) &= \frac{1}{\hbar c \epsilon_0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\nu'}}{(k^2 + i\epsilon)} (ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{p}_2 - \not{k} + mc)}{(p_2 - k)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{i(\not{p}_1 - \not{k} + mc)}{(p_1 - k)^2 - m^2 c^2 + i\epsilon} (ie\gamma^{\nu'}) \\ &= \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \left(\frac{2}{4-n} - \gamma \right) \gamma_\mu + \Lambda_{R\mu}(p_2, p_1) \leftarrow 4 \times 4 \text{行列} \left(A = \lambda^2 + (qy - p_2)^2 x^2 \right) \end{aligned} \quad (10.35)$$

$$\Lambda_{R\mu}(p_2, p_1) = \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{A} \left[\begin{aligned} &(\not{p}_1 + (\not{p}_1 - \not{p}_2)x) \gamma_\mu (\not{p}_2 + (\not{p}_1 - \not{p}_2)x) \\ &- 2mc(p_1 + p_2 + 2(qy - p_2)x)_\mu + (m^2 c^2 - A \ln A) \gamma_\mu \end{aligned} \right]$$

である。これらの効果を取り込んだ A_μ と ψ の結合を $\Gamma_\mu(p_2, p_1)$ とする



$\Gamma_\mu(p_2, p_1)$ は



であるので、式に表わすと

$$\boxed{\Gamma_\mu(p_2, p_1) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_2, p_1)} \quad (10.36)$$

になる。

ここで、一般的な形の $\Gamma_\mu(p_2, p_1)$ を求めておく。 $\Gamma'_\mu(p_2, p_1)$ とすると

- 利用できるベクトルが γ_μ と $p_{1\mu}, p_{2\mu}$ である
- $\Gamma'_\mu(p_2, p_1)$ がローレンツベクトルである (ローレンツ擬ベクトルでない)

事に注意すると、 γ_μ と $p_\mu (= p_{1\mu} \text{ or } p_{2\mu})$ から作られるベクトルは

- $\gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5, \sigma_{\mu\nu} \gamma^\nu, \sigma_{\mu\nu} \gamma^\nu \gamma_5 \left(\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} i [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \right)$
- p_μ
- $\sigma_{\mu\nu} p^\nu, \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 p^\nu$

である。この中で γ_5 を含むベクトルはローレンツ擬ベクトルなので使用できない。また、 $\sigma_{\mu\nu} \gamma^\nu$ は

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu &= 2(g_{\mu\sigma} \gamma_\nu + g_{\sigma\nu} \gamma_\mu - g_{\mu\nu} \gamma_\sigma) \\ \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu &= 2i \varepsilon_{\mu\sigma\nu\rho} \gamma_5 \gamma^\rho \quad (\varepsilon_{0123} = 1) \end{aligned} \quad (10.37)$$

を用いて、

$$\sigma_{\mu\nu} \gamma^\nu = 3i \gamma_\mu \quad (10.38)$$

問題 4 : (10.38) を導け

を得るので、 γ_μ と同等になる。以上から、

- γ_μ
- p_μ
- $\sigma_{\mu\nu} p^\nu$

を用いて

$$\Gamma'_\mu(p_2, p_1) = F_1(q^2) \gamma_\mu + \frac{i}{2mc} \sigma_{\mu\nu} p_1^\nu G_1(q^2) + \frac{i}{2mc} \sigma_{\mu\nu} p_2^\nu G_2(q^2) + H_1(q^2) p_{1\mu} + H_2(q^2) p_{2\mu} \quad (10.39)$$

と置く。カレントの保存則に対して

$$q^\mu \left[\overline{u^{(s_2)}(p_2)} \Gamma'_\mu(p_2, p_1) u^{(s_1)}(p_1) \right] = 0 \quad (q = p_2 - p_1) \quad (10.40)$$

が要請される。従って

$$\begin{aligned} G_2(q^2) &= -G_1(q^2) (\equiv F_2(q^2)) \\ H_1(q^2) &= H_2(q^2) (\equiv F_3(q^2)) \end{aligned} \quad (10.41)$$

を得る。つまり、

$$\Gamma_\mu(p_2, p_1) = F_1(q^2) \gamma_\mu + \frac{i}{2mc} \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2) + (p_{1\mu} + p_{2\mu}) F_3(q^2) \quad (10.42)$$

である。ここで、ゴルドン恒等式 (Gordon identity) :

$$\overline{u^{(s_2)}(p_2)} \gamma_\mu u^{(s_1)}(p_1) = \overline{u^{(s_2)}(p_2)} \left(\frac{p_{1\mu} + p_{2\mu}}{2mc} + \frac{i \sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2mc} \right) u^{(s_1)}(p_1) \quad (10.43)$$

を用いると、

問題 5 : (10.43) を導け

$F_3(q^2)$ 項は $F_{1,2}(q^2)$ 項に転換できるので最終的に

$$\boxed{\Gamma'_\mu(p_2, p_1) = F_1(q^2)\gamma_\mu + \frac{i}{2mc}\sigma_{\mu\nu}q^\nu F_2(q^2)} \quad (10.44)$$

を得る。これらは、

- $\overline{u^{(s_2)}(p_2)}\Gamma'_\mu(p_2, p_1)u^{(s_1)}(p_1)$ の形で評価

されていることに注意すること。

繰り込みの実技

【 ψ の質量と波動関数の繰り込み】

発散量は $\Sigma(\not{p})$ に含まれている。この発散を繰り込みにより取り除くことになる。このときの繰

込みは(10.3)と(10.4)のように δm と Z_2 で行われる。まず、 ψ の質量の繰り込みのため、繰り込ま

れた質量を m とし、

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4\mu_0}F_B^{\mu\nu}F_{B\mu\nu} + \overline{\psi}_B \left(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi_B - \frac{e_B}{\hbar} \overline{\psi}_B \not{A}_B \psi_B - \frac{\delta m \cdot c}{\hbar} \overline{\psi}_B \psi_B \quad (\delta m = m_B - m) \quad (10.45)$$

により、繰り込む量は、($\not{p} = mc$ での) 質量の繰り込みより

$$\boxed{\delta m \cdot c = -\Sigma(\not{p})\Big|_{\not{p}=mc}} \quad \left(\Sigma(\not{p})\Big|_{\not{p}=mc} \text{ を } \Sigma(mc) \text{ と表記する} \right) \quad (10.46)$$

と要請する。そのとき、(10.17)は

$$S'_F(\not{p}) = \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} - (m_B c + \Sigma(\not{p}))} = \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} - (mc + \delta m \cdot c + \Sigma(\not{p}))} = \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} - (mc - \Sigma(mc) + \Sigma(\not{p}))} \quad (10.47)$$

である。ここで、 $\not{p} = mc$ のテーラー展開

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma(mc) + (\not{p} - mc)\Sigma'(mc) + (\not{p} - mc)^2 \tilde{\Sigma}(\not{p}) \Leftarrow \Sigma'(\not{p}) = \frac{d\Sigma(\not{p})}{d\not{p}} \quad (10.48)$$

を用いる。但し、 $\Sigma(\not{p})_{\alpha\beta}$ のテーラー展開と考えると、行列要素での微分になり

$$(\not{p} - mc)\Sigma'_{\alpha\beta}(mc) = \sum_{\alpha', \beta'=1}^4 (\not{p} - mc)_{\alpha\beta'} \frac{d\Sigma'_{\alpha\beta}(\not{p})}{d(\not{p})_{\alpha'\beta'}} \Big|_{\not{p}=mc} \quad (10.49)$$

等と計算する。ここで、

$$\mathcal{M}(\not{p}) = \Sigma'(mc) + (\not{p} - mc)\tilde{\Sigma}(\not{p}) \quad (10.50)$$

と表わすと、(10.48)より

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma(mc) + (\not{p} - mc)\mathcal{M}(\not{p}) \quad (10.51)$$

なので、(10.47)より

$$S'_F(\not{p}) = \frac{i\hbar^2 c}{(\not{p} - mc)(1 - \mathcal{M}(\not{p}))} = \frac{S_F(\not{p})}{1 - \mathcal{M}(\not{p})} \quad (10.52)$$

と表わすことができる。

問題 6 : (10.9)を(10.50)に用いて(10.52)を計算せよ。

$\mathcal{M}(mc) (= \Sigma'(mc))$ は発散量であり、この発散を波動関数の繰り込みにより取り除くことになる。

そこで、

- 発散のない繰り込まれた伝搬関数を $\tilde{S}_F(\not{p})$

とする。まず、 Z_2 は、($\not{p} = mc$ での) 繰り込みで定義でき、

$$\boxed{S'_F(\not{p})\Big|_{\not{p}=mc} = Z_2 S_F(\not{p})\Big|_{\not{p}=mc}} \quad (10.53)$$

より

$$S'_F(\not{p})\Big|_{\not{p}=mc} = \frac{1}{1 - \mathcal{M}(mc)} S_F(\not{p})\Big|_{\not{p}=mc} = Z_2 S_F(\not{p})\Big|_{\not{p}=mc} \quad (10.54)$$

を得るので、 Z_2 は

$$\boxed{Z_2 = \frac{1}{1 - \mathcal{M}(mc)} = \frac{1}{1 - \Sigma'(mc)}} \quad (10.55)$$

と評価される。次に、 $\tilde{S}_F(\not{p})$ は $\not{p} = mc$ を含むすべての p_μ に渡って定義されるので

$$S'_F(\not{p}) = Z_2 \tilde{S}_F(\not{p}) \quad (10.56)$$

より、(10.54)と比較して

$$\boxed{\tilde{S}_F(\not{p}) = \frac{1}{1 - Z_2(\mathcal{M}(\not{p}) - \mathcal{M}(mc))} \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} - mc}} \quad (10.57)$$

を得る。

問題 7 : (10.57)を求めよ

問題 8 : 2 次の量子効果の(10.9)から Z_2 と $Z_2(\mathcal{M}(\not{p}) - \mathcal{M}(mc))$ を求めよ。計算結果は 2 次の項までしか意味がないことに注意せよ。

問題 9 : (10.55)及び(10.57)を参考に、QED が繰り込み可能な理論であることを用いて、 $(\alpha_{em}^2$ に比例する)4 次の量子効果まで計算できたとして $\mathcal{M}(\not{p}) - \mathcal{M}(mc)$ の 4 次の発散項について分かることを述べよ。ここで、 $\mathcal{M}(\not{p}) = \alpha_{em} \mathcal{M}^{(2)}(\not{p}) + \alpha_{em}^2 \mathcal{M}^{(4)}(\not{p})$ とし、 $\mathcal{M}^{(2)}(\not{p})$ と $\mathcal{M}^{(4)}(\not{p})$ は発散項を含み $\mathcal{M}^{(4)}(\not{p}) - \mathcal{M}^{(4)}(mc) = -(\mathcal{M}^{(2)}(\not{p}) - \mathcal{M}^{(2)}(mc)) \mathcal{M}^{(2)}(mc)$ を導け。

【 A_μ の波動関数の繰り込み】

発散量は $\Pi(p^2)$ に含まれている。この発散を波動関数の繰り込みにより取り除くことになる。このときの繰り込みは(10.5)のように Z_3 で行われる。そこで、 ψ の場合と同様に

- 発散のない繰り込まれた伝搬関数を $\tilde{D}_{F\mu\nu}(p)$

とする。まず、 Z_3 は、 $p^2 = 0$ での繰り込みで定義でき、

$$\boxed{D'_{F\mu\nu}(p)\Big|_{p^2=0} = Z_3 D_{F\mu\nu}(p)\Big|_{p^2=0}} \tag{10.58}$$

である。ここで、

- ゲージパラメータ a_0 は繰り込みの影響を受けない

ことに注意し、(10.31)と(10.58)より

$$D'_{F\mu\nu}(p)\Big|_{p^2=0} = \left(\frac{-G_{\mu\nu}}{1 + \Pi(p^2)} + a_0 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{i\hbar^3 c \mu_0}{p^2 + i\epsilon} \Big|_{p^2=0} = Z_3 \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 G_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \Big|_{p^2=0} + a_0 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \frac{i\hbar^3 c \mu_0}{p^2 + i\epsilon} \Big|_{p^2=0} \tag{10.59}$$

より、発散量の Z_3 は

$$\boxed{Z_3 = \frac{1}{1 + \Pi(0)}} \tag{10.60}$$

と評価される。次に、 $\tilde{D}_{F\mu\nu}(p)$ は $p^2 = 0$ を含むすべての p_μ に渡って定義されるので

$$D'_{F\mu\nu}(p) = Z_3 \tilde{D}_{F\mu\nu}(p) \tag{10.61}$$

より

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{D}_{F\mu\nu}(p) &= \left(\frac{-G_{\mu\nu}}{1 + Z_3(\Pi(p^2) - \Pi(0))} + a \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{i\hbar^3 c \mu_0}{p^2 + i\epsilon} \\ a_0 &= Z_3 a \end{aligned}} \tag{10.62}$$

問題 10 : (10.62)を求め

を得る。

【 A_μ と ψ の結合の繰り込み】

発散量は(10.44)の $F_1(q^2)$ に含まれている。この発散を繰り込みにより取り除くことになる。このときの繰込みは(10.2)のように Z_1 で行われる。そこで、前と同様に

- 発散のない繰り込まれた A_μ と ψ の結合を $\tilde{\Gamma}_\mu(p_2, p_1)$ よ

とする。まず、 Z_1 を計算するため、すでに用いた繰込み条件

- $p'_1 = mc, p'_2 = mc, q^2 = 0$

を用いなくてはならない。更に、(10.36)の繰込みに特化した条件：

$$q = 0 \tag{10.63}$$

加える。繰込みは

$$\Gamma'_\mu(p_2, p_2) \Big|_{\substack{p'_1 = p'_2 = mc \\ p_1 = p_2 (q=0)}} = Z_1^{-1} \gamma_\mu \tag{10.64}$$

で定義され、繰込み条件を $\Gamma'_\mu(p_1, p_1)$ に課すと、(10.36)と(10.44)より

$$\Gamma'_\mu(p_2, p_2) \Big|_{\substack{p'_1 = p'_2 = mc \\ p_1 = p_2 = p (q=0)}} = \Gamma'_\mu(p, p) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p, p) = F_1(0) \gamma_\mu = Z_1^{-1} \gamma_\mu$$

である。発散量の Z_1 は

$$Z_1 = \frac{1}{F_1(0)} \quad \text{或いは} \quad \Lambda_\mu(p, p) = (Z_1^{-1} - 1) \gamma_\mu \tag{10.65}$$

と評価される。次に、 $\tilde{\Gamma}_\mu(p_2, p_1)$ はすべての $p_{1\mu, 2\mu}$ に渡って定義されるので

$$\Gamma'_\mu(p_2, p_1) = Z_1^{-1} \tilde{\Gamma}_\mu(p_2, p_1) \tag{10.66}$$

より

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p_2, p_1) = \gamma_\mu + Z_1 [\Lambda_\mu(p_2, p_1) - \Lambda_\mu(p, p)] \tag{10.67}$$

問題 11 : (10.67)を求めよ

問題 1 2 : (10.6) のワード・高橋の恒等式と (10.47) 及び (10.66) を用いて、 $Z_1 = Z_2$ を導け。【ヒント】 $\Gamma'_\mu(p, p) = i \frac{\partial}{\partial p^\mu} S_F^{-1}(\not{p})$ を導き、
 $\tilde{\Gamma}_\mu(p, p) = i \frac{\partial}{\partial p^\mu} \tilde{S}_F^{-1}(\not{p})$ を使うと良い。

を得る。

繰り込まれた場による QED

繰り込みの要請で使用した条件は、(10.56) と (10.61) の

$$\begin{aligned}
 \times \begin{array}{c} p \\ \rightarrow \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} p \\ \rightarrow \end{array} \times &\equiv S'_F(\not{p}) = Z_2 \tilde{S}_F(\not{p}) \\
 \times \begin{array}{c} p \\ \mu \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} p \\ \nu \end{array} \times &\equiv D'_{F\mu\nu}(p) = Z_3 \tilde{D}_{F\mu\nu}(p)
 \end{aligned}
 \tag{10.68}$$

である。すなわち、素の量で書かれた伝搬関数として

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T(\psi_{B\alpha}(x) \overline{\psi}_{B\beta}(y)) | 0 \rangle &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} Z_2 S_{F\alpha\beta}(\not{p}) e^{\frac{ip(x-y)}{\hbar}} \\
 \langle 0 | T(A_{B\mu}(x) A_{B\nu}(y)) | 0 \rangle &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} Z_2 D_{F\mu\nu}(p) e^{\frac{ip(x-y)}{\hbar}}
 \end{aligned}
 \tag{10.69}$$

である。これから、繰り込まれた ψ と A_μ を、発散を含む $Z_{2,3}$ を除外して

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T(\psi_{B\alpha}(x) \overline{\psi}_{B\beta}(y)) | 0 \rangle &= Z_2 \langle 0 | T(\psi_\alpha(x) \overline{\psi}_\beta(y)) | 0 \rangle \\
 \langle 0 | T(A_{B\mu}(x) A_{B\nu}(y)) | 0 \rangle &= Z_3 \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle
 \end{aligned}
 \tag{10.70}$$

と再定義 (繰り込み) する。従って、 ψ と A_μ に対しては、

$$\boxed{\psi_B = Z_2^{1/2} \psi, \quad A_{B\mu} = Z_3^{1/2} A_\mu}
 \tag{10.71}$$

を用いる。

繰り込まれた ψ と A_μ を用いて、

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4\mu_0} Z_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + Z_2 \overline{\psi} \left(i \not{\partial} - \frac{m_B c}{\hbar} \right) \psi - \frac{e_B}{\hbar} Z_2 Z_3^{1/2} \overline{\psi} \not{A} \psi
 \tag{10.72}$$

を得る。ここで、

- 電荷の繰り込み (charge renormalization) は Z_1

とするので、

- 繰り込まれた電荷を e

として

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4\mu_0} Z_3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + Z_2 \bar{\psi} \left(i\not{\partial} - \frac{m_B c}{\hbar} \right) \psi - Z_1 \frac{e}{\hbar} \bar{\psi} A \psi \quad (10.73)$$

である。(10.72)と比較して

$$e_B = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} e \left(\begin{array}{l} \text{ワード・高橋恒等式} \\ \text{を用いると} \dots \\ = Z_3^{-1/2} e \end{array} \right) \quad (10.74)$$

がわかる。(10.73)より

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} = & -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} \left(i\not{\partial} - \frac{Z_2 m_B c}{\hbar} \right) \psi - \frac{e}{\hbar} \bar{\psi} A \psi \\ & - \frac{1}{4\mu_0} (Z_3 - 1) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (Z_2 - 1) \bar{\psi} i\not{\partial} \psi - (Z_1 - 1) \frac{e}{\hbar} \bar{\psi} A \psi \end{aligned} \quad (10.75)$$

である。次に質量の繰り込みを行うと、 ψ の質量を m として

$$\delta m = Z_2 m_B - m \quad (10.76)$$

なので

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} = & -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} \left(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi - \frac{e}{\hbar} \bar{\psi} A \psi \\ & - \frac{1}{4\mu_0} (Z_3 - 1) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} \left[i(Z_2 - 1)\not{\partial} - \frac{\delta m \cdot c}{\hbar} \right] \psi - (Z_1 - 1) \frac{e}{\hbar} \bar{\psi} A \psi \end{aligned} \quad (10.77)$$

である。更に

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_C \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} \left(i\not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi - \frac{e}{\hbar} \bar{\psi} A \psi \\ \mathcal{L}_C = -\frac{1}{4\mu_0} (Z_3 - 1) F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} \left(i(Z_2 - 1)\not{\partial} - \frac{\delta m \cdot c}{\hbar} \right) \psi - (Z_1 - 1) \frac{e}{\hbar} \bar{\psi} A \psi \end{array} \right. \quad (10.78)$$

と分けるとき、ファイマン図に用いるルールは

$$\begin{array}{c} p \text{ --- } \text{---} \text{---} p \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = -i \frac{\Sigma(\not{p})}{\hbar^2 c} \quad (10.79)$$

$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \mu \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} p \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \nu \end{array} = i \frac{\Pi_{\mu\nu}(q)}{\hbar^3 c \mu_0} = i \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{\Pi(q^2)}{\hbar^3 c \mu_0} \quad (10.80)$$

$$\begin{array}{c} p_1 \text{ ---} \text{---} p_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ q \end{array} = i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \Gamma_\mu(p_2, p_1) \Leftarrow \Gamma_\mu(p_2, p_1) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p_2, p_1) \quad (10.81)$$

(10.79)~(10.81)を計算するのに

$$\begin{aligned} \times \text{---} \text{---} \times &= \frac{i\hbar^2 c}{\not{p} - m + i\varepsilon} \\ \times \text{---} \text{---} \times &= \frac{-i\hbar^3 c \mu_0 g_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \quad (\text{Faymann gauge}) \\ \begin{array}{c} p_1 \text{ ---} \text{---} p_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ q \end{array} &= i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} \gamma_\mu \quad (q_\psi = -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \otimes \overset{p}{\text{---}} \text{---} i((Z_2 - 1) \not{p} + \delta m \cdot c) \\
 & \text{---} \otimes \overset{p}{\text{---}} \text{---} = -i(Z_3 - 1)(g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) \\
 & \text{---} \overset{p_1}{\text{---}} \otimes \overset{p_2}{\text{---}} \text{---} = i \frac{1}{\hbar c} \frac{e}{\hbar} (Z_1 - 1) \gamma_\mu \\
 & \text{---} \otimes \overset{p}{\text{---}} \text{---} \\
 & \text{---} \text{---} q \text{---}
 \end{aligned} \tag{10.82}$$

を用いる。繰り込みは

$$\begin{aligned}
 & \Sigma(\not{p} = mc) = 0 \\
 & \left. \frac{d}{d \not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p}=mc} = 0 \\
 & \Pi(p^2 = 0) = 0 \\
 & \Gamma_\mu(q = 0) = 0 \quad (q = p_2 - p_1)
 \end{aligned} \tag{10.83}$$

問題 13 : (10.83)のそれぞれの意味を説明せよ

の条件の下で行う。

第 10 章問題

- 1) (10.17)を求めよ。
- 2) ランダウゲージ (Landau Gauge)、トゥーフト・ベルトマンゲージ ('tHooft-Veltman Gauge) を説明せよ。
- 3) (10.30)を導け。
- 4) (10.38)を導け。
- 5) (10.43)を導け
- 6) (10.9)を(10.50)に用いて(10.52)を計算せよ。
- 7) (10.57)を求めよ。
- 8) 2 次の量子効果の(10.9)から Z_2 と $Z_2(\mathcal{M}(\not{p}) - \mathcal{M}(mc))$ 求めよ。計算結果は 2 次の項までしか意味がないことに注意せよ。
- 9) (10.55)及び(10.57)を参考にして、QED が繰り込み可能な理論であることを用いて、(α_{em}^2 に比例する) 4 次の量子効果まで計算できたとして $\mathcal{M}(\not{p}) - \mathcal{M}(mc)$ の 4 次の発散項について分かることを述べよ。ここで、 $\mathcal{M}(\not{p}) = \alpha_{em} \mathcal{M}^{(2)}(\not{p}) + \alpha_{em}^2 \mathcal{M}^{(4)}(\not{p})$ とし、 $\mathcal{M}^{(2)}(\not{p})$ と $\mathcal{M}^{(4)}(\not{p})$ は発散項を含み $\mathcal{M}^{(4)}(\not{p}) - \mathcal{M}^{(4)}(mc) = -(\overset{\text{有限項}}{\mathcal{M}^{(2)}(\not{p})} - \overset{\text{有限項}}{\mathcal{M}^{(2)}(mc)}) \overset{\text{発散項}}{\mathcal{M}^{(2)}(mc)}$ を導けばよい。
- 10) (10.62)を求めよ。
- 11) (10.67)を求めよ。
- 12) (10.6)のワード・高橋の恒等式と(10.47)及び(10.66)を用いて、 $Z_1 = Z_2$ を導け。【ヒント】

$$\Gamma'_\mu(p, p) = i \frac{\partial}{\partial p^\mu} S_F'^{-1}(\not{p})$$
を導き、
$$\tilde{\Gamma}_\mu(p, p) = i \frac{\partial}{\partial p^\mu} \tilde{S}_F^{-1}(\not{p})$$
を使うと良い。
- 13) (10.83)のそれぞれの意味を説明せよ。