

第一章 粒子の生成消滅

生成・消滅演算子

粒子の生成消滅を表すために、粒子の個数を表す状態を考える。このとき、粒子の個数は物理量であるので、エルミート(Hermite)演算子で表せる。それを \hat{N} とする。¹ また、粒子を 1 つ消す演算子を \hat{a} 、1 つ作る演算子を \hat{b} とする。 \hat{a}, \hat{b} の役割を式で表すと、

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\text{個の粒子}\rangle &\propto |n-1\text{個の粒子}\rangle \\ \hat{b}|n\text{個の粒子}\rangle &\propto |n+1\text{個の粒子}\rangle\end{aligned}\tag{1.1}$$

になる。ここで、定義により、

$$n = 0, 1, 2, \dots\tag{1.2}$$

である。これより、

- $|n\text{個の粒子}\rangle$ を単に $|n\rangle$

とすれば、

$$\hat{a}|n+1\rangle \propto |n\rangle \Rightarrow \hat{b}\hat{a}|n+1\rangle \propto \hat{b}|n\rangle \propto |n+1\rangle\tag{1.3}$$

なので、

$$\hat{b}\hat{a}|n+1\rangle \propto |n+1\rangle\tag{1.4}$$

とわかる。つまり、比例係数を k とすると、

$$\hat{b}\hat{a}|n+1\rangle = k|n+1\rangle \stackrel{\text{同じこと}}{\Rightarrow} \hat{b}\hat{a}|n\rangle = k|n\rangle\tag{1.5}$$

と書き直せる。 $\hat{b}\hat{a}$ を物理量とするには、

- $\hat{b}\hat{a}$ はエルミート(Hermite)演算子

になる必要があり、その結果、 $\hat{b}\hat{a}$ の固有値が実数になる。従って、

- k は実数

になる。 $\hat{b}\hat{a}$ はエルミート演算子であるので

$$(\hat{b}\hat{a})^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger = \hat{b}\hat{a}\tag{1.6}$$

より、

$$\hat{b} = \hat{a}^\dagger\tag{1.7}$$

が解であることがわかる。これを用いると、 \hat{a}, \hat{a}^\dagger の関係式にも比例係数を導入して

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= x_{n-1}|n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle &= y_{n+1}|n+1\rangle \\ \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle &= k_n|n\rangle \quad (k_n: \text{実数})\end{aligned}} \quad \left(\begin{array}{l} (x_{n-1}, y_{n+1}, k_n: n\text{ごとに違う値}) \\ \text{かもしれないので } n \text{ に依存} \end{array} \right)\tag{1.8}$$

¹以降、演算子には、 \hat{N} のように ^ をつけて表す。

とまとめることができる。更に、 $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ と \hat{a}^\dagger を使って

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger |n\rangle) &= \hat{a}^\dagger \hat{a} (y_{n+1} |n+1\rangle) = y_{n+1} k_{n+1} |n+1\rangle \\ \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle) &= \hat{a}^\dagger (k_n |n\rangle) = y_{n+1} k_n |n+1\rangle\end{aligned}\quad (1.9)$$

になるので、両辺を互いに引き算して

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger |n\rangle) - \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle) &= y_{n+1} k_{n+1} |n+1\rangle - y_{n+1} k_n |n+1\rangle \\ &= y_{n+1} (k_{n+1} - k_n) |n+1\rangle \stackrel{y_{n+1}|n+1\rangle = \hat{a}^\dagger |n\rangle}{=} (k_{n+1} - k_n) \hat{a}^\dagger |n\rangle\end{aligned}\quad (1.10)$$

左辺は、

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger |n\rangle) - \hat{a}^\dagger (\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle) = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] |n\rangle\quad (1.11)$$

なので、(1.10)は

$$\hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] |n\rangle = (k_{n+1} - k_n) \hat{a}^\dagger |n\rangle\quad (1.12)$$

すべての $|n\rangle$ について成立するので、

$$\hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = (k_{n+1} - k_n) \hat{a}^\dagger \Rightarrow [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = k_{n+1} - k_n\quad (1.13)$$

ここで、左辺は n によらずに成立するので、

- $k_{n+1} - k_n$ は n によらない

つまり、

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = k_{n+1} - k_n = (n \text{ によらない}) \text{定数}\quad (1.14)$$

になる。この定数は 1 ととれるので、² $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = k_{n+1} - k_n = 1$ とおける：

$$\boxed{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1}\quad (1.15)$$

かつ

$$k_{n+1} - k_n = 1\quad (1.16)$$

である。このとき、

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{a}^\dagger \Rightarrow \boxed{[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger}\quad (1.17)$$

同様に、

$$\begin{aligned}(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a})^\dagger &= (\hat{a}^\dagger)^\dagger = \hat{a} \\ \Rightarrow (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a})^\dagger &= \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = \hat{a} \Rightarrow \boxed{[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a}}\end{aligned}\quad (1.18)$$

²仮に、任意の数の $z (> 0)$ とすると $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = z$ であるが $[\hat{a}/\sqrt{z}, \hat{a}^\dagger/\sqrt{z}] = 1$ のように \hat{a}, \hat{a}^\dagger の代わりに $\hat{a}/\sqrt{z}, \hat{a}^\dagger/\sqrt{z}$ を使用すればよい。

に注意する。そこで、

$$\begin{aligned} \cancel{k_1} - k_0 &= 1 \\ \cancel{k_2} - \cancel{k_1} &= 1 \Rightarrow k_n = k_0 + n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \\ &\vdots \\ k_n - \cancel{k_{n-1}} &= 1 \end{aligned} \quad (1.19)$$

になるので、

$$k_n = k_0 + n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1.20)$$

を得る。ところで、(1.8) : $\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = k_n |n\rangle$ (k_n : 実数) より、

$$\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = k_n \langle n | n \rangle \quad \text{及び} \quad \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = |\hat{a} |n\rangle|^2 \geq 0 \Rightarrow k_n \geq 0 \quad (1.21)$$

のように $k_n \geq 0$ になる。従って、

$$k_n = k_0 + n \geq 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1.22)$$

である。このとき、 $|0\rangle$ に対して、

$$\hat{a} |n\rangle = x_{n-1} |n-1\rangle \Rightarrow \hat{a} |0\rangle = x_{-1} |-1\rangle \quad (1.23)$$

に注意すると、

$$x_{-1} \neq 0 \quad \text{のとき、} \quad \hat{a} |0\rangle \text{ は存在しない状態 } |-1\rangle \text{ になる} \quad (1.24)$$

なので、不適である。従って

$$x_{-1} = 0 \quad (1.25)$$

である必要がある。つまり、

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (1.26)$$

と要請される。従って、(1.21)を $n=0$ の $|0\rangle$ に適用すると、(1.26)を用いて

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} |0\rangle &= k_0 \overbrace{\langle 0 | 0 \rangle} = 1 = k_0 \\ \langle 0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} |0\rangle &= |\hat{a} |0\rangle|^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

より、

$$k_0 = 0 \quad (1.28)$$

である。従って、(1.22)は、

$$k_n = k_0 + n = n \geq 0 \quad (1.29)$$

であり

● $n \geq 0$ を満たす整数 : $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

より自動的に成り立つことがわかる。以上から、

$$\boxed{\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle} \quad (1.30)$$

を得る。その結果、 $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ を粒子の個数を表す演算子 \hat{N} とみなすことができ、

$$\boxed{\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}} \quad (1.31)$$

は、その固有値が n になる。

次に、(1.8) の x_{n-1}, y_{n+1} を求める。 x_{n-1} は

$$\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle \stackrel{\hat{a}|n\rangle = x_{n-1}|n-1\rangle}{=} |x_{n-1}|^2 \langle n-1 | n-1\rangle = n \langle n | n\rangle \quad (1.32)$$

なので、

$$\langle n-1 | n-1\rangle = \langle n | n\rangle = 1 \quad (1.33)$$

より、

$$|x_{n-1}|^2 = n \Rightarrow x_{n-1} = \sqrt{n} \quad (1.34)$$

がわかる。従って、 x_{-1} は、 $n=0$ なので、自動的に(1.25)の $x_{-1}=0$ をみたく。また、 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]=1$ を使うと、

$$\begin{aligned} \langle n | [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] |n\rangle &\stackrel{[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]=1}{=} \langle n | n\rangle = 1 \\ &= \langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger |n\rangle - \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger |n\rangle - n \langle n | n\rangle \\ &\stackrel{\langle n | n\rangle=1}{=} \langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger |n\rangle - n (=1) \end{aligned} \quad (1.35)$$

なので、

$$\langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger |n\rangle = n+1 \quad (1.36)$$

を得る。一方、 y_{n+1} は

$$\langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger |n\rangle = \langle \hat{a}^\dagger |n\rangle \stackrel{\hat{a}^\dagger |n\rangle = y_{n+1}|n+1\rangle}{=} |y_{n+1}|^2 \langle n+1 | n+1\rangle = n+1 \quad (1.37)$$

なので、

$$|y_{n+1}|^2 = n+1 \Rightarrow y_{n+1} = \sqrt{n+1} \quad (1.38)$$

がわかる。以上から、

$$\boxed{\hat{a} |n\rangle = x_{n-1} |n-1\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = y_{n+1} |n+1\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle} \quad (1.39)$$

以上から、

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= 1, \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \\ [N, \hat{a}^\dagger] &= \hat{a}^\dagger, [N, \hat{a}] = -\hat{a} \end{aligned}} \quad (\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}) \quad (1.40)$$

になる。ここで、

$$\boxed{\hat{a}|0\rangle = 0} \quad (1.41)$$

に注意する。

[\hat{x}, \hat{p}] = $i\hbar$ との関係

ここで、[\hat{x}, \hat{p}] = $i\hbar$ より、

$$\hat{a} = \alpha\hat{x} + \beta i\hat{p} \quad (\alpha, \beta: \text{実数}) \quad (1.42)$$

とするとき (問題 1)、 $\hat{a}^\dagger = \alpha\hat{x} - \beta i\hat{p}$ なので、

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= [\alpha\hat{x} + \beta i\hat{p}, \alpha\hat{x} - \beta i\hat{p}] = [\alpha\hat{x}, -\beta i\hat{p}] + [\beta i\hat{p}, \alpha\hat{x}] = -\alpha\beta i[\hat{x}, \hat{p}] + \alpha\beta i[\hat{p}, \hat{x}] \\ &= -2\alpha\beta i[\hat{x}, \hat{p}] = 2\alpha\beta\hbar \end{aligned} \quad (1.43)$$

なので、 $2\alpha\beta\hbar = 1$ のとき、自動的に [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 が導かれるので、

$$\hat{a} = \alpha\hat{x} + \beta i\hat{p}, \hat{a}^\dagger = \alpha\hat{x} - \beta i\hat{p} \quad (2\alpha\beta\hbar = 1) \quad (1.44)$$

がわかる。このとき、

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger \hat{a} &= (\alpha\hat{x} - \beta i\hat{p})(\alpha\hat{x} + \beta i\hat{p}) = \alpha^2 \hat{x}^2 + \beta^2 \hat{p}^2 + i\alpha\beta(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \\ &= \alpha^2 \hat{x}^2 + \beta^2 \hat{p}^2 + i\alpha\beta[\hat{x}, \hat{p}] = \alpha^2 \hat{x}^2 + \beta^2 \hat{p}^2 - \alpha\beta\hbar \stackrel{2\alpha\beta\hbar=1}{=} \alpha^2 \hat{x}^2 + \beta^2 \hat{p}^2 - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.45)$$

なので、

$$\alpha^2 \hat{x}^2 + \beta^2 \hat{p}^2 = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} = \hat{N} + \frac{1}{2} \quad (1.46)$$

である。実際、調和振動子のエネルギーは

$$E = \frac{m}{2} v^2 + U = \frac{1}{2m} p^2 + U \quad \left(U = \frac{1}{2} kx^2 \Leftrightarrow F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{角速度} \right) \quad (1.47)$$

なので、この量子力学版は

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} k\hat{x}^2 \quad (1.48)$$

である。すなわち、比例係数を C として

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} k\hat{x}^2 = C(\alpha^2 \hat{x}^2 + \beta^2 \hat{p}^2) = C\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow C\alpha^2 = \frac{1}{2}k, C\beta^2 = \frac{1}{2m} \quad (1.49)$$

なので、

$$\alpha^2 = \frac{k}{2C}, \beta^2 = \frac{1}{2mC} \quad (1.50)$$

ここで、

$$2\alpha\beta\hbar = 1 \Rightarrow 4 \frac{k}{2C} \frac{1}{2mC} \hbar^2 = 1 \Rightarrow \frac{k}{mC^2} \hbar^2 = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{k}{m}} \hbar = \omega\hbar \quad (1.51)$$

とわかるので、

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{2\hbar\omega}} \stackrel{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}{=} \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}} \omega = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}, \beta = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \quad (1.52)$$

従って、

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} k \hat{x}^2 = \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (\hat{N} = a^\dagger a) \\ \hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} i \hat{p}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} i \hat{p} \end{aligned}} \quad (1.53)$$

を得る。或いは、

$$\hat{a} + \hat{a}^\dagger = 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \hat{x} \Rightarrow \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (1.54)$$

$$\hat{a} - \hat{a}^\dagger = 2\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} i \hat{p} \Rightarrow \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

より、

$$\boxed{\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)} \quad (1.55)$$

を得る。

また、

- $\hat{N}|0\rangle = 0$ で定義された真空

のエネルギーを計算することができて、

$$\hat{H}|0\rangle = \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega|0\rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega|0\rangle = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} |0\rangle \quad (1.56)$$

より、

$$E_{\text{真空}} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.57)$$

である。この原因は、不確定性関係

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (1.58)$$

にある。実際に、

$$\bullet \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \text{を満たす状態を} |\psi\rangle \quad (1.59)$$

とする時、真空に粒子が無いので、観測値は存在せず

$$\langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle (= \langle \hat{x} \rangle) = 0, \quad \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle (= \langle \hat{p} \rangle) = 0 \quad (1.60)$$

である。また、ある \hat{A} 演算子に対応して、 $(\Delta A)^2 = \langle \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 | \psi \rangle (= \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle)$ と定義されるので、 Δx と Δp は

$$(\Delta x)^2 = \langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{x}^2 \rangle - \overbrace{\langle \hat{x} \rangle^2}^{=0} = \langle \hat{x}^2 \rangle (= \langle \psi | \hat{x}^2 | \psi \rangle) \quad (1.61)$$

$$(\Delta \hat{p})^2 = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - \overbrace{\langle \hat{p} \rangle^2}^{=0} = \langle \hat{p}^2 \rangle (= \langle \psi | \hat{p}^2 | \psi \rangle)$$

と表わせる。従って、(1.53)より

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \langle \psi | \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} k \hat{x}^2 | \psi \rangle = \frac{1}{2m} (\Delta p)^2 + \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 \quad (1.62)$$

ここで(1.58)を用いて、

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \frac{1}{2m} (\Delta p)^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{\hbar}{2\Delta p} \right)^2 \quad (1.63)$$

これより

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \geq \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.64)$$

を得る (問題 2)。つまり、

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \geq E_{\text{真空}} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.65)$$

がわかる。故に、

$$\bullet \Delta x \Delta p = \frac{1}{2} \hbar \text{を満たす状態の最低エネルギー状態} = \text{真空}$$

であることがわかる。

粒子数の固有状態

N 個の粒子のある状態 $|n\rangle$ は、 $\hat{a}^\dagger |n-1\rangle = \sqrt{n} |n\rangle$ 用いると

$$\sqrt{n} |n\rangle = \hat{a}^\dagger |n-1\rangle \ \& \ \sqrt{n-1} |n-1\rangle = \hat{a}^\dagger |n-2\rangle \Rightarrow \sqrt{n} \sqrt{n-1} |n\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger |n-2\rangle \quad (1.66)$$

のように変形できるので (問題 3)、

$$\boxed{|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle} \quad (1.67)$$

である。ここで、

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}i\hat{p} \quad (1.68)$$

に移り、新しい固有状態と固有値として

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle \quad (1.69)$$

を導入する。そして、 $\langle x| = (|x\rangle)^\dagger$ を $|n\rangle$ に掛けると

$$\langle x|n\rangle = \langle x|\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle x|\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}i\hat{p}\right)^n|0\rangle \quad (1.70)$$

ここで、

$$\boxed{\langle x|\hat{x}|n\rangle = \langle x|x|n\rangle = x\langle x|n\rangle, \quad \langle x|\hat{p}|n\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|n\rangle} \quad (1.71)$$

にするとよい。つまり、

$$\langle x|\hat{p}|n\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|n\rangle \quad (1.72)$$

としておくと、 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を自動的に満たす (問題 4)。従って、

$$\begin{aligned} \langle x|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle x|\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}i\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\langle x|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\langle x|0\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n\left(\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n\langle x|0\rangle \end{aligned} \quad (1.73)$$

を得る。ここで、

- $\langle x|n\rangle$ と書く代わりに $u_n(x)$ と書く

ことにすると、

$$\boxed{u_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n!}}\left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n\left(\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n u_0(x)} \quad (1.74)$$

になる。 $u_0(x) = \langle x|0\rangle$ なので、 $\hat{a}|0\rangle = 0$ から、 $\langle x|\hat{a}|0\rangle = 0$ なので、

$$\begin{aligned} \langle x|\hat{a}|0\rangle &= \langle x|\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}i\hat{p}|0\rangle = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}i\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\langle x|0\rangle \\ &= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{\partial}{\partial x}\right)\langle x|0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (1.75)$$

つまり、 $u_0(x) = \langle x|0\rangle$ は、

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{\partial}{\partial x}\right)u_0(x) = 0 \quad (1.76)$$

の解である。これは、すぐ求まり (問題 5)、

$$u_0(x) = A \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \quad (1.77)$$

である。 $u_0(x) = \langle x|0\rangle$ を規格化すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |u_0(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| A \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \right|^2 \stackrel{A=\text{実数として}}{=} A^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) = 1 \quad (1.78)$$

なので、公式 (問題 6)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0) \quad (1.79)$$

を用いて、

$$A^2 \int dx \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) = A^2 \sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}} = 1 \Rightarrow A = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \quad (1.80)$$

なので、最終的に

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \quad (1.81)$$

を得る (問題 7)。以上から、 n 個の粒子状態は、

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \text{ with } \hat{N}|n\rangle (\equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle) = n|n\rangle, \hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \langle x|\hat{p}|n\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \langle x|n\rangle \\ u_n(x) (\equiv \langle x|n\rangle) &= \sqrt{\frac{1}{n!}} \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^n \left(\frac{m\omega}{\hbar}x - \frac{\partial}{\partial x}\right)^n u_0(x) \text{ with } u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \end{aligned}$$

(*) 物理的背景は、単振動である：

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} k \hat{x}^2 = \left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \text{ with } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} i \hat{p}, \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} i \hat{p} \end{aligned} \quad (1.82)$$

とわかった (問題 8・9)。

次の章では、この生成・消滅演算子を出発点とする。背景の「単振動」はすべて忘れるものとする。そのとき、 n 個の粒子のもつエネルギーは、

- 1 つの粒子の持つエネルギーを ε

とすれば、エネルギー \hat{H} は

$$\hat{H} = \hat{N}\varepsilon = a^\dagger a \varepsilon \quad (1.83)$$

になる。単振動のときには、ただ単に、 $\varepsilon = \hbar\omega$ ($\omega = \sqrt{k/m}$) になっているにすぎない。色々な種類 (K 種類とする) があるときは、ラベルを i ($i=1,2,3,\dots,K$) として、種類を区別すれば、エネルギーも色々あるとして ε_i とすると

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^K \varepsilon_i a_i^\dagger a_i \quad (1.84)$$

となる。これが生成・消滅する粒子のエネルギーになる。

もう一種類の生成・消滅演算子

以上で、生成消滅演算子の働きがわかったが、その特徴をもう一度まとめると、

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad [N, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad [N, \hat{a}] = -\hat{a} \quad \text{with } \hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (1.85)$$

なる。(問題 10) $[N, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ に、公式

$$\begin{aligned} [AB, C] &= ABC - CAB = ABC - \color{red}{ACB} + \color{red}{ACB} - CAB \\ &= A(BC - \color{red}{CB}) + (\color{red}{AC} - CA)B = A[B, C] + [A, C]B \end{aligned} \quad (1.86)$$

を用いると、 $N = a^\dagger a$ に注意して、 $A = a^\dagger$, $B = a$, $C = a^\dagger$ を代入すると

$$[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger] a = a^\dagger \Rightarrow [a, a^\dagger] = 1, [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \quad (1.87)$$

が導かれる。同様にして、もう一つの公式

$$\begin{aligned} [AB, C] &= ABC - CAB = ABC + \color{red}{ACB} - \color{red}{ACB} - CAB \\ &= A(BC + \color{red}{CB}) - (\color{red}{AC} + CA)B = A\{B, C\} - \{A, C\}B \end{aligned} \quad (1.88)$$

に気がつくと、³

$$[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger \{a, a^\dagger\} - \{a^\dagger, a^\dagger\} a = a^\dagger \Rightarrow \{a, a^\dagger\} = 1, \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \quad (1.89)$$

が導かれる。

このように 2 通りの生成・消滅演算子が可能であり

- $[a, a^\dagger] = 1, [a^\dagger, a^\dagger] = [a, a] = 0 \Rightarrow$ ボーズ粒子型生成消滅演算子
- $\{a, a^\dagger\} = 1, \{a^\dagger, a^\dagger\} = \{a, a\} = 0 \Rightarrow$ フェルミ粒子型生成消滅演算子

という。次の章ではボーズ型の場合の量子場を議論する。

³ $[A, B] = AB - BA, \{A, B\} = AB + BA$ である。

第 1 章問題

1) (1.42)において

A) $\hat{a} = \alpha\hat{x} + \beta\hat{p}$ (α, β : 実数) は可能か?

B) α と β が複素数の場合に(1.45)を計算し、「調和振動子のエネルギー」との関係を導け。

▶ ヒント A) $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ のとき、 $\hat{p}' = \hat{p} + (\hat{x}$ の多項式) も $[\hat{x}, \hat{p}'] = i\hbar$ を満たすことを示せ。

▶ ヒント B) $\hat{p}' = \hat{p} + i\frac{\beta\alpha^* - \beta^*\alpha}{2|\beta|^2}\hat{x}$ にすることを考えよ。 $\hat{p}'^\dagger = \hat{p}'$ を証明せよ。

2) (1.63)を用いて(1.64)を導け。

3) (1.67)を導け。

4) (1.72)のとき $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を自動的に満たす、つまり $\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | n \rangle = i\hbar \langle x | n \rangle$ を導け。

5) (1.76)を解いて、(1.77)を求めよ。

6) (1.79)の積分を実行してその結果が $\sqrt{\pi/a}$ であることを示せ。

7) A) (1.81)の $u_0(x)$ から $u_1(x)$ を求めよ。

B) $\int_{-\infty}^{\infty} |u_1(x)|^2 dx = 1$ を示せ。

8) (1.82)の $u_0(x)$ を用いて、 $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ を計算し、 $\Delta x \Delta p$ を求め、不

確定性関係を論ぜよ。ここに、 $\langle A(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u_0^*(x) A(x) u_0(x) dx$ である。

9) (1.40)や(1.55)を用い \hat{x}, \hat{p} を a, a^\dagger で表し $\langle x \rangle = \langle n | \hat{x} | n \rangle$, $\langle x^2 \rangle = \langle n | \hat{x}^2 | n \rangle$, $\langle p \rangle = \langle n | \hat{p} | n \rangle$,

$\langle p^2 \rangle = \langle n | \hat{p}^2 | n \rangle$ を計算し、 $\Delta x \Delta p$ を求めよ。 $n=0$ のときに 8) と一致するであろうか?

10) (1.85)に於て、演算子 a^\dagger は生成演算子である事を示せ。