

付録：ラグランジアン密度とエネルギー密度

ラグランジュの運動方程式

ラグランジアン L は、

$$L(x) = L(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \int dx \mathcal{L}(x) = \int dx \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$$

であり、不変作用 I は

$$I = \int dt L(x) = \frac{1}{c} \int d(ct) L(x) = \frac{1}{c} \int dx_0 L(x) \stackrel{c=1 \text{ の系}}{=} \int dx_0 L(x) = \int dx_0 dx \mathcal{L}(x) = \int dx^4 \mathcal{L}(x)$$

さて、このとき、 $x_1=(\mathbf{x}_1, t_1)$ で量子場の観測をして、しばらく後の $x_2=(\mathbf{x}_2, t_2)$ に量子場の観測をする。そのとき、最小作用の原理により、観測してないときの量子場の変化は、

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \mathcal{L}(x)$$

を最小にするように変化することが知られている。これを、**最小作用の原理**という。この最小作用の原理により、観測してないときの量子場の運動が正しく記述される。

仮に、この最小の I を与える量子場が分かったとする。これを、 $\phi_{\min}(x)$ とすると、それ以外のすべての $\phi(x)$ は、

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \geq I_{\min} = \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \mathcal{L}(\phi_{\min}(x), \partial_\mu \phi_{\min}(x))$$

ただし、 t_1 と t_2 では、観測して $\phi(x)$ の値はわかっているので、

$$\phi(\mathbf{x}, t_1) = \phi_{\min}(\mathbf{x}, t_1), \quad \phi(\mathbf{x}, t_2) = \phi_{\min}(\mathbf{x}, t_2)$$

である。この不等式を解くには、微小な変化を考えると良い。つまり、

$$\phi(x) = \phi_{\min}(x) + \delta\phi(x) \quad \text{with} \quad \delta\phi(x_1) = \delta\phi(x_2) = 0 \quad (x_1 = (\mathbf{x}, t_1), x_2 = (\mathbf{x}, t_2))$$

である。このとき、

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \mathcal{L}(\phi_{\min}(x) + \delta\phi(x), \partial_\mu \phi_{\min}(x) + \partial_\mu (\delta\phi(x)))$$

である。実際は、

$$\phi(x) = \phi_{\min}(x) + \lambda \eta(x) \quad \& \quad \delta\phi(x) = \lambda \eta(x)$$

として、取り扱うので

$$\partial_\mu (\delta\phi(x)) = \partial_\mu (\phi(x) - \phi_{\min}(x)) = \partial_\mu \phi(x) - \partial_\mu \phi_{\min}(x) \equiv \delta(\partial_\mu \phi(x))$$

つまり、

$$\partial_\mu (\delta\phi(x)) = \delta(\partial_\mu \phi(x))$$

である。これを使えば、

$$\mathcal{L}(\phi_{\min}(x) + \delta\phi(x), \partial_{\mu}\phi_{\min}(x) + \partial_{\mu}(\delta\phi(x))) = \mathcal{L}(\phi_{\min}(x) + \delta\phi(x), \partial_{\mu}\phi_{\min}(x) + \delta(\partial_{\mu}\phi(x)))$$

になる。テーラー展開を用いれば、

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\phi_{\min}(x) + \delta\phi(x), \partial_{\mu}\phi_{\min}(x) + \partial_{\mu}(\delta\phi(x))) \\ &= \mathcal{L}(\phi_{\min}(x), \partial_{\mu}\phi_{\min}(x)) + \left. \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial\phi(x)} \right|_{\phi=\phi_{\min}} \delta\phi(x) + \left. \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial(\partial_{\nu}\phi(x))} \right|_{\phi=\phi_{\min}} \partial_{\nu}(\delta\phi(x)) \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x)) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \left[\mathcal{L}(\phi_{\min}(x), \partial_{\mu}\phi_{\min}(x)) + \left. \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial\phi(x)} \right|_{\phi=\phi_{\min}} \delta\phi(x) + \left. \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial(\partial_{\nu}\phi(x))} \right|_{\phi=\phi_{\min}} \partial_{\nu}(\delta\phi(x)) \right] \end{aligned}$$

である。従って、

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \left[\mathcal{L}(\phi_{\min}(x) + \delta\phi(x), \partial_{\mu}\phi_{\min}(x) + \partial_{\mu}(\delta\phi(x))) - \mathcal{L}(\phi_{\min}(x), \partial_{\mu}\phi_{\min}(x)) \right] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \left[\left. \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial\phi(x)} \right|_{\phi=\phi_{\min}} \delta\phi(x) + \left. \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial(\partial_{\nu}\phi(x))} \right|_{\phi=\phi_{\min}} \partial_{\nu}(\delta\phi(x)) \right] \end{aligned}$$

もし、

$$\delta I = 0$$

のとき、

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x)) = \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \mathcal{L}(\phi_{\min}(x), \partial_{\mu}\phi_{\min}(x))$$

になるので、量子場の $\phi(x)$ は、最小作用を与えることになり、観測してないときの量子場の運動を正しく記述することがわかる。このことを

- $\delta I = 0$ は作用 I の不変性

という。そこで、

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial(\partial_{\mu}\phi(x))} \partial_{\nu}(\delta\phi(x)) = \partial_{\nu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial(\partial_{\mu}\phi(x))} \delta\phi(x) \right) - \left(\partial_{\nu} \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial(\partial_{\mu}\phi(x))} \right) \delta\phi(x)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \left. \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial(\partial_{\nu}\phi(x))} \right|_{\phi=\phi_{\min}} \partial_{\nu}(\delta\phi(x)) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \left[\partial_{\nu} \left(\left. \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial(\partial_{\mu}\phi(x))} \right|_{\phi=\phi_{\min}} \delta\phi(x) \right) - \left. \frac{\partial\mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))}{\partial(\partial_{\nu}\phi(x))} \right|_{\phi=\phi_{\min}} \delta\phi(x) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_1}^{x_2} d\sigma^\nu \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial(\partial_\nu \phi(x))} \Big|_{\phi=\phi_{\min}} \delta\phi(x) - \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial(\partial_\nu \phi(x))} \Big|_{\phi=\phi_{\min}} \right) \delta\phi(x) \\
&= - \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial(\partial_\nu \phi(x))} \Big|_{\phi=\phi_{\min}} \right) \delta\phi(x)
\end{aligned}$$

Appendix 1 参照

である。従って、

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2} dx^4 \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \phi(x)} \Big|_{\phi=\phi_{\min}} \delta\phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial(\partial_\nu \phi(x))} \Big|_{\phi=\phi_{\min}} \partial_\nu (\delta\phi(x)) \right] \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \phi(x)} \Big|_{\phi=\phi_{\min}} \delta\phi(x) - \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial(\partial_\nu \phi(x))} \Big|_{\phi=\phi_{\min}} \right) \delta\phi(x) \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \phi(x)} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial(\partial_\nu \phi(x))} \right) \Big|_{\phi=\phi_{\min}} \delta\phi(x) = 0
\end{aligned}$$

より、任意の $\delta\phi(x)$ に対して成立するので、

$$\boxed{\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial(\partial_\nu \phi(x))} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial \phi(x)}}$$

が現れる。これを、**ラグランジュの運動方程式**という。

エネルギー保存則

ここで、ラグランジアンの変換性そのものを見てみよう。このとき、

$$\delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\nu \phi)} \delta(\partial_\nu \phi)$$

になる。ここで特に、

$$\begin{aligned}
\delta\phi(x) &= \phi(x+\delta x) - \phi(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu, \quad \delta\partial_\nu \phi(x) = \partial_\nu \phi(x+\delta x) - \partial_\nu \phi(x) = \frac{\partial(\partial_\nu \phi(x))}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \\
\delta \mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}(x+\delta x) - \mathcal{L}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu
\end{aligned}$$

とする（この場合には、 $\delta\partial_\nu \phi(x) \neq \partial_\nu \delta\phi(x)$ に注意する）と、

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\rho} \delta x^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\nu \phi)} \delta(\partial_\nu \phi) \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\rho} \delta x^\rho + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\nu \phi)} \frac{\partial(\partial_\nu \phi(x))}{\partial x^\rho} \delta x^\rho
\end{aligned}$$

より、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial (\partial_\nu \phi)} \frac{\partial (\partial_\nu \phi(x))}{\partial x^\rho}$$

ここで

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial (\partial_\nu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \phi}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\rho} &= \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial (\partial_\nu \phi)} \frac{\partial (\partial_\nu \phi(x))}{\partial x^\rho} \\ &= \left(\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial (\partial_\nu \phi)} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial (\partial_\nu \phi)} \partial_\rho \partial_\nu \phi(x) \\ &= \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}{\partial (\partial_\nu \phi)} \partial^\rho \phi \right) \end{aligned}$$

もう少し整理すると、

$$g_\rho^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \partial_\rho \phi \right) \Rightarrow \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} \partial_\rho \phi - g_\rho^\nu \mathcal{L} \right) = 0 \Rightarrow \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0$$

$$g_{\mu\nu} = \text{diag.}(1, -1, -1, -1), \quad g_\rho^\nu = \text{diag.}(1, 1, 1, 1) (= \delta_\rho^\nu)$$

になる。つまり、

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

は保存する。この $T_{\mu\nu}$ を **エネルギー・運動量テンソル** といい、特に、エネルギー \mathcal{H} は

$$\mathcal{H} = T_{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 \phi)} \partial_0 \phi - \mathcal{L}$$

で与えられる。また、4次元運動量を \mathcal{P}_μ とすると

$$\mathcal{P}_\mu = T_{\mu 0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^0 \phi)} \partial_0 \phi - g_{\mu 0} \mathcal{L}$$

である。

対称化されたエネルギー・運動量テンソル

運動量は、

$$\mathcal{P}_\mu = T_{\mu 0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_0 \phi - g_{\mu 0} \mathcal{L}$$

であるが、一方、

$$\mathcal{P}_\mu = T_{0\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} \partial_\mu \phi - g_{0\mu} \mathcal{L}$$

で定義もできそうであるが、これと、 $\mathcal{P}_\mu = T_{\mu 0}$ では、 $T_{\mu 0} \neq T_{0\mu}$ なので、違う結果を与えそうである。実際は、ボーズ量子場の場合、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right]$$

なので、

$$T_{0\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi)} \partial_\mu \phi - \mathcal{L} = (\partial_0 \phi)(\partial_\mu \phi) - g_{\mu 0} \mathcal{L}$$

$$T_{\mu 0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_0 \phi - \mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial_0 \phi) - g_{0\mu} \mathcal{L}$$

が得られ、 $T_{0\mu} = T_{\mu 0}$ なので、

$$\mathcal{P}_\mu = T_{0\mu} = T_{\mu 0}$$

が成立している。そこで、見た目にも対称化されたエネルギー・運動量テンソルを定義しておくといよい。ボーズ量子場の場合には、

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

である。

対称化されたエネルギー・運動量テンソルを求めるには

● アインシュタイン重力がエネルギー・運動量テンソルをもつことを利用すると簡単である。アインシュタイン重力を導入すると、不変作用は、

$$I = \int d^4x \sqrt{-g(x)} \mathcal{L}(x)$$

になる。ここに、 g は $\det(g)$ の略記であり、

$$g(x)_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} = \text{diag.}(1, -1, -1, -1)$$

なので、「弱い重力」の場合に、 $\det(g) \approx \det(\eta) = -1$ になるので、 $\sqrt{\quad}$ の中は、 $\sqrt{-g}$ である。

ここで、重力(場)の $g_{\mu\nu}$ を少し変化させると、この章末の「Appendix 2」より

$$\delta \det(g) = \det(g) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

なので、

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &\Rightarrow \delta (-\det(g))^{-1/2} = -\frac{\delta(-\det(g))}{2(-\det(g))^{-1/2}} = \frac{\delta \det(g)}{2(-\det(g))^{-1/2}} = \frac{\det(g) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}}{2(-\det(g))^{-1/2}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-\det(g)} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

を得る。つまり、

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

なので、

$$\begin{aligned} \delta I &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}(x)) = \int d^4x \left((\delta \sqrt{-g}) \mathcal{L}(x) + \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}(x) \right) \\ &= \int d^4x \left(\left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \mathcal{L}(x) + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} \left(-g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x) + 2 \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

になる。そこで、

$$\delta I = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^g \delta g^{\mu\nu}$$

で対称化されたエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}^g$ を定義すると、

$$T_{\mu\nu}^g = 2 \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x)$$

これは、 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ なので、

$$T_{\mu\nu}^g = T_{\nu\mu}^g$$

と対称化されていることが分かる。このとき、ラグランジアン \mathcal{L} は、

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2)$$

なので、

$$T_{\mu\nu}^g = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x) = T_{\mu\nu}$$

になり、 $T_{\mu\nu}$ と一致することがわかる。

Appendix 1 : 4次元の表面積分

$$\int_{x_1}^{x_2} dx^4 \partial^\mu f_\mu(x) = \int_{x_1}^{x_2} d\sigma^\mu f_\mu(x)$$

が成立するが、ここに、

$$d\sigma^\mu = \left(dx^1 dx^2 dx^3, dx^2 dx^3 dx^0, dx^3 dx^0 dx^1, dx^0 dx^1 dx^2 \right)$$

である。この表式は、ローレンツ不変なので、好きな系で計算すればよい。そこで、

$$\begin{aligned} x^0 &= \text{一定 (時間を特別視する我々の世界)} \Rightarrow dx^0 = 0 \\ \Rightarrow d\sigma^\mu &= \left(dx^1 dx^2 dx^3, 0, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

で実行すると、

$$\int_{x_1}^{x_2} dx^4 \partial^\mu f_\mu(x) = \int_{x_1}^{x_2} d\sigma^\mu f_\mu(x) = \int_{x_1}^{x_2} dx f_0(x) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \int_{x_1}^{x_2} dx f_0(x, t_2) - \int_{x_1}^{x_2} dx f_0(x, t_1)$$

である。ここで、

$$f_\nu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi_{\min}(x), \partial_\mu \phi_{\min}(x))}{\partial(\partial^\nu \phi(x))} \delta\phi(x)$$

なので、

$$f_0(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi_{\min}(x), \partial_\mu \phi_{\min}(x))}{\partial(\partial^0 \phi(x))} \delta\phi(x)$$

を代入して

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx^4 \partial^\mu f_\mu(x) &= \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x, t_2), \partial_\mu \phi(x, t_2))}{\partial(\partial^0 \phi(x, t_2))} \delta\phi(x, t_2) - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x, t_1), \partial_\mu \phi(x, t_1))}{\partial(\partial^0 \phi(x, t_1))} \delta\phi(x, t_1) \\ &\Leftarrow \delta\phi(x, t_1) = \delta\phi(x, t_2) = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

即ち、

$$\int_{x_1}^{x_2} d\sigma^\nu \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial(\partial^\nu \phi(x))} \Big|_{\phi=\phi_{\min}} \delta\phi(x) = 0$$

とわかる。

Appendix 2 : $\det(g)$ の変分

$\det(g)$ の定義は、

$$\det(g) = \sum \frac{1}{4!} \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} g^{\mu_3 \nu_3} g^{\mu_4 \nu_4}$$

なので、

$$\delta \det(g) = \delta \left(\sum \frac{1}{4!} \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} g^{\mu_3 \nu_3} g^{\mu_4 \nu_4} \right) = \sum \frac{1}{3!} \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4} g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} g^{\mu_3 \nu_3} \delta g^{\mu_4 \nu_4}$$

ここで、

$$(g^{-1})_{\mu\nu} = \frac{1}{\det(g)} \sum \frac{1}{3!} \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu} g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} g^{\mu_3 \nu_3}$$

$$(g^{-1})_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \frac{1}{\det(g)} \sum \frac{1}{3!} \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu} g^{\mu_1 \nu_1} g^{\mu_2 \nu_2} g^{\mu_3 \nu_3} g^{\nu\mu} = \frac{4!4! \det(g)}{\det(g) 3!4!} = 4$$

である。これより、

$$\delta \det(g) = \det(g) (g^{-1})_{\mu_4 \nu_3} \delta g^{\mu_4 \nu_4}$$

一方、

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho} = (I)_{\mu}^{\rho} \Rightarrow (g^{-1})_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = (g^{-1}g)^{\rho}_{\mu} = (I)_{\mu}^{\rho} \Rightarrow g_{\mu\nu} = (g^{-1})_{\mu\nu}$$

なので、

$$\delta \det(g) = \det(g) (g^{-1})_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \det(g) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

つまり、

$$\boxed{\delta \det(g) = \det(g) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}}$$

である。