

# 08 複素フーリエ級数

フーリエ級数は、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (\text{周期: } 2\pi) \quad (8.1)$$

であった。ところで、

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x} \quad (8.2)$$

なので、

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \quad (8.3)$$

を得る。そこで、(8.3)を(8.1)に代入すると

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right) \quad (8.4)$$

より、新たな係数  $c_k$  と  $d_k$  を用いて書き換えると、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + d_k e^{-ikx}) \quad (8.5)$$

ここで、

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad d_k = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (8.6)$$

である。ただし、

- $f(x)$  が実数の関数であるので  $d_k = c_k^*$  が成立している

することに注意する。また、

$$e^{ikx} \Big|_{k=-1, -2, -3, \dots} = e^{-ikx} \Big|_{k=1, 2, 3, \dots} \quad (8.7)$$

に注意して、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-ikx} &= d_1 e^{-ix} + d_2 e^{-i2x} + d_3 e^{-i3x} + \dots = d_{-(-1)} e^{i(-1)x} + d_{-(-2)} e^{i(-2)x} + d_{-(-3)} e^{i(-3)x} + \dots \\ &= \sum_{k=-1}^{-\infty} d_{-k} e^{ikx} = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{ikx} \quad (c_k = d_{-k}: k=-1, -2, -3, \dots) \end{aligned} \quad (8.8)$$

を得る。これを(8.5)に代入して、 $c_0 = c_0 e^{ikx} \Big|_{k=0}$  を用いると、

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + d_k e^{-ikx}) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (8.9)$$

になる。ここで、 $d_k = c_k^*$ 、つまり、「 $f(x)$  が実数の関数」なので、

$$c_{-k} = c_k^* \quad (8.10)$$

である。以上から、周期  $2\pi$  の関数  $f(x)$  のフーリエ変換は

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \left( \text{但し、} f(x) \text{が実関数のとき、} c_{-k} = c_k^* \right) \quad (8.11)$$

になった。

さて、「第四章フーリエ級数」で調べた(8.1)と同様に

- $f(x)$  の展開ができるには、係数、 $c_{k=1 \dots \infty}$  &  $c_{k=-1 \dots -\infty}$ 、がわかる必要

がある。そこで、(4.2)の「三角関数の積分の性質」と同じ性質を利用する。つまり、

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx \quad (m, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \pm \infty) = \begin{cases} 2\pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} = 2\pi \delta_{mn} \quad (8.12)$$

を得る。 $\delta_{mn}$ は(4.16)で与えられたクロネッカーのデルタである。これを用いると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \right) e^{-imx} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k 2\pi \delta_{km} \quad (8.13)$$

である。ここで(4.19)を用い

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k 2\pi \delta_{km} = 2\pi c_m \quad (8.14)$$

従って、

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx \quad (8.15)$$

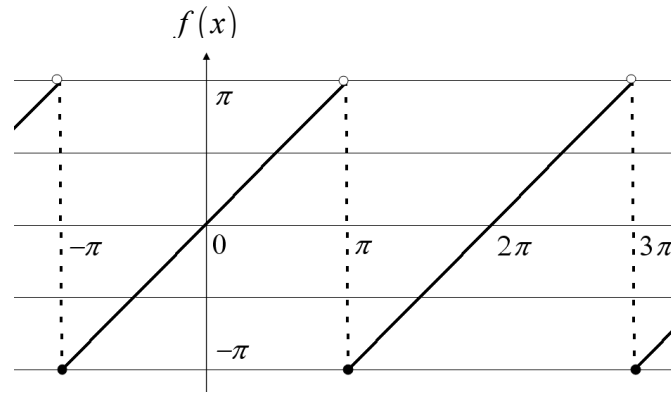
とわかる。以上から

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{【公式】} f(x) \text{は複素周期関数} \\ f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (\text{周期: } 2\pi) \dots c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \end{array}} \quad (8.16)$$

(\*)但し、 $f(x)$ が実周期関数のとき、 $c_{-k} = c_k^*$

### 例題

「第四章フーリエ級数」で調べた、周期  $2\pi$  の関数  $f(x) = x \quad (-\pi \leq x < \pi)$



の複素フーリエ級数を求めよ。

$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  (周期:  $2\pi$ ) において、 $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$  で係数が求まるので、

$$k=0 \text{ の時: } c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0 \quad (8.17)$$

$$k \neq 0 \text{ の時: } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx = \frac{i(-1)^k}{k}$$

である。従って、

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx \quad (8.18)$$

(8.18)は(4.15)の結果と一致することがわかる。

## 第七回目レポート

レポートの回数(七回目)、学生証番号と氏名を明記すること  
必ず表紙を付ける (A4レポート用紙使用のこと)

1) 「 $f(x)$ が実数の関数」のとき、(8.10)を導け。

2) (8.12)を導け。

3) 例題の  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx$  の計算について以下の問いに答えよ。

A)  $\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx$  の部分積分を用いて、 $k \neq 0$  の時に  $\int x e^{-ikx} dx = -\frac{1}{ik} \left( \frac{1}{ik} + x \right) e^{-ikx}$  を求めよ。

B) A) を用いて(8.17)を導け。

C) (8.18)を導け。  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikx} + c_0 e^{i0x} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k=\infty}^1 c_{-k} e^{i(-k)x} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikx}$  を

用いると良い。