

07 フーリエ級数 - 関数の偶奇性

前章の例題では、

$$f(x) = x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (7.1)$$

から、

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (7.2)$$

であった。ここで、 $a_0 = a_n = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を求めるのに積分

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (7.3)$$

を計算して求めたが、実は関数の偶奇性に着目すると、計算する前に自動的に

$$a_0 = a_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (7.4)$$

がわかる。

関数の偶奇性

関数の偶奇性とは、変数の x を $-x$ に変更したときの関数の値である：

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x): \text{偶関数} (\cos x \text{等}) \\ f(-x) &= -f(x): \text{奇関数} (\sin x \text{等}) \end{aligned} \quad (7.5)$$

と呼んでいる。一般には偶奇性の決まっていないが

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (7.6)$$

となっているので、

$$f_{\text{偶}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_{\text{奇}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (7.7)$$

とすれば、自動的に、

$$f(-x)_{\text{偶}} = f(x)_{\text{偶}}, \quad f(-x)_{\text{奇}} = -f(x)_{\text{奇}}: \text{奇関数} \quad (7.8)$$

が満たされる。

上述のように、 $(-\pi, \pi)$ で積分すると、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^0 f(x) \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \, dx \stackrel{x'=-x}{=} \int_{(-\pi)}^0 f(-x') \, d(-x') + \int_0^{\pi} f(x) \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi}^0 f(-x) d(-x) + \int_0^{\pi} f(x) dx = -\int_{\pi}^0 f(-x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \\
&= \overset{\text{積分方向を逆に}}{-\left(-\int_0^{\pi} f(-x) dx\right)} + \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} f(-x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx \\
&= \int_0^{\pi} (f(x) + f(-x)) dx
\end{aligned} \tag{7.9}$$

ここで、奇関数は

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) + f(-x) = 0 \tag{7.10}$$

なので、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (f(x) + f(-x)) dx = 0 \tag{7.11}$$

になる。従って、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0: \text{奇関数} \tag{7.12}$$

さて、関数の偶奇性を利用すると、 $f(x) = x$ は、

● 奇関数

なので、

$$f(x) = x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{7.13}$$

で偶関数の部分の

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{7.14}$$

は自動的に消えているはず。つまり、

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{7.15}$$

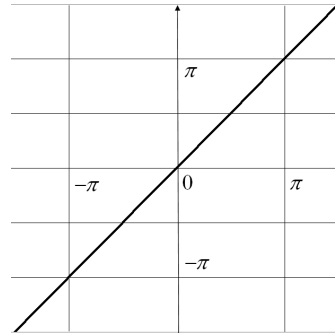
と展開されるはずである。仮に、 a_0, a_n ($n=1, 2, 3, \dots$) と展開できるとしても

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx \overset{x \text{ は奇関数}}{=} 0 \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \overset{x \cos nx \text{ は奇関数}}{=} 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)
\end{aligned} \tag{7.16}$$

と奇関数の性質を使って積分しなくても $a_0 = a_n = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) がわかる。

周期関数 $f(x)=x$

さて、関数 $f(x)=x$ を図示すると、

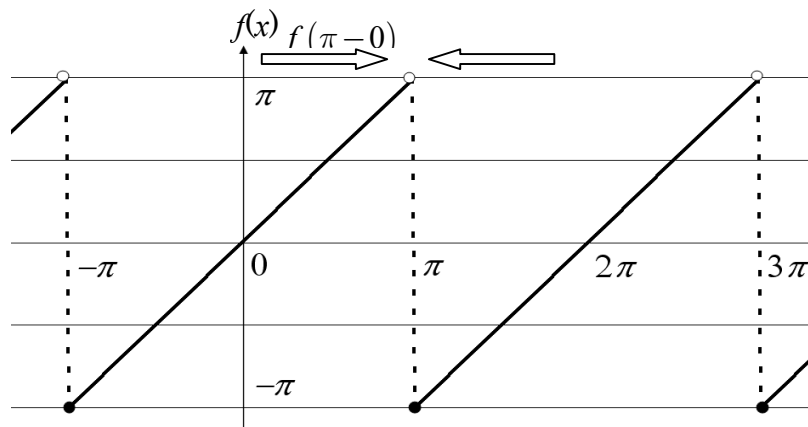


であるが、

- フーリエ級数に関係付けれるのは周期関数

なので、周期 2π の関数 x ($-\pi \leq x < \pi$) に拡張する。周期 2π の関数は周期的になるので、

$-\pi \leq x < \pi$ の関数のグラフを繰り返すと・・・



のようなグラフになる。この図から明らかなように、

● $x = \pi$ (や $x = -\pi$ 等) で不連続な有限の飛びがある。

- 左から $x = \pi$ に近づくと $f(\pi) = \pi$
- 右から $x = \pi$ に近づくと $f(\pi) = -\pi$

であり、それぞれ、

$$\begin{aligned} f(\pi-0) & \left(\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\pi - \varepsilon) \right) = \pi \\ f(\pi+0) & \left(\equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\pi + \varepsilon) \right) = -\pi \end{aligned} \tag{7.17}$$

と表記する。このように $x \rightarrow \pi$ の極限では、 $f(x)$ は一つの値をとらない。

一方、この周期関数のフーリエ展開：

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \tag{7.18}$$

では、

$$x = \pi \Rightarrow \begin{cases} \text{左辺: } \pi \\ \text{右辺: } 0 \leftarrow \sin nx = 0 \end{cases} \quad (7.19)$$

なので、右辺と左辺が一致しない。従って、

- 不連続点での元関数とそのフーリエ級数は一致しない!!!

ことがわかる。そこで、元関数 $f(x)$ のフーリエ級数を $S(x)$ とするとき、

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x \\ S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \end{aligned} \right\} (-\pi \leq x < \pi) \quad (7.20)$$

であるが、 $x \rightarrow \pi$ では、

$$\begin{aligned} f(\pi-0) &= \pi, \quad f(\pi+0) = -\pi \\ S(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

になる。これらより、単純に

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad (7.22)$$

が成立しているが、これが

- 不連続点でのフーリエ級数の値

になる。一方、連続点では

$$f(\pi-0) = f(\pi+0) = f(\pi) \quad (7.23)$$

なので、やはり、 $S(x) = f(x)$ になるので、すべての x で

- $f(x)$ のフーリエ級数は $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$

がわかる。

第五回目レポート

レポートの回数(五回目)、学生証番号と氏名を明記すること
必ず表紙を付ける (A4 レポート用紙使用のこと)

1) $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$ について。

● フーリエ級数を求めよ。

● 偶関数 : $f_E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ と 奇関数 : $f_O(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ にわけると、

$f(x) = f_E(x) + f_O(x)$ である。 $f(x)$ のフーリエ級数の代わりに $f_E(x)$ と $f_O(x)$ のフーリエ級数を求め、その級数の和として表せ。

2) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx$ を用いて、 $x = \frac{\pi}{2}$ を代入した右辺を第10項まで計算し、各項の値

を書き、 $\frac{\pi}{2}$ の値を求め、 $\frac{\pi}{2} = 1.5707963268$ と比較せよ (1.669841 くらいになる)。