

05・06 フーリエ級数

ここでは、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (\text{周期: } 2\pi) \quad (5.1)$$

について調べる。

- $f(x)$ の展開ができるには、係数、 $a_0, a_{k=1 \dots \infty}$ & $b_{k=1 \dots \infty}$ 、がわかる必要

がある。そこで、次の三角関数の積分の性質

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx \quad (m = 1, 2, 3 \dots \infty) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx \quad (m = 1, 2, 3 \dots \infty) = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots \infty) &= \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} = \pi \delta_{mn} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots \infty) &= \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} = \pi \delta_{mn} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots \infty) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

が役に立つ。¹ つまり、

1) 係数 a_0 :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right) = \frac{a_0}{2} 2\pi = a_0 \pi \end{aligned} \quad (5.3)$$

なので

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (5.4)$$

2) 係数 $a_{k=1 \dots \infty}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m = 1, 2, 3 \dots \infty) \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos mx \cos kx + b_k \cos mx \sin kx) \right] dx \end{aligned}$$

¹ $\int_{-\pi}^{\pi}$ は、積分範囲が周期 2π であればよいので、 $\int_0^{2\pi}$ や $\int_{-2\pi}^0$ 等でもよい。

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\cos mx \cos kx dx}^{\begin{cases} \pi & (k=m) \\ 0 & (k \neq m) \end{cases}} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\cos mx \sin kx dx}^{\begin{cases} \pi & (k=m) \\ 0 & (k \neq m) \end{cases}} \right) \quad (5.5) \\
&= \underbrace{a_1 \times 0}_{k=1} + \underbrace{a_2 \times 0}_{k=2} + \underbrace{a_3 \times 0}_{k=3} + \cdots + \underbrace{a_{m-1} \times 0}_{k=m-1} + \underbrace{a_m \times \pi}_{k=m} + \underbrace{a_{m+1} \times 0}_{k=m+1} + \cdots = a_m \pi
\end{aligned}$$

なので

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m=1, 2, 3 \cdots \infty) \quad (5.6)$$

3) 係数 $b_{k=1 \cdots \infty}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \quad (m=1, 2, 3 \cdots \infty) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \sin mx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin mx \cos kx + b_k \sin mx \sin kx) \right] dx \\
&= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\cos mx dx}^{\begin{cases} \pi & (k=m) \\ 0 & (k \neq m) \end{cases}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos kx dx}^{\begin{cases} \pi & (k=m) \\ 0 & (k \neq m) \end{cases}} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(b_k \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\sin mx \sin kx dx}^{\begin{cases} \pi & (k=m) \\ 0 & (k \neq m) \end{cases}} \right) \quad (5.7) \\
&= \underbrace{b_1 \times 0}_{k=1} + \underbrace{b_2 \times 0}_{k=2} + \underbrace{b_3 \times 0}_{k=3} + \cdots + \underbrace{b_{m-1} \times 0}_{k=m-1} + \underbrace{b_m \times \pi}_{k=m} + \underbrace{b_{m+1} \times 0}_{k=m+1} + \cdots = b_m \pi
\end{aligned}$$

なので

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \quad (m=1, 2, 3 \cdots \infty) \quad (5.8)$$

以上から、係数が計算でき、

<p>【公式】 $f(x)$は周期関数</p> $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (\text{周期: } 2\pi)$	$ \begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k=1, 2, 3 \cdots \infty) \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k=1, 2, 3 \cdots \infty) \end{cases} $
---	---

(5.9)

になる。

例題

【例1】 $f(x) = \sin^2 x$ (公式の積分はしなくて良い例)

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ を使って、 } f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \text{ なので、} \quad (5.10)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (\text{周期: } 2\pi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

より、

$$a_0 = 1, a_2 = -\frac{1}{2}, a_1 = a_k = 0 \quad (k = 3, 4, \dots) \quad (5.11)$$

がわかる。

【例2】周期 2π の関数 $f(x) = x \quad (-\pi \leq x < \pi)$: 周期関数でないといけない。²

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} [\pi^2 - (-\pi)^2] = 0$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx \stackrel{\text{部分積分}}{=} \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{x}^{\text{微分}} \overbrace{\cos kx}^{\text{積分}} dx + \left[\overbrace{x \cos kx}^{\text{積分}} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{k} \sin kx \right) dx + \left[x \left(\frac{1}{k} \sin kx \right) \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \stackrel{\text{積分}}{\leftarrow} \cos kx = \int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(- \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx + \frac{1}{k} \left[\pi \sin k\pi - \overbrace{(-\pi) \sin k(-\pi)}^{\pi \sin k\pi} \right] \right) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx \stackrel{\text{部分積分}}{=} \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{x}^{\text{微分}} \overbrace{\sin kx}^{\text{積分}} dx + \left[\overbrace{x \sin kx}^{\text{積分}} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{1}{k} \cos kx \right) dx + \left[x \left(-\frac{1}{k} \cos kx \right) \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \stackrel{\text{積分}}{\leftarrow} \sin kx = \int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx - \frac{1}{k} \left[\pi \cos k\pi - \overbrace{(-\pi) \cos k(-\pi)}^{=\cos k\pi} \right] \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{k} (\pi \cos k\pi + \pi \cos k\pi) \\ &= -\frac{2 \cos k\pi}{k} = -\frac{2}{k} \times \begin{cases} 1 & (k = 2, 4, 6, \dots) \\ -1 & (k = 1, 3, 5, \dots) \end{cases} = -\frac{2}{k} (-1)^k = \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

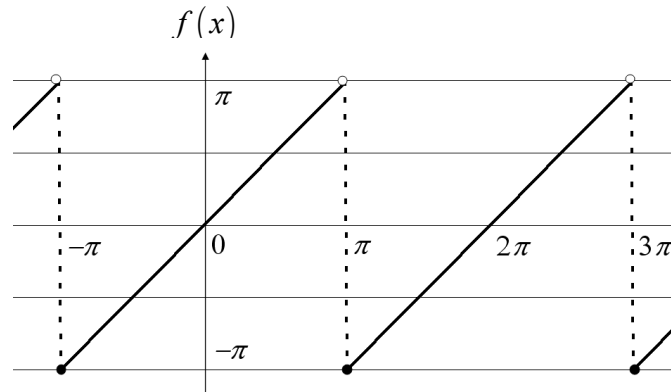
従って、

$$a_0 = a_k = 0, b_k = \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.14)$$

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x < \pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin kx \quad (5.15)$$

とわかる。この関数は、図で示すと、

² 通常の関数 $f(x) = x \quad (-\infty < x < \infty)$ は、周期関数で無いので、フーリエ級数にはできない。



のように、 $x = -\pi \sim \pi$ の関数の繰り返しになっている。

直交関数

(5.2)をもう少し考えてみる。ここで着目すべきは、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots \infty) = \pi \delta_{mn} \quad (5.16)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots \infty) = \pi \delta_{mn}$$

に現れるクロネッカーのデルタ (δ)

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (5.17)$$

である。以下、 $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots \infty) = \pi \delta_{mn}$ を例にとって説明を続ける。さて、

(5.16)の $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots \infty) = \pi \delta_{mn}$ から両辺を $\pi (= \sqrt{\pi} \sqrt{\pi})$ で割ると

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right) dx \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots \infty) = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} = \delta_{mn} \quad (5.18)$$

のと表わせる。これを逆から眺めてみると

$$\delta_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right) dx \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots \infty) \quad (5.19)$$

であり、(5.19)から

● クロネッカーのデルタ (δ) の計算方法が三角関数の積分

と読み取れる。そこで、他にも「クロネッカーのデルタ (δ) の計算方法」がないか調べてみることにする。

3次元座標を行列

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \langle 1| = (1 \ 0 \ 0) \dots x\text{軸単位ベクトル}$$

$$|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \langle 2| = (0 \ 1 \ 0) \dots y\text{軸単位ベクトル}$$

$$|3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \langle 3| = (0 \ 0 \ 1) \cdots z\text{軸単位ベクトル} \quad (5.20)$$

を用いて表す事ができるが、任意の座標は、

$$|f\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x|1\rangle + y|2\rangle + z|3\rangle, \langle f| = (x \ y \ z) = x\langle 1| + y\langle 2| + z\langle 3| \quad (5.21)$$

と分解できる。特に、(5.20)に行列の計算を適用して

$$\langle 1|1\rangle = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \langle 1|2\rangle = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \langle 1|3\rangle = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.22)$$

などと計算でき、

$$\begin{cases} \langle 1|1\rangle = \langle 2|2\rangle = \langle 3|3\rangle = 1 \\ \langle 1|2\rangle = \langle 2|3\rangle = \langle 1|3\rangle = 0 \\ \langle 2|1\rangle = \langle 3|2\rangle = \langle 3|1\rangle = 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

を得る。これは、(5.17)を用いると

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (5.24)$$

と表せる事になる。この結果を用いると

$$\langle f|f\rangle = (x\langle 1| + y\langle 2| + z\langle 3|)(x|1\rangle + y|2\rangle + z|3\rangle) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5.25)$$

が証明できる。つまり任意の座標の距離の2乗は与えられる。これを

- $|f\rangle$ の大きさ = $\langle f|f\rangle$

と見做すことができる。また、 $|f\rangle$ の座標 x, y, z は

$$\begin{cases} \langle 1|f\rangle = \langle 1|(x|1\rangle + y|2\rangle + z|3\rangle) = x\langle 1|1\rangle = x \\ \langle 2|f\rangle = \langle 2|(x|1\rangle + y|2\rangle + z|3\rangle) = y\langle 2|2\rangle = y \\ \langle 3|f\rangle = \langle 3|(x|1\rangle + y|2\rangle + z|3\rangle) = z\langle 3|3\rangle = z \end{cases} \quad (5.26)$$

で計算できる。

さて、(5.19)を(5.24)の表記法にすると、 $m, n = 1, 2, 3$ に限って

$$\langle m|n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right) dx \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (5.27)$$

を得る。つまり、

- $|m\rangle$ や $\langle m|$ ($m = 1, 2, 3$) は三角関数に基づく

ことになり、対応をよくするために、(5.27)を

$$\boxed{m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx} \quad (5.28)$$

で表わせば、

$$\boxed{\langle m|n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} m(x) n(x) dx \quad (m, n = 1, 2, 3)} \quad (5.29)$$

と規則的な関数で表わせる。このとき、(5.21)に対応して、添え字1,2,3を用いて係数 $c_{1,2,3}$ とすれば

$$\begin{cases} |f\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle \\ \langle f| = c_1\langle 1| + c_2\langle 2| + c_3\langle 3| \end{cases} \quad (5.30)$$

と表わせる。(5.29)を考慮すると $\langle f|f \rangle$ は

$$\boxed{\langle f|f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) f(x) dx} \quad (5.31)$$

で計算することになる。そこで、(5.25)と(5.26)に対応して、

$$\langle f|f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) f(x) dx = (c_1\langle 1| + c_2\langle 2| + c_3\langle 3|)(c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle) = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \quad (5.32)$$

となり、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) f(x) dx = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \sum_{k=1}^3 c_k^2 \quad (5.33)$$

を得る。従って

$$\boxed{\langle f|f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^3 c_k^2} \quad (5.34)$$

の公式がわかる。つまり、

● 積分しなくても積分の答えがわかる

ことになる。さらに、(5.26)に対応して、 $m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx$ に注意して

$$\begin{cases} \langle 1|f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \right) f(x) dx = \langle 1|(c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle) = c_1\langle 1|1\rangle = c_1 \\ \langle 2|f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x \right) f(x) dx = \langle 2|(c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle) = c_2\langle 2|2\rangle = c_2 \\ \langle 3|f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3x \right) f(x) dx = \langle 3|(c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle) = c_3\langle 3|3\rangle = c_3 \end{cases} \quad (5.35)$$

を得る。これは統一的に

$$\langle m|f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} m(x) f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = c_m \quad (m = 1, 2, 3) \quad (5.36)$$

とまとめられる。この表式と(5.9)の

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k=1,2,3\cdots\infty) \quad (5.37)$$

を比較すれば、 $k=1,2,3$ に対して

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle k|f \rangle \\ c_k = \langle k|f \rangle \end{cases} \quad (5.38)$$

がわかる。つまり、(5.9)の元の式で

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.39)$$

なので、 $k=1,2,3$ に限れば

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x \\ &= c_1 \mathbf{1}(x) + a_2 \mathbf{2}(x) + a_3 \mathbf{3}(x) \leftarrow k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \end{aligned} \quad (5.40)$$

と表わされていることになる。以上から

$$\begin{cases} |f\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle + c_3 |3\rangle \\ f(x) = c_1 \mathbf{1}(x) + a_2 \mathbf{2}(x) + a_3 \mathbf{3}(x) \end{cases} \begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle k|f \rangle \\ c_k = \int_{-\pi}^{\pi} k(x) f(x) dx = \langle k|f \rangle \end{cases} \quad (5.41)$$

の対応が分かる。

以上から、一般に、 $m, n=1,2,3$ に限らなくても

$$\begin{cases} \langle m|n\rangle = \delta_{mn} \quad (m, n=1,2,\dots,N) \\ |f\rangle = \sum_{k=1}^N c_k |k\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle + \dots + c_N |N\rangle \\ \langle f|f\rangle = \sum_{k=1}^3 c_k^2 \\ c_k = \langle k|f \rangle \end{cases} \quad (5.42)$$

の2通りで表す事ができる。ここで、(5.42)はベクトルでよく知られた関係式を表わし
 $m, n=1,2,3$ の時には、単位ベクトル： $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いて

$$\begin{cases} |1\rangle \Rightarrow \mathbf{i}, \quad \langle 1| \Rightarrow \mathbf{i} \\ |2\rangle \Rightarrow \mathbf{j}, \quad \langle 2| \Rightarrow \mathbf{j} \\ |3\rangle \Rightarrow \mathbf{k}, \quad \langle 3| \Rightarrow \mathbf{k} \end{cases} \quad (5.43)$$

の読み替えをすると、ベクトル表記では

$$\begin{aligned}
 |f\rangle &= c_1|1\rangle + c_2|2\rangle + c_3|3\rangle \Rightarrow \mathbf{f} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k} \\
 \langle f|f\rangle &= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \Rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \quad (= \text{ベクトルの内積}) \\
 c_k = \langle k|f\rangle &\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \langle 1|f\rangle \\ c_2 = \langle 2|f\rangle \\ c_3 = \langle 3|f\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \mathbf{i} \cdot \mathbf{f} \\ c_2 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{f} \\ c_3 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{f} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

と表わせる。この対応より

● $\langle f|f\rangle$ を内積

とよぶ。この内積の計算方法に、例として

1. 行列 $\cdots \langle f|f\rangle \Leftarrow |f\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\langle f| = (x \ y \ z)$
2. 積分 $\cdots \langle f|f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)f(x)dx$
3. ベクトルの内積 $\cdots \langle f|f\rangle = \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}$

の3つを取り扱った。積分で表わす方法は、数学で

● 正規直交関数³

という分野で集約されている。

フーリエ級数と直交関数

で表わしたときに、を用いると、

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx \quad (m, n = 1, 2, 3 \cdots \infty) &= \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} = \pi \delta_{mn} \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx \quad (m, n = 1, 2, 3 \cdots \infty) &= \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} = \pi \delta_{mn}
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

と表記できる。例えば、(5.5)は、

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m = 1, 2, 3 \cdots \infty) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} \cancel{\cos mx} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos mx \cos kx + b_k \cancel{\cos mx \sin kx}) \right] dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{km}
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

となるが、ロネッカーのデルタ (δ) の公式

³ (5.57)で与えられるように自分自身との積分値以外0になる関数を**直交関数**という。また、自分自身との積分値が1になっている関数を**正規直交関数**という。つまり、 $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$ などである。 $\cos nx$ は直交関数ではあるが、自分自身との積分値が

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nxdx = \pi$ のように π であり1でないので、正規直交関数ではない。

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{mk} a_k = a_m, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{mk} O_{kn} = O_{mn}} \quad (5.47)$$

を用いると、たちどころに、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m=1,2,3\cdots\infty) = \pi a_m \quad (5.48)$$

とわかる。更に、(5.45)は

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right) dx \quad (m, n=1,2,3\cdots\infty) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (5.49)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right) dx \quad (m, n=1,2,3\cdots\infty) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

一方、残りの積分は

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx \quad (m=1,2,3\cdots\infty) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx \quad (m=1,2,3\cdots\infty) = 0 \quad (5.50)$$

に合うように拡張して、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 0x \cos 0x dx \quad (n=1,2,3\cdots\infty) = 2\pi = 2\pi\delta_{00} \quad (5.51)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\cos 0x \cos nx}^{m=0, n=1,2,3\cdots} dx \quad (n=1,2,3\cdots\infty) = 0 = \delta_{mn} \quad (5.52)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{\sin 0x \sin nx}^{m=0, n=1,2,3\cdots} dx \quad (m, n=1,2,3\cdots\infty) = 0 = \delta_{mn}$$

と表せる。

(5.51)を(5.49)の表式としてまとめるために、0番目を

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos 0x \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos 0x \right) dx \quad (n=1,2,3\cdots\infty) = \delta_{00} \quad (5.53)$$

とする。以上をまとめると

$$\int_{-\pi}^{\pi} C_m(x) C_n(x) dx \quad \overbrace{(m, n=0,1,2,3\cdots\infty)}^{0が追加されている} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_m(x) S_n(x) dx \quad (m, n=1,2,3\cdots\infty) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m=n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (5.54)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_m(x) C_n(x) dx \quad \overbrace{(m, n=0,1,2,3\cdots\infty)}^{0が追加されている} = 0$$

$$\begin{aligned}
 C_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\
 C_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \\
 S_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx
 \end{aligned}
 \quad (n=1,2,3\cdots\infty)
 \tag{5.55}$$

と表記できることがわかる。更に、この表式から積分記号を隠して、

$$\left. \begin{aligned}
 \langle C_m | C_n \rangle &= \langle S_m | S_n \rangle = \delta_{mn} \\
 \langle C_m | S_n \rangle &= 0 \\
 \langle S_m | S_n \rangle &= \delta_{mn}
 \end{aligned} \right\} (m, n = 0, 1, 2, 3 \cdots \infty)
 \tag{5.56}$$

という表記にすることがある。この表式を

● 内積

という。

実際の計算は積分を用いて

$$\begin{aligned}
 \langle C_m | C_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} C_m(x) C_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (m, n = 0, 1, 2, 3 \cdots \infty) \\
 \langle S_m | S_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} S_m(x) S_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (m, n = 1, 2, 3 \cdots \infty) \\
 \langle C_m | S_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} C_m(x) S_n(x) dx = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, 3 \cdots \infty)
 \end{aligned}
 \tag{5.57}$$

である。この表記を用いて、形式的に(5.1)を

$$\begin{aligned}
 |f\rangle &= A_0 |C_0\rangle + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k |C_k\rangle + B_k |S_k\rangle) \\
 \langle f| &= A_0 \langle C_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \langle C_k| + B_k \langle S_k|)
 \end{aligned}
 \tag{5.58}$$

と書き換えることができる。(5.58)に(5.56)を用いると

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \langle C_0 | f \rangle = \langle f | C_0 \rangle \\
 A_m &= \langle C_m | f \rangle = \langle f | C_m \rangle \\
 B_m &= \langle S_m | f \rangle = \langle f | S_m \rangle
 \end{aligned}
 \tag{5.59}$$

を得る。実際の計算は積分を用いて、

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \langle C_0 | f \rangle = \langle f | C_0 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} C_0(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) dx \\
 A_m &= \langle C_m | f \rangle = \langle f | C_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} C_m(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mx dx \\
 B_m &= \langle S_m | f \rangle = \langle f | S_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} S_m(x) f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mx dx
 \end{aligned}
 \tag{5.60}$$

と計算し係数を求められる。

関数の大きさ

さて、(5.57)と(5.58)を用いて、自分自身との内積：

$$\langle f|f \rangle \quad (5.61)$$

を計算することができる。これを

- 関数の大きさ (ノルム)

という。

$$\begin{aligned} \langle f|f \rangle &= \left[A_0 \langle C_0| + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \langle C_n| + B_n \langle S_n|) \right] \left[A_0 |C_0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n |C_n\rangle + B_n |S_n\rangle) \right] \\ &= (A_0)^2 \langle C_0|C_0\rangle + A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \langle C_0|C_n\rangle + A_n \langle C_0|S_n\rangle \right) \\ &\quad + A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \langle C_n|C_0\rangle + B_n \langle S_n|C_0\rangle \right) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \langle C_m| + B_m \langle S_m|) \sum_{n=1}^{\infty} (A_n |C_n\rangle + B_n |S_n\rangle) \\ &\Leftrightarrow \langle S_m|S_n\rangle = \delta_{mn} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \\ &\Leftrightarrow \langle C_m|C_n\rangle = \delta_{mn}, \quad \langle C_m|S_n\rangle = \langle S_n|C_m\rangle = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots) \\ &= A_0^2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(A_m A_n \langle C_m|C_n\rangle + B_m A_n \langle S_m|C_n\rangle + A_m B_n \langle C_m|S_n\rangle + B_m B_n \langle S_m|S_n\rangle \right) \\ &= A_0^2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} (A_m A_n \delta_{mn} + B_m B_n \delta_{mn}) = A_0^2 + \sum_{m,n=1}^{\infty} (A_m A_n + B_m B_n) \delta_{mn} \end{aligned} \quad (5.62)$$

になる。ここで、

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (A_m A_n + B_m B_n) \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (A_m A_n + B_m B_n) \delta_{mn} \right) \quad (5.63)$$

は(5.47)を用いて、 $O_{mn} = A_m A_n + B_m B_n$ より、

$$\sum_{m=1}^{\infty} (A_m A_n + B_m B_n) \delta_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} O_{mn} \delta_{mn} = O_{nn} = A_n A_n + B_n B_n = A_n^2 + B_n^2 \quad (5.64)$$

を得る。従って、

$$\langle f|f \rangle = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \quad (5.65)$$

がわかる。⁴ 内積を積分に直しておくと

$$\langle f|f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (5.66)$$

なので、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \quad (5.67)$$

である。ここで、 $\sqrt{\pi} a_k = A_k$, $\sqrt{\pi} b_k = B_k$, $\sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0 = A_0$ を用いて、もとのフーリエ展開：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (5.68)$$

に読み直すと、

⁴ベクトルを $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ とすると、ベクトルの内積 $\langle \mathbf{A}|\mathbf{A} \rangle = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \sum_{n=1}^3 A_n^2$ と同じである。

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)} \quad (5.69)$$

この等式を

- **パーセバルの等式**

といい、この等式がなりたつ直交系を

- **完全系**

という。

完全系でないときには、例えば、

- $|C_0\rangle$ が欠けている

とすると、

$$|f_{\text{展開}}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n |C_n\rangle + B_n |S_n\rangle) \quad (5.70)$$

と展開するが、実際に正しい値の

$$\pi \left(A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \right) \quad (5.71)$$

に対して、

$$\langle f_{\text{展開}} | f_{\text{展開}} \rangle = \sum_{m,n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \quad (5.72)$$

が導かれる。従って

$$\langle f | f \rangle \geq \langle f_{\text{展開}} | f_{\text{展開}} \rangle \quad (5.73)$$

になる。等号が成り立つときに、完全系になる。一般に、展開する直交系が完全系かどうかどうかわからないので、

$$\boxed{\langle f_{\text{展開}} | f_{\text{展開}} \rangle \leq \langle f | f \rangle (= \text{正しい値}) \quad \text{ここに } |f_{\text{展開}}\rangle = \sum_n d_n |n\rangle \quad (\text{with } \langle n | m \rangle = \delta_{mn})} \quad (5.74)$$

になる。これを

- **ベッセルの不等式**

という。

パーセバルの等式の例

周期 2π の関数 x ($-\pi \leq x < \pi$) をフーリエ級数を利用して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (5.75)$$

を証明せよ。(5.14)より

$$a_0 = a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \quad (k=1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (5.76)$$

になる。パーセバルの等式に用いて

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n} (-1)^{n+1} \right]^2 \quad (5.77)$$

より、

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n} (-1)^{n+1} \right]^2 \quad (5.78)$$

左辺は、

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3} \quad (5.79)$$

右辺は、

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n} (-1)^{n+1} \right]^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \quad (5.80)$$

なので、

$$\frac{2\pi^3}{3} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \quad (5.81)$$

つまり、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (5.82)$$

がわかる。

第四回目レポート

レポートの回数(四回目)、学生証番号と氏名を明記すること
必ず表紙を付ける (A4レポート用紙使用のこと)

- 1) (5.2)の積分結果を導け。
- 2) $f(x)=1-3\sin^2 x$ をフーリエ展開せよ。
- 3) A) (5.13)のように部分積分を実行して $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx$ と $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx$ を求めよ。
B) A) の結果を利用して周期 2π の関数 $f(x)=x^2$ のフーリエ級数を求めよ。
- 4) (5.47)の公式を用いて $\sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5 mn\delta_{mn}$ を計算せよ。 $O_{mn} = mn$ とするとよい。
- 5) (5.58)から(5.59)の結果を導け。(5.5)の計算方法を参考にするとよい。
- 6) 3) - B) の結果の「 $f(x)=x^2$ のフーリエ級数」にパーセバルの等式を利用して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \text{ を証明せよ。}$$

- 7) つぎの3つの関数：

$$1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(= \frac{1}{\sqrt{2}} P_1(x) \right)$$

$$2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x \left(= \sqrt{\frac{3}{2}} P_2(x) \right)$$

$$3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (3x^2 - 1) \left(= \sqrt{\frac{5}{2}} P_3(x) \right)$$

で内積を

$$\langle m | n \rangle = \int_{-1}^1 m(x) n(x) dx$$

で計算するとき、(5.57)と同様に

$$\langle m | n \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots)$$

と直交することを示せ。この多項式のシリーズ $P_{1,2,3,4,\dots}(x)$ をルジャンドルの直交関数という。電磁気学でのクーロンポテンシャルの計算に現れ、

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1^2 + t^2 - 2t \cos \theta}} = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \theta) t^k \quad \left(t = \frac{r}{R} \right)$$

である。

微小電荷 δe からのクーロン

$$\text{ポテンシャル} = \frac{\delta e}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}}$$

