

04 はじめてのフーリエ級数

前章で求めた弦の振動解は、

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\pi at}{\ell} + b_k \cos \frac{k\pi at}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (4.1)$$

或いは、

$$u(x,t) = \varphi(x-at) + \phi(x+at) \begin{cases} \varphi(x-at) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + b_k \sin \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right) \\ \phi(x+at) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-a_k \cos \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + b_k \sin \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right) \end{cases} \quad (4.2)$$

と求められ、(4.2)のように

- sin と cos の無限級数

で表わされている。この級数は、

- 両端の固定された弦の微小振動解という特別な場合

にのみ正しい。ところが、ほかの振動現象の解やそれ周期的な関数も「sin と cos の無限級数」で表すことができることがわかっている。教科書によく表れるフーリエ級数の表式に対応させると、(4.2)の $u(x,t)$ の代わりに時間 t を含まない関数 $f(x)$ を用いて、「sin と cos の無限級数」

として、係数を、 a_k, b_k ($k=1,2,\dots,\infty$) として、

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (4.3)$$

と表記する（後ほど、 t を含まない(4.3)からの t を含む(4.2)導く）。更に、

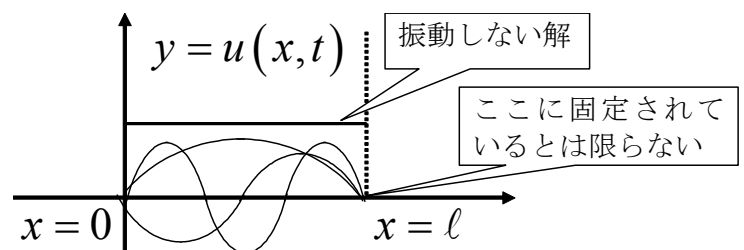
- 弦の振動に特有な条件がまだある

ことに注意する。それは、

- 必ず振動する

である。「必ず振動する」条件をはずすと、一般には振動しない解も許せるはずで、それを考慮すると、

$$f(x) = \text{一定} \quad (4.4)$$



を追加すれば、振動しない解を取り込むことができる。そこで、ここで定数を a_0 とすると、

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (4.5)$$

が最終的な表式になり、¹

● 関数 $f(x)$ のフーリエ級数

といい

● 関数 $f(x)$ は $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$ のフーリエ級数であらわせる

ことになる。つまり

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (\text{周期: } 2\pi)} \quad (4.6)$$

である。このとき、 $\cos kx = \cos k(x+2\pi)$ 、 $\sin kx = \sin k(x+2\pi)$ なので・・・

$$f(x) = f(x+2\pi) \quad (4.7)$$

より周期 2π の関数であることがわかる。もし、周期が任意の長さ 2ℓ であるとき、つまり、

$$f(x) = f(x+2\ell) \quad (4.8)$$

のときにも、同様に

$$\cos \frac{k\pi x}{\ell} = \cos \left(\frac{k\pi x}{\ell} + 2\pi \right) = \cos \frac{k\pi(x+2\ell)}{\ell}, \quad \sin \frac{k\pi x}{\ell} = \sin \left(\frac{k\pi x}{\ell} + 2\pi \right) = \sin \frac{k\pi(x+2\ell)}{\ell} \quad (4.9)$$

なので・・・

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \right) \quad (\text{周期: } 2\ell)} \quad (4.10)$$

であたられることに注意する。

次に、ここで求めたフーリエ級数の一般表式(4.10)を用いて、弦の振動解を見つけてみよう。その前に、弦の解の特徴を調べておく。

微小振動の一般解

微小振動する弦の振幅 $u(x,t)$ は、

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (4.11)$$

で決められた。この方程式の解は、第二章で

$$u(x,t) = \varphi(x-at) + \phi(x+at) \quad (4.12)$$

¹ $\frac{a_0}{2}$ があるは $\frac{1}{2}$ 後々の便宜のためである。ここは $\frac{a_0}{2}$ の代わりに a_0 でもよい。

と表されていた。この解は実際には三角関数を用いて

$$\begin{cases} \varphi(x-at) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + b_k \sin \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right) \\ \phi(x+at) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-a_k \cos \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + b_k \sin \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right) \end{cases} \quad (4.13)$$

で与えられた。実は、弦の方程式の解としては、

● この三角関数の表式は不要

であることがわかる。

そこで、因数分解の公式： $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ を用いて・・・

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ \Rightarrow 0 &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x,t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

ここで、

$$A^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Rightarrow A = \frac{\partial}{\partial t}, \quad B^2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Rightarrow B = a \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.15)$$

とすると、公式より、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x,t) &= (A^2 - B^2) u(x,t) = (A+B)(A-B) u(x,t) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

従って、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) = 0 \quad (4.17)$$

を得る。このことから、方程式の解が $\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) = 0$ or $\left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) = 0$ であれば、

$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) = 0$ を満たすことがわかる。つまり、弦の振幅は

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) = 0 \text{ or } \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) = 0} \quad (4.18)$$

の解である。ここで、両辺を a で割って

$$\left(\frac{\partial}{a\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) = 0 \text{ or } \left(\frac{\partial}{a\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) = 0 \quad (4.19)$$

更に、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{a\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)(x-at) &= \frac{\partial(x-at)}{a\partial t} + \frac{\partial(x-at)}{\partial x} = -1+1=0 \\ \left(\frac{\partial}{a\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)(x+at) &= \frac{\partial(x+at)}{a\partial t} - \frac{\partial(x+at)}{\partial x} = 1-1=0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

を満たすので、

- $\left(\frac{\partial}{a\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)=0$ の解は $x-at$ の関数である
- $\left(\frac{\partial}{a\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)=0$ の解は $x+at$ の関数である

ことがわかる。従って、

- $x-at$ の関数を $\varphi(x-at)$
- $x+at$ の関数を $\phi(x+at)$

と書けば・・・

$$u(x,t) = \varphi(x-at) + \phi(x+at) \quad (4.21)$$

が証明できる。つまり、玄の振幅は

$$\sin \text{ や } \cos \text{ の表式の無い } u(x,t) = \varphi(x-at) + \phi(x+at) \quad (4.22)$$

であればよい。

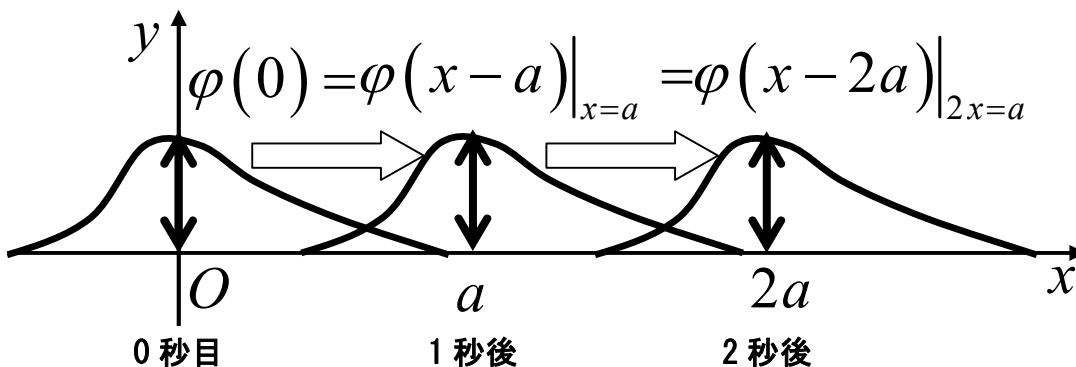
ここで $\varphi(x-at)$ の解の振る舞いを見るために、

$$x=0 \text{ \& } t=0 \quad (4.23)$$

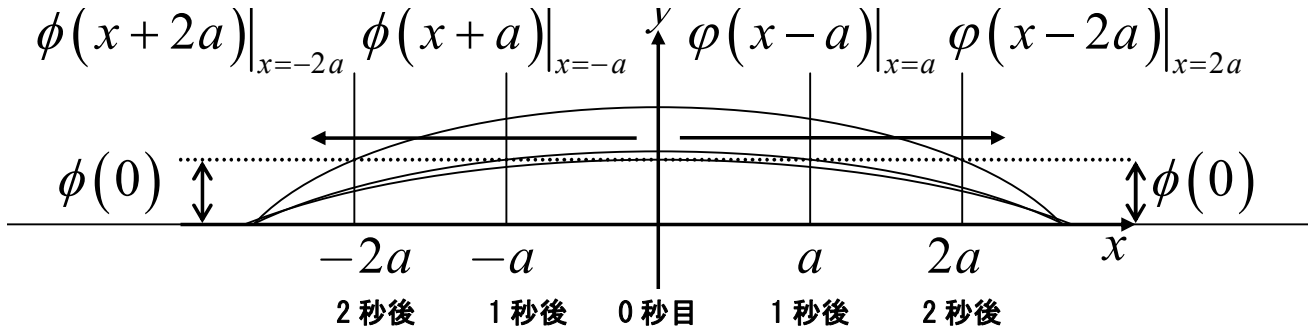
から出発するとしよう。いつも

- 同じ振幅の高さに着目

してその動きを追ってみる。その高さを $\varphi(0)$ とすると・・・



や弦の振動では



の図のように同じ振幅の高さの場所が右（や左）に移動することわかる。このことから、

- $\varphi(x-at)$ の振動は速度 a で右に進む

ことになる。同様に、

- $\varphi(x+at)$ の振動は速度 a で左に進む

振動になる。以上から、

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \left(= \sqrt{\frac{\text{弦の張力}}{\text{弦の線密度}}} \right) \quad \text{「第一章 弦の振動方程式」} \quad (4.24)$$

を**波の伝播速度**という。このように、三角関数を具体的に用いることなく、

- $u(x,t) = \varphi(x-at) + \varphi(x+at)$ は、伝播速度 a の波としての振る舞いを記述する

ことがわかった。

フーリエ級数と微小振動解

さて、 $f(x)$ として、周期 2ℓ のフーリエ級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{\ell} + b_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} \right) \quad (4.25)$$

を用いる。これを(4.21)を参考にして

- $f(x)$ の代わりに、2つの関数： $\varphi(x)$ と $\phi(x)$

に用いて、

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{\ell} + b_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} \right) \\ \phi(x) &= \frac{a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a'_k \cos \frac{\pi k x}{\ell} + b'_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

である。ここで、 $\varphi(x)$ と $\phi(x)$ の係数を区別するために、 $\phi(x)$ では a_k, b_k の代わりに a'_k, b'_k を用

いた。このとき、振動解は、 $\varphi(x-at) + \phi(x+at)$ と表わされ

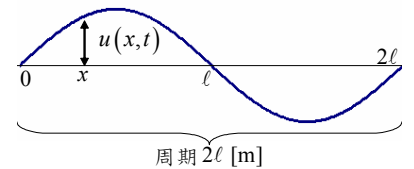
$$u(x,t) = \varphi(x-at) + \phi(x+at) \quad (4.27)$$

と与えられるので、(4.26)を用いて、計算する：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(x-at) + \phi(x+at) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k}{\ell} (x-at) + b_k \sin \frac{\pi k}{\ell} (x-at) \right) + \frac{a'_0}{2} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a'_k \cos \frac{\pi k}{\ell} (x+at) + b'_k \sin \frac{\pi k}{\ell} (x+at) \right) \\ &= \frac{a_0 + a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \left(\cos \frac{\pi k}{\ell} x \cos \frac{\pi k}{\ell} at + \sin \frac{\pi k}{\ell} x \sin \frac{\pi k}{\ell} at \right) \right. \\ &\quad \left. + b_k \left(\sin \frac{\pi k}{\ell} x \cos \frac{\pi k}{\ell} at - \cos \frac{\pi k}{\ell} x \sin \frac{\pi k}{\ell} at \right) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a'_k \left(\cos \frac{\pi k}{\ell} x \cos \frac{\pi k}{\ell} at - \sin \frac{\pi k}{\ell} x \sin \frac{\pi k}{\ell} at \right) \right. \\ &\quad \left. + b'_k \left(\sin \frac{\pi k}{\ell} x \cos \frac{\pi k}{\ell} at + \cos \frac{\pi k}{\ell} x \sin \frac{\pi k}{\ell} at \right) \right) \\ &= \frac{a_0 + a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k + a'_k) \cos \frac{\pi k}{\ell} x \cos \frac{\pi k}{\ell} at + (a_k - a'_k) \sin \frac{\pi k}{\ell} x \sin \frac{\pi k}{\ell} at \right. \\ &\quad \left. + (b_k + b'_k) \sin \frac{\pi k}{\ell} x \cos \frac{\pi k}{\ell} at - (b_k - b'_k) \cos \frac{\pi k}{\ell} x \sin \frac{\pi k}{\ell} at \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

になる。ここで、

● 両端が固定 $\Leftrightarrow u(0,t) = u(\ell,t) = 0$



を使うと、まず $u(0,t) = 0$ は、

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \frac{a_0 + a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k + a'_k) \cos \frac{\pi k}{\ell} 0 \cos \frac{\pi k}{\ell} at + (a_k - a'_k) \sin \frac{\pi k}{\ell} 0 \sin \frac{\pi k}{\ell} at \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left((b_k + b'_k) \sin \frac{\pi k}{\ell} 0 \cos \frac{\pi k}{\ell} at - (b_k - b'_k) \cos \frac{\pi k}{\ell} 0 \sin \frac{\pi k}{\ell} at \right) \\ &= \frac{a_0 + a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k + a'_k) \cos \frac{\pi k}{\ell} at - (b_k - b'_k) \sin \frac{\pi k}{\ell} at \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

なので、すべての t について成立するには、各項の係数が 0 になる時で、

$$a_0 + a'_0 = 0, \quad a_k + a'_k = b_k - b'_k = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (4.30)$$

である。ここまでの、

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \varphi(x-at) + \phi(x+at) = \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k - a'_k) \sin \frac{\pi k}{\ell} x \sin \frac{\pi k}{\ell} at + (b_k + b'_k) \sin \frac{\pi k}{\ell} x \cos \frac{\pi k}{\ell} at \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k - a'_k) \sin \frac{\pi k}{\ell} at + (b_k + b'_k) \cos \frac{\pi k}{\ell} at \right) \sin \frac{\pi k}{\ell} x
 \end{aligned}
 \tag{4.31}$$

である。次に、 $u(\ell, t) = 0$ は、正しい周期 2ℓ を使っているので

$$\sin \frac{\pi k}{\ell} x = \sin \frac{\pi k}{\ell} \ell = \sin \pi k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \infty)
 \tag{4.32}$$

の注意すると、自動的に成立している：

$$\begin{aligned}
 u(\ell, t) &= \varphi(\ell - at) + \phi(\ell + at) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k - a'_k) \sin \frac{\pi k}{\ell} at + (b_k + b'_k) \cos \frac{\pi k}{\ell} at \right) \boxed{\sin \frac{\pi k}{\ell} \ell} = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.33}$$

従って、

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k - a'_k) \sin \frac{\pi k}{\ell} at + (b_k + b'_k) \cos \frac{\pi k}{\ell} at \right) \sin \frac{\pi k}{\ell} x
 \tag{4.34}$$

が求める弦の振動解になる。実際の解は

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\pi at}{\ell} + b_k \cos \frac{k\pi at}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}
 \tag{4.35}$$

であったので、 $a_k - a'_k$ を a_k と読み直し、また、 $b_k + b'_k$ を b_k と読み直すと、

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\boxed{a_k - a'_k}^{\substack{a_k \text{ と読み直す} \\ (a_k - a'_k)}} \sin \frac{\pi k}{\ell} at + \boxed{b_k + b'_k}^{\substack{b_k \text{ と読み直す} \\ (b_k + b'_k)}} \cos \frac{\pi k}{\ell} at \right) \sin \frac{\pi k}{\ell} x \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{\pi kat}{\ell} + b_k \cos \frac{\pi kat}{\ell} \right) \sin \frac{\pi kx}{\ell}
 \end{aligned}
 \tag{4.36}$$

となり、微分方程式を解いて得た解と一致することになる。

付録：最初の振動の伝播

最初の振動の様子を知ることによって、その後の振動を予言できるのだが、それを数式で表したものを、「ダランベルの解」といっている。実際の微小振動のシミュレートは、最初にどのくらい弦を振るかによる。そこで、

- 最初の振幅の大きさ： $u(x, 0) = f(x) = 0$ 秒目の場所 x での弦の振幅の大きさ
- 最初の速度： $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v(x) = 0$ 秒目の場所 x での弦の上下方向の速度

を与えることになる。ここで

$$u(x,t) = \varphi(x-at) + \phi(x+at) \quad (4.37)$$

と

$$u(x,0) = f(x) \quad (4.38)$$

を用いれば

$$f(x) = \varphi(x) + \phi(x) \quad (4.39)$$

である。また、

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v(x) \quad (4.40)$$

より、

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = [-a\varphi'(x-at) + a\phi'(x+at)]_{t=0} = -a\varphi'(x) + a\phi'(x) = v(x) \quad (4.41)$$

両辺を 0 から x (0 から x でなくても x_0 から x としても結果は x_0 によらない)まで積分すると、
(混乱を避けるため積分変数 x' にした)

$$\int_0^x [-a\varphi'(x') + a\phi'(x')] dx' = -a[\varphi(x) - \varphi(0) - (\phi(x) - \phi(0))] = \int_0^x v(x') dx' \quad (4.42)$$

(*) 定積分: $\int_0^x v(x') dx'$ の積分変数は x' でなくても何でもよい。例えば、 $v(x')$ として x'^2 で

積分変数を x' とすると $\int_0^x v(x') dx' = \int_0^x x' dx' = \frac{1}{2} x'^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2} x^2$ 。また、積分変数を y とすると

$\int_0^x v(y) dy = \int_0^x y dy = \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2} x^2$ のようにどちらも $\frac{1}{2} x^2$ になる。ここ様に定積分は積分変数の

表記によらず同じ値をとり、この例では $\int_0^x v(x') dx' = \int_0^x v(y) dy$ である。

なので、

$$-\varphi(x) + \phi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x v(x') dx' - (\varphi(0) - \phi(0)) \stackrel{C = -(\varphi(0) - \phi(0))}{=} \frac{1}{a} \int_0^x v(x') dx' + C \quad (4.43)$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \phi(x) &= f(x) \\ -\varphi(x) + \phi(x) &= \frac{1}{a} \int_0^x v(x') dx' + C \end{aligned} \quad (4.44)$$

から、

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2} \left(f(x) - \frac{1}{a} \int_0^x v(x') dx' - C \right) \\ \phi(x) &= \frac{1}{2} \left(f(x) + \frac{1}{a} \int_0^x v(x') dx' + C \right)\end{aligned}\tag{4.45}$$

なので、

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2} \left(f(x-at) - \frac{1}{a} \int_0^{x-at} v(x') dx' - C \right) + \frac{1}{2} \left(f(x+at) + \frac{1}{a} \int_0^{x+at} v(x') dx' + C \right) \\ &= \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \left(\int_0^{x+at} v(x') dx' - \int_0^{x-at} v(x') dx' \right)\end{aligned}\tag{4.46}$$

更に、

$$\int_0^{x+at} v(x') dx' - \int_0^{x-at} v(x') dx' = \int_0^{x+at} v(x') dx' + \int_{x-at}^0 v(x') dx' = \int_{x-at}^{x+at} v(x') dx'\tag{4.47}$$

より、最終的に、最初の振動の状態を表す式

$$\boxed{u(x,0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v(x)}\tag{4.48}$$

を用いて

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v(x') dx'}\tag{4.49}$$

とわかる。これを**ダランベルの解**と呼んでいる。最初の振幅 $f(x)$ の伝播する様子を表していることがわかる。

第三回目レポート

レポートの回数(三回目)、学生証番号と氏名を明記すること
必ず表紙を付ける (A4レポート用紙使用のこと)

1) つぎの問いに答えよ。

A) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ の周期を求めよ。

B) 周期 2ℓ の関数 $f(x) (= f(x+2\ell))$ を求めよ。

2) $u(x,t) = \varphi(x-at) + \phi(x+at)$ は、 $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ。

3) A) $\varphi(x-at)$ の振幅を持つ波で、振幅の大きさ $\varphi(a)$ の進む速度を求めよ。

B) $\varphi(bx-at)$ の振幅を持つ波で、振幅の大きさ $\varphi(a)$ の進む速度を求めよ。

4) $f(t) = \int_0^t (x^2 + 3t) dx$ の微分と $f(t) = \int_0^t (x'^2 + 3t) dx'$ の微分が等しいことを示せ。