

9 複素微分：正則関数

この章では、複素数 z の関数（複素関数） $f(z)$ の微分を調べます。通常関数 $f(x)$ は、

実関数と呼びます。実関数 $f(x)$ の微分は

$$\frac{df(x)}{dx} (= f'(x)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (9.1)$$

で与えられます（問題 1： $f(x) = x^2$ のときに、(9.1) を使って $f'(x) = 2x$ を求めよ）。複素関数の微分も、

$$\frac{df(z)}{dz} (= f'(z)) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (9.2)$$

で与えます。

I. 連続性・微分可能性

複素関数という初めて取り扱う関数なので、複素関数の性質をみてみます。特に、

- 関数が連続につながっているか、不連続なジャンプがあるか

➤ 関数の連続性

の違いは、重要な性質になります。関数のグラフが書ければ一目瞭然で区別できますが、特に、複素数の関数のグラフの書き方は容易ではありません。グラフに書くのが面倒な場合には、数式でチェックできるとグラフを書く手間が省けます。関数の連続性は $f(z)$ が微分できるかどうかで調べることができます。

まず、(9.2) が計算できるかどうかをチェックしましょう。「ある値 $z = z_0$ での微分を求める」には

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (9.3)$$

を計算します。この式は、 $z = z_0 + \Delta z$ とおくと、 $\Delta z = z - z_0$ なので、(9.3) は

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (9.4)$$

となります。(9.4) が計算できるには、 $f(z)$ 自体に、次の 3 つの事

- $f(z)$ の極限值が存在する： \lim の操作ができる
 - $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ (何か値が計算でき、 w_0 になる)
- $f(z)$ の関数値が存在する

$$\triangleright \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Rightarrow f(z_0) \text{ が決まった値を持つ}$$

- $f(z)$ の極限值と関数値が一致

$$\triangleright w_0 = f(z_0)$$

が必要になります。この 3 つが成り立つとき

- **関数は連続**である

といいます。そして、最後に、当たり前ですが $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ が計算できる：

- $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ の極限值が存在する：lim の操作ができる

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \overset{\tau_0}{\tau} \quad (\text{何か値が計算でき、}\tau_0\text{になる})$$

時に

- $f(z)$ は $z = z_0$ で**微分可能**である

ことになります。従って、

- $f(z)$ が $z = z_0$ で**連続**であるとき

$$\triangleright \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ が極限值を持てば}$$

$$\diamond f(z) \text{ は } z = z_0 \text{ で微分可能}$$

になります。このような性質を満たす複素関数のことを**正則関数**といい、この条件を**正則条件**といいます。以上から、

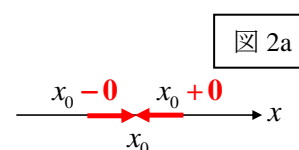
正則関数とは、複素関数（複素数を変数とし、複素数に値をもつ関数）のうちで、**定義域**（または議論の対象とする領域）の**全ての点で微分可能な関数**の事である。

とまとめることができます。

II. 複素関数の極限值

微分可能性を示すのに重要な役割をするのが、「極限値の存在」です。複素関数に極限値が存在するとは何でしょう？実関数 $f(x)$ では、極限値が存在するとは、図 2a のように、

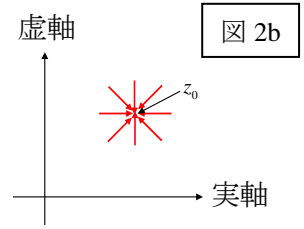
- x が右から x_0 に近づく場合： $x \rightarrow x_0 + 0$
- x が左から x_0 に近づく場合： $x \rightarrow x_0 - 0$



の極限が一致する事で

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \overbrace{\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)}^{\text{右から } x_0 \text{ に近づく}} = \overbrace{\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)}^{\text{左から } x_0 \text{ に近づく}} \quad (9.5)$$

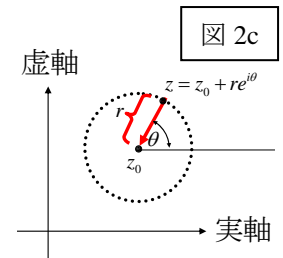
のように表すことができます。実関数は数直線上（1次元）に変数 x を持つので、右と左しか方向がありません。ところが、複素関数は複素平面上（2次元）に変数 z を持つので、図 2b のように、右・左以外に上・下・斜め上など色々な方向があり、実際無限個の方向になります。従って、(9.5)は



$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ \text{あらゆる} \\ \text{方向から}}} f(z) \quad (9.6)$$

のように書けます。このような場合、極座標表示が便利です。複素数 z の極座標表示では、 $z = |z|e^{i\theta}$ と表され、方向を角度 θ で示す事ができます。つまり、

● あらゆる方向からの値が同じ θ に依らずに同じ値と読み替えられます。そこで、(9.6)の極限は、図 2c のように、点線円の半径を r とする $|z - z_0| = r$ なので、



$$z = z_0 + re^{i\theta} \quad (9.7)$$

で表せます。極限は $r \rightarrow 0$ で定義でき

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \stackrel{z = z_0 + re^{i\theta}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} f(z_0 + re^{i\theta}) = \theta \text{によらない値} \quad (9.8)$$

のとき、 $f(z)$ の極限が存在することになります。

2つの例を調べてみましょう。複素関数 $f(z)$ は

- $f(z) = z^2$
- $f(z) = zz^*$

です。

$$f(z) = z^2$$

まず、 $z = z_0 + re^{i\theta}$ を用いると、

$$z^2 = (z_0 + re^{i\theta})^2 = z_0^2 + 2z_0re^{i\theta} + r^2e^{2i\theta} \quad (9.9)$$

なので

$$f(z) = z^2 = z_0^2 + 2z_0re^{i\theta} + r^2e^{2i\theta} \quad (9.10)$$

になります。連続性を示す 3 つの条件は

- 極限值

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} (z_0^2 + 2z_0 r e^{i\theta} + r^2 e^{2i\theta}) = z_0^2$$

なので、 θ に依らない値 z_0^2 になるので、極限值 z_0^2 を持つことがわかる。

- 関数値

$$f(z_0) = z_0^2 \text{ となる。}$$

- 極限值と関数値が一致

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ と } f(z_0) \text{ が同じ } z_0^2 \text{ なので一致する。}$$

です。3 つとも成立するので、 $f(z) = z^2$ は**連続である**ことがわかります。次に、微分可能性

は、 $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ が極限值を持つかどうか? でした。そこで、

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z + z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} (z_0 + r e^{i\theta} + z_0) = 2z_0 \quad (9.11)$$

となり、

- 極限值 $2z_0$ があり

➤ θ の値に依らないので

◇ **微分可能**

とわかります。

$$f(z) = z z^* (= |z|^2)$$

同様に

$$\begin{aligned} z z^* (= |z|^2) &= (z_0 + r e^{i\theta})(z_0 + r e^{i\theta})^* \stackrel{(e^{i\theta})^* = e^{-i\theta}}{=} (z_0 + r e^{i\theta})(z_0^* + r e^{-i\theta}) \\ &= z_0 z_0^* + r e^{i\theta} z_0^* + z_0 r e^{-i\theta} + \underbrace{r e^{i\theta} r e^{-i\theta}}_{e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^{i\theta - i\theta} = e^0 = 1} = z_0 z_0^* + r e^{i\theta} z_0^* + z_0 r e^{-i\theta} + r^2 \\ &= |z_0|^2 + r(z_0^* e^{i\theta} + z_0 e^{-i\theta}) + r^2 \end{aligned} \quad (9.12)$$

より

$$z z^* (= |z|^2) = |z_0|^2 + r(z_0^* e^{i\theta} + z_0 e^{-i\theta}) + r^2 \quad (9.13)$$

なので

$$f(z) = |z_0|^2 + r(z_0^* e^{i\theta} + z_0 e^{-i\theta}) + r^2 \quad (9.14)$$

になります。連続性を示す 3 つの条件は

- 極限值

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} (|z_0|^2 + r(z_0^* e^{i\theta} + z_0 e^{-i\theta}) + r^2) = |z_0|^2$$

なので、 θ に依らない値 $|z_0|^2$ になるので、極限值 $|z_0|^2$ を持つことがわかる。

- 関数値

$$f(z_0) = z_0 z_0^* = |z_0|^2 \text{ となる。}$$

- 極限值と関数値が一致

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ と } f(z_0) \text{ が同じ } |z_0|^2 \text{ なので一致する。}$$

です。3 つとも成立するので、 $f(z) = zz^*$ は**連続である**ことがわかります。次に、微分可能性は、 $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ が極限值を持つかどうか？でした。そこで、

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{zz^* - z_0 z_0^*}{z - z_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|z_0|^2 + r(z_0^* e^{i\theta} + z_0 e^{-i\theta}) + r^2 - |z_0|^2}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} (z_0^* e^{i\theta} + z_0 e^{-i\theta} + r) = z_0^* e^{i\theta} + z_0 e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (9.15)$$

となり、極限值が θ に依るので存在しない（極限值が決まらない）こととなります。従って

- 極限值 $z_0^* e^{i\theta} + z_0 e^{-i\theta}$ があり

➤ θ の値に**依る**ので

◇ **微分不可能**

とわかります。

【注意】 $z = x + iy$ なので $z^* = x - iy$ より $zz^* = x^2 + y^2$ である。この関数は、 $f(z) = zz^* = x^2 + y^2$ と表せる。 $f(z)$ を x と y の実関数として見ると、 x と y について微分可能である。実関数と複素関数では微分可能性の結果が全く違うので注意すること。

以上 2 つの例から、 $f(z) = z^2$ は微分可能、 $f(z) = zz^* = |z|^2$ は微分不可能な関数であることがわかった。つまり、

- $f(z) = z^2$ は**正則関数である**
- $f(z) = zz^* = |z|^2$ は**正則関数ではない**

と結論できます。