

# 08 複素数とは何か？複素平面

虚数単位は  $i$  で  $i^2 = \square$  になります。複素数は  $z$  で表し

$$z = x + iy \tag{8.1}$$

と表します。また、 $x$  を「 $z$  の実部 (Real)」、 $y$  を「 $z$  の虚部 (Imargenary)」といい、

$$\text{実数} : \begin{cases} x = \text{Re}(z) \\ y = \text{Im}(z) \end{cases} \tag{8.2}$$

と表します。ともに実数です。

## I. 複素数とベクトル

複素数での  $(x,y)$  を実軸-虚軸の図で表すと図 1a のようになります。この「実軸-虚軸の図」を

- 複素平面

と言っています。同様にベクトルでも  $(x,y)$  を表せます。図 1a からわかるように

- 複素数とベクトルは  $x-y$  図としては同じ

です。複素数  $z$  から

$$i \rightarrow -i \tag{8.3}$$

にする操作で得られる新たな複素数を**複素共役**といい

- $z^*$  (或いは、 $\bar{z}$ ) と表す

ことになります。従って

$$z^* = x - iy \tag{8.4}$$

になります。 $z^* = x - iy$  は、 $z$  に  $y \rightarrow -y$  を施しても、 $z^*$  になります。つまり、

$$z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} i \rightarrow -i \\ y \rightarrow -y \end{cases} \Rightarrow z^* = x - iy \tag{8.5}$$

です。図 1b の  $x-y$  図では、 $z$  と  $z^*$  の関係がわかります。また、ベクトルと同じなので、図 1c の作図より

$$z + z^* = 2x \tag{8.6}$$

もわかり、実際、(8.4)より確かめられます。(8.2)を用いると、

$$\text{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} (= x) \tag{8.7}$$

同様にして、

$$z - z^* = 2iy \tag{8.8}$$

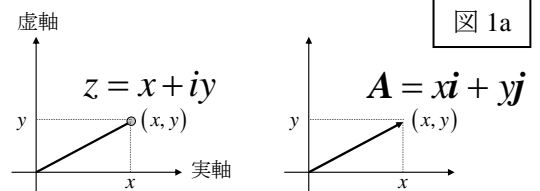


図 1a

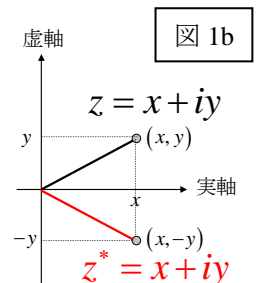


図 1b

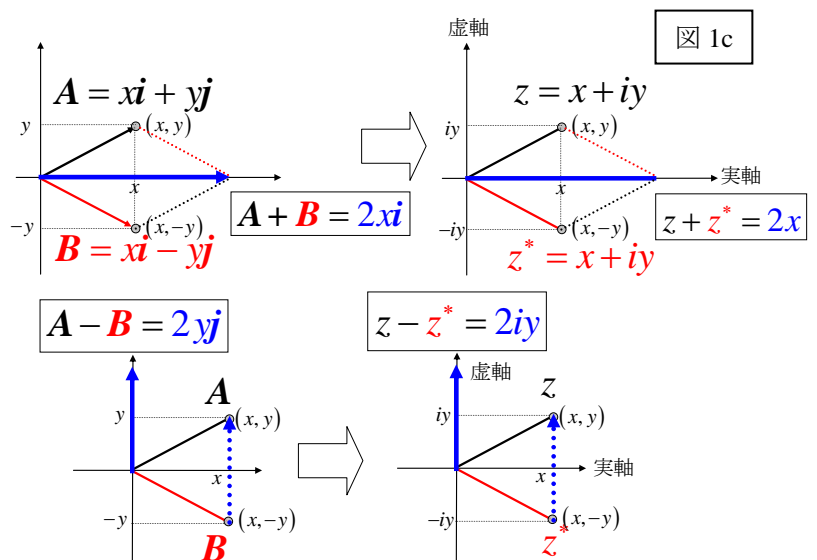


図 1c

なので、

$$\boxed{\operatorname{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i}} (= y) \quad (8.9)$$

とわかります。また、原点から  $(x, y)$  への長さは  $\sqrt{x^2 + y^2}$  であり、複素数  $z$  とその共役数  $z^*$  で表すことができます。  $i^2 = -1$  に注意すると

$$x^2 + y^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 - (iy)^2 \stackrel{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}{=} (x + iy)(x - iy) = zz^* \quad (8.10)$$

と計算できます。この「 $z$  の大きさ」を「ベクトルの大きさ」と同様に

- 複素数  $z$  の絶対値： $|z|$
- ベクトルの  $A$  絶対値： $|A|$

で表して

$$\boxed{|z|^2 = z^* z = x^2 + y^2} \quad (8.11)$$

となります。

## II. 複素数と極座標

複素数  $z$  の  $(x, y)$  を極座標で表すこともでき、図 1d のように  $x$  軸からの角度を  $\theta$  とするとき

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \leftarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (8.12)$$

です。<sup>1</sup> これを、(8.1) に代入して整理すると

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (8.13)$$

を得ます。(8.11) を用いると、 $|z| = r$  なので、(8.13) は

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (8.14)$$

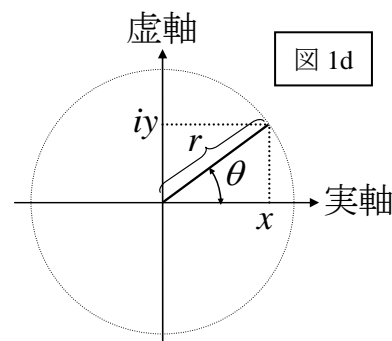
と計算できます。従って、

$$|z| = \left| |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \right| = |z| |\cos \theta + i \sin \theta| \quad (8.15)$$

なので、

$$|\cos \theta + i \sin \theta| = 1 \quad (8.16)$$

がわかります。ここで、 $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  の  $\theta = 0$  でのテーラー展開 (マクローリン展開) を用いる：



<sup>1</sup> 角度はギリシャ文字で表し、 $\overset{\text{シータ}}{\theta}$  ,  $\overset{\text{アルファ}}{\alpha}$  ,  $\overset{\text{ベータ}}{\beta}$  ,  $\overset{\text{ガンマ}}{\gamma}$  などで表される事が多い。

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} f^{(n)}(0) \left( f^{(n)}(\theta) = \frac{d^n f(\theta)}{d\theta^n} \right) \\
 &= f(0) + \theta f^{(1)}(0) + \frac{1}{2!} \theta^2 f^{(2)}(0) + \frac{1}{3!} \theta^3 f^{(3)}(0) + \theta^4 \boxed{\phantom{0}} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{8.17}$$

これを  $\cos \theta$  と  $\sin \theta$  に適用すると

$$\begin{aligned}
 f(\theta) = \cos \theta &\Rightarrow f^{(n)}(\theta) = \frac{d^n f(\theta)}{d\theta^n} = \frac{d^n \cos \theta}{d\theta^n} \\
 \left\{ \begin{aligned}
 n=1: & \frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta \\
 n=2: & \frac{d^2 \cos \theta}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \frac{d \cos \theta}{d\theta} = \frac{d(-\sin \theta)}{d\theta} = -\frac{d \sin \theta}{d\theta} = -\cos \theta \\
 n=3: & \frac{d^3 \cos \theta}{d\theta^3} = \frac{d}{d\theta} \frac{d^2 \cos \theta}{d\theta^2} = \frac{d(-\cos \theta)}{d\theta} = -\frac{d \cos \theta}{d\theta} = -(-\sin \theta) = \sin \theta \\
 n=4: & \frac{d^4 \cos \theta}{d\theta^4} = \frac{d}{d\theta} \frac{d^3 \cos \theta}{d\theta^3} = \frac{d \sin \theta}{d\theta} = \cos \theta
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{8.18}$$

$$\begin{aligned}
 f(\theta) = \sin \theta &\Rightarrow f^{(n)}(\theta) = \frac{d^n f(\theta)}{d\theta^n} = \frac{d^n \sin \theta}{d\theta^n} \\
 \left\{ \begin{aligned}
 n=1: & \frac{d \sin \theta}{d\theta} = \cos \theta \\
 n=2: & \frac{d^2 \sin \theta}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \frac{d \sin \theta}{d\theta} = \frac{d \cos \theta}{d\theta} = -\sin \theta \\
 n=3: & \frac{d^3 \sin \theta}{d\theta^3} = \frac{d}{d\theta} \frac{d^2 \sin \theta}{d\theta^2} = \frac{d(-\sin \theta)}{d\theta} = -\frac{d \sin \theta}{d\theta} = -\cos \theta \\
 n=4: & \frac{d^4 \sin \theta}{d\theta^4} = \frac{d}{d\theta} \frac{d^3 \sin \theta}{d\theta^3} = \frac{d(-\cos \theta)}{d\theta} = -\frac{d \cos \theta}{d\theta} = -(-\sin \theta) = \sin \theta
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}
 \tag{8.19}$$

なので、

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= [\cos \theta]_{\theta=0} + \theta [-\sin \theta]_{\theta=0} + \frac{\theta^2}{2!} [-\cos \theta]_{\theta=0} + \frac{\theta^3}{3!} [\sin \theta]_{\theta=0} + \frac{\theta^4}{4!} [\cos \theta]_{\theta=0} + \dots \\
 &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots = \overbrace{(-1)^0 \theta^0}^{n=0} + \overbrace{(-1)^1 \theta^2}^{n=2} + \overbrace{(-1)^2 \theta^4}^{n=4} + \dots = \dots + \overbrace{(-1)^k \theta^{2k}}^{n=2k=\text{偶数}, k=0,1,2,3,\dots} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \\
 \sin \theta &= [\sin \theta]_{\theta=0} + \theta [\cos \theta]_{\theta=0} + \frac{\theta^2}{2!} [-\sin \theta]_{\theta=0} + \frac{\theta^3}{3!} [-\cos \theta]_{\theta=0} + \frac{\theta^4}{4!} [\sin \theta]_{\theta=0} + \dots \\
 &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots = \overbrace{(-1)^0 \theta^1}^{n=1} + \overbrace{(-1)^1 \theta^3}^{n=3} + \dots = \dots + \overbrace{(-1)^k \theta^{2k+1}}^{n=2k+1=\text{奇数}, k=0,1,2,3,\dots} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}
 \end{aligned}
 \tag{8.20}$$

と計算でき、

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \theta &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \\ \sin \theta &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}} \quad (8.21)$$

になります。これを、(8.13)の  $\cos \theta + i \sin \theta$  に代入して

$$\begin{aligned} \cos \theta + i \sin \theta &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \stackrel{-1=i^2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} \theta^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots + \frac{(i\theta)^1}{1!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \\ &= \underbrace{(i\theta)^0}_{\substack{=1 \\ 0! = 1}} + \frac{(i\theta)^1}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \end{aligned} \quad (8.22)$$

なので、

$$\cos \theta + i \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \quad (8.23)$$

と計算できました。これは、 $e^x$  のテーラー展開：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \quad (8.24)$$

と同じなので、

$$\cos \theta + i \sin \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = e^{i\theta} \quad (8.25)$$

より

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta} \quad (8.26)$$

と一致します。また、(8.16)より

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad (8.27)$$

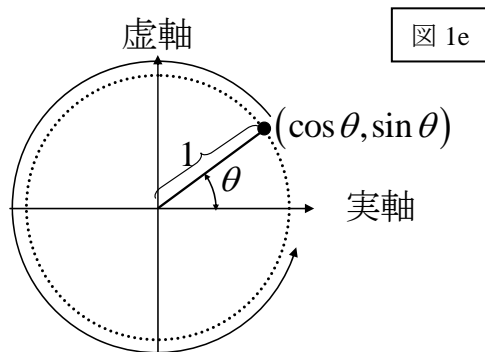
です。これは、**オイラーの公式**と言います。また、極座標での複素数  $z$  は、(8.14)で与えられ

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  なので、

$$\boxed{z = |z| e^{i\theta}} \quad (8.28)$$

となります。ここで、 $\theta$ の値を0から増加させていくとき、点が複素平面で描く図形は、 $|e^{i\theta}|=1$ なので半径 1 の円になります。図 1e の様に

- $e^{i\theta}$ の値は、半径 1 の円周上にあることがわかります。



### Ⅲ.複素数の回転と群論

複素数  $z$  は、エラー！参照元が見つかりません。に従って表すことができ、その角度を図 2a のように  $\alpha$  とすると

$$z = |z|e^{i\alpha} \tag{8.29}$$

と表せます。この複素数から新しい複素数  $z' = e^{i\theta}z$  を作ります。(8.29)を用いると

$$z' = e^{i\theta}z = e^{i\theta}|z|e^{i\alpha} = |z|e^{i(\theta+\alpha)} \tag{8.30}$$

と計算できます。このとき、 $|e^{i\theta}|=1$ なので、 $|e^{i(\theta+\alpha)}|=1$ より

$$|z'| = |z| \tag{8.31}$$

になっています。(8.30)を図に表すと、角度が  $\theta + \alpha$  なので、図 2b の図が描けます。従って

- $e^{i\theta}$ は複素数  $z$  を  $\theta$  だけ回転させることがわかります。

この  $e^{i\theta}$  を使って「群」という概念を見てみます。「群」とは、

- どんなに変化してもその群れの中に変化したものがあるという概念です。これを数学的に定義したのは群論とよばれます。群の中の 1 つ 1 つを元 ( $a, b, c, d, e, f, \dots$  で表す) といい、次の 3 つの性質を満たします：

- 変化しない場合
  - 単位元 ( $e$ ) が存在する： $ea = a$
- 変化しても元に戻せる
  - 逆元 ( $a^{-1}$ ) が存在する： $a^{-1}a = e$
- 変化する組の取り方によらずに同じものに変化する
  - 結合則が成立する： $(ab)c = a(bc)$

の 3 つの条件で定義されます。

$e^{i\theta}$  の場合に、元を

$$U(\theta) = e^{i\theta} \tag{8.32}$$

図 1e

図 2a

図 2b

と表すようにします。このとき、「群の中にある」というのは、

- $e^{i\theta}$  の形で書ける

ことに対応します。3つの性質は、

- **単位元** ( $e$ ) が存在する

$$\triangleright ea = a \Rightarrow \overbrace{U(0)}^e \overbrace{U(\theta)}^a = 1 \times e^{i\theta} = e^{i\theta} = \overbrace{U(\theta)}^a \Rightarrow \boxed{e = U(0)}$$

- **逆元** ( $a^{-1}$ ) が存在する

$$\triangleright a^{-1}a = e \Rightarrow \overbrace{U(-\theta)}^{a^{-1}} \overbrace{U(\theta)}^a = e^{-i\theta} e^{i\theta} = 1 = \overbrace{U(0)}^e \Rightarrow \boxed{a^{-1} = U(-\theta)}$$

- **結合則** が成立する

$$\triangleright (ab)c = a(bc)$$

$$\triangleright \begin{cases} \left( \overbrace{U(\theta)}^a \overbrace{U(\alpha)}^b \right) \overbrace{U(\beta)}^c = e^{i\theta} e^{i\alpha} U(\beta) = e^{i(\theta+\alpha)} U(\beta) = e^{i(\theta+\alpha)} e^{i\beta} = e^{i(\theta+\alpha+\beta)} = U(\theta+\alpha+\beta) \\ \overbrace{U(\theta)}^a \left( \overbrace{U(\alpha)}^b \overbrace{U(\beta)}^c \right) = U(\theta) e^{i\alpha} e^{i\beta} = U(\theta) e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\theta} e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i(\theta+\alpha+\beta)} = U(\theta+\alpha+\beta) \end{cases}$$

となり、3つの性質は満たしています。従って、

- $U(\theta)$  は群をなす

事がわかります。これを**ユニタリ一群** (Unitary Group) といい、特に、**U** という頭文字を用いて

- $U(1)$  群

と呼ばれています。**1** は

- $U(\theta)$  は **1行1列** の行列 (=数のこと) の  $\theta$  を持つ

ことを示しています。<sup>2</sup> 量子力学で**ユニタリ演算子**  $U$  とは、

$$U^\dagger U = U^{*T} U = I \tag{8.33}$$

のことで、 $U(\theta) = e^{i\theta}$  は、(8.33) を満たしています (**問題 1** :  $U^\dagger(\theta)$  を求めよ。)。 「 $U(\theta)$  の作る群」を「**ユニタリ一群**」と呼ぶ由縁です (**問題 2** :  $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  より  $A^\dagger$  を作れ)。

<sup>2</sup> **2行2列** の行列 ( $\theta$  の数が  $2 \times 2 = 4$  の4つ) のときには、 $U(2)$  とか  $SU(2)$  と呼ばれます。**SU** は **Special Unitary** (特殊ユニタリー) の略になっています。