

# 07 ストークスの定理：線積分と面積分

ストークスの定理はガウスの定理とともに、非常に重要な定理であり、線積分と面積分の関係を表します。つまり

- ガウスの定理：面積分と体積分（体積を囲む閉じた面＝表面）の関係
- ストークスの定理：線積分と面積分（面積を囲む外周の線）の関係

になります。この違いはベクトルの積に 2 種類の積：

$$\text{内積: } A \cdot B \Rightarrow \iiint_V \overbrace{\nabla \cdot J(x)}^{\text{内積}} dV = \oiint_S J(x) \cdot dS \quad (\text{ガウスの定理}) \quad (7.1)$$

$$\text{外積: } A \times B \Rightarrow \iint_S \underbrace{\overbrace{\nabla \times J(x)}^{\text{外積=ベクトル}} \cdot dS}_{\text{内積}} = \oint_C J(x) \cdot dx \quad (\text{ストークスの定理}) \quad (7.2)$$

があることにも関連しています。

## I. グリーンの定理

$dS$

まず、(7.2)の

$$\iint_S \nabla \times J(x) \cdot dS \quad (7.3)$$

$dS$  を計算する事から始めます。面  $S$  を決める式は、【05 2重積分と面積分】－IV. 面積分：平面上と曲面上の(4.52)：

$$f(x, y, z) = z - \varphi(x, y) = 0 \quad (7.4)$$

になります。この時、【03 微分ベクトル】－I. 一般曲面と微分ベクトルより「 $\nabla f(x, y, z)$

は曲面の垂直方向を向く」と分かっています。「 $dS$  は面に垂直」なので

$$dS \parallel \nabla f(x, y, z) \quad (7.5)$$

です。従って、面の方向の単位ベクトルを  $n$  (normal : 垂直の) とすると

$$dS = |dS|n = dSn \quad (7.6)$$

で与えられ、 $n$  は

$$n = \frac{A}{|A|} \leftarrow A = \nabla f(x, y, z) \quad (7.7)$$

で計算できます。(7.6)の  $dS$  は【05 2重積分と面積分】－IV. 面積分：平面上と曲面の(4.56)より

### グリーン

ジョージ・グリーン (George Green, 1793 年 7 月 14 日 - 1841 年 3 月 31 日) は 19 世紀のイギリスの物理学者、数学者。グリーン関数やグリーンの定理で知られる。パン屋の息子として生まれ、正規の教育をほとんど受けずに粉挽きの仕事をしながら独学でポテンシャル理論の論文を書いたという経歴の持ち主である。(出典：ウィキペディア日本語版)

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (7.8)$$

です。(7.4)を用いて、 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ なので

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) [z - \varphi(x,y)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} [z - \varphi(x,y)] + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} [z - \varphi(x,y)] + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} [z - \varphi(x,y)] \\ &= -\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial z}\mathbf{k} = -\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

とか計算できるので、(7.7)は

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (7.10)$$

で与えられます。従って、(7.8)と(7.10)を用いて(7.6)は

$$dS = dS \mathbf{n} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)^2} dx dy \frac{-\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (7.11)$$

従って、

$$d\mathbf{S} = \left(-\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) dx dy \quad (7.12)$$

と計算できます。

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x})$$

次に、 $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x})$ は、外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の公式

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} : \begin{pmatrix} \overbrace{A_x B_z - A_z B_x}^{x \text{成分: } x \rightarrow y \rightarrow z \text{ の順}}, \overbrace{A_y B_x - A_x B_y}^{y \text{成分: } y \rightarrow z \rightarrow x \text{ の順}}, \overbrace{A_z B_y - A_y B_z}^{z \text{成分: } z \rightarrow x \rightarrow y \text{ の順}} \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

に注意して（問題 1： $\mathbf{A} = \mathbf{i} : (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{j} : (0, 1, 0)$ の時 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を求め $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ との位置関係を図示）、

$$\mathbf{A} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} : \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{7.14}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) = J_x(\mathbf{x})\mathbf{i} + J_y(\mathbf{x})\mathbf{j} + J_z(\mathbf{x})\mathbf{k} : (J_x(\mathbf{x}), J_y(\mathbf{x}), J_z(\mathbf{x}))$$

と置けば

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial y} \right) \mathbf{k} \tag{7.15}$$

と計算されます。

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}$$

以上から、(7.3)の  $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}$  被積分関数は

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} &= \left[ \left( \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &\quad \cdot \left( -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx dy \\ &= \left[ \left( \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial z} \right) \left( -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial x} \right) \left( -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned} \tag{7.16}$$

となります。

### グリーンの定理

まず、簡単な場合の証明から入ります。曲面ではなく

- **平面上のみ**で成立する公式

になります。平面を  $x$ - $y$  平面にすると、 $z$  方向が存在しないので、

$\mathbf{J}(\mathbf{x})$  では  $J_z(\mathbf{x}) = 0$  です。従って、

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = (J_x(\mathbf{x}), J_y(\mathbf{x}), 0) \Leftarrow J_z(\mathbf{x}) = 0$$

になります。この場合を、**グリーンの定理**といい、(7.16)は  $J_z(\mathbf{x}) = 0$  として

- $z = z_0$ にある  $x$ - $y$  **平面上**の領域  $D$  と閉じた外周  $C$

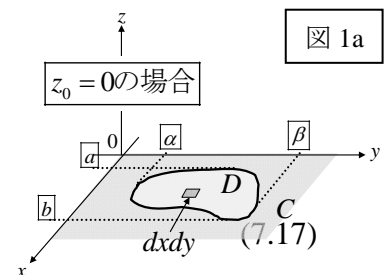
とすれば、

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \Leftarrow \begin{cases} P(x, y) = J_x(x, y, z_0) \\ Q(x, y) = J_y(x, y, z_0) \end{cases} \tag{7.18}$$

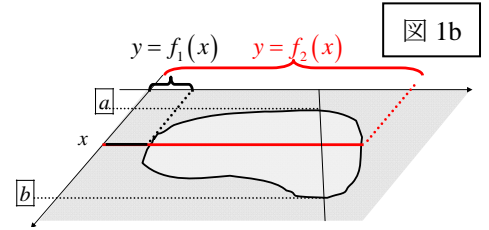
になります。以下で、(7.18)を証明します。図 1a のような領域  $D$  と閉じた外周  $C$  に於いて

- 領域  $D$  が  $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ \alpha \leq y \leq \beta \end{cases}$  にある

とします。(7.18)を色分けして



$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy & \\ = \iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy - \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy & \end{aligned} \tag{7.19}$$



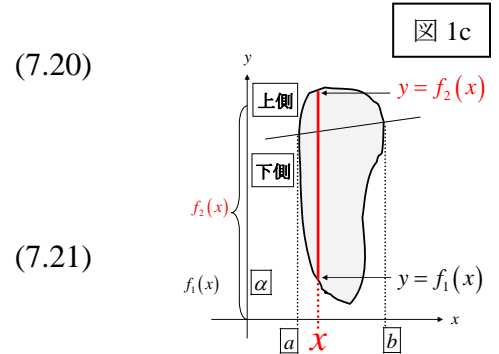
とします。

まず、第 2 項から計算します。図 1b のように  $x-y$  平面上の積分経路  $C$  を決めるのに

$$\begin{cases} y = f_1(x): \text{下側} \\ y = f_2(x): \text{上側} \end{cases} \tag{7.20}$$

とします。このとき、積分範囲は、図 1c から

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \end{cases} \tag{7.21}$$



になります。図 1c を参考にして

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy \stackrel{a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)}{=} \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \tag{7.22}$$

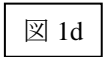
より、公式

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = [P(x, y)]_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} = P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \tag{7.23}$$

を用いて

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx [P(x, y)]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} = \int_a^b dx [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] \tag{7.24}$$

と計算できます。この積分領域を図示すると、



$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] \\ &= \int_a^b dx P(x, f_2(x)) - \int_a^b dx P(x, f_1(x)) \\ &= - \left[ \int_b^a dx P(x, f_2(x)) + \int_a^b dx P(x, f_1(x)) \right] \\ &= - \oint_C dx P(x, y) \end{aligned} \tag{7.25}$$

になります。

- $x$  積分を経路  $C$  に沿った積分に変更する

します。積分経路  $C$  は 1 周するので、 $x$  の積分領域では  $a \rightarrow b \rightarrow a$  となります。積分表記では、

$$\int_a^{a \rightarrow b} (*) dx + \int_b^{b \rightarrow a} (*) dx = \oint_C (*) dx \tag{7.25}$$

の形式になります。この方針で、図 1d のように曲線上  $C$  の積分領域へ変更していくと、

$$\int_a^b dx [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))] = \overbrace{-\int_a^b dx P(x, f_2(x))}^{b \rightarrow a} - \overbrace{\int_a^b dx P(x, f_1(x))}^{a \rightarrow b} = -\oint_C dx P(x, y) \quad (7.26)$$

を得ることができます。つまり、

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \boxed{-} \oint_C dx P(x, y) \quad (7.27)$$

と計算できました。負符号に注意しましょう。

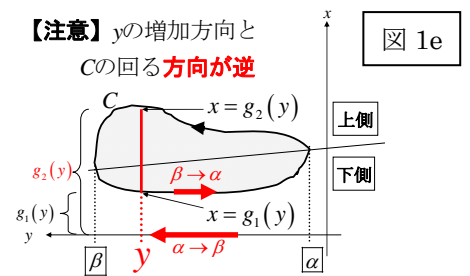
次に、図 1e に従って、同様な計算を(7.19)の第 1 項  $\iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy$  に行うことができます。

今度は、積分経路  $C$  を決めるのに

$$\begin{cases} x = g_1(y): \text{下側} \\ x = g_2(y): \text{上側} \end{cases} \quad (7.28)$$

になり、積分範囲は、図 1e から

$$\begin{cases} \alpha \leq y \leq \beta \\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \end{cases} \quad (7.29)$$



になります。その結果

$$\iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_C dy Q(x, y) \quad (7.30)$$

と計算できます (問題 2 : (7.22)以下の導出方法に習って(7.30)を導け)。

以上から、**グリーン**の定理：

$$\boxed{\iint_D \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy} \quad (7.31)$$

を導けました。

## II. ストークスの定理

次に、

- **平面上の積分**から導かれたグリーン定理(7.18)：

$$\triangleright \iint_D \left( \frac{\partial J_y(x, y, z_0)}{\partial x} - \frac{\partial J_x(x, y, z_0)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C J_x(x, y, z_0) dx + J_y(x, y, z_0) dy$$

を

- **曲面上の積分**に拡張されたストークス定理に拡張

$$\triangleright \iint_S \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

します。まず、 $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}$  は(7.16)で与えられ

ストークス

ジョージ・ガブリエル・ストークス (Sir George Gabriel Stokes, 1819 年 8 月 13 日 - 1903 年 2 月 1 日) は、アイルランドの数学者、物理学者である。流体力学、光学、数学などの分野で重要な貢献をした。1885 年から 1890 年まで王立協会会長を務めた。ストークスの名前を冠した事柄にはつぎのようなものがある。

- 流体力学の分野
  - ✧ 粘性流体の式：ナビエ=ストークスの式
  - ✧ 流体の中で落下する粒子の速度：ストークスの式
  - ✧ 水面波の「ストークス波」
  - ✧ 粘度の単位ストークス
- 光学の分野
  - ✧ ストークス散乱 - ラマン散乱に詳しく説明がある。
- 数学の分野
  - ✧ ストークスの定理 - ストークスの定理の初出は、ケンブリッジ大学の数学の優等試験 (トライポス) であり、ストークスは、旅行中の友人の物理学者ウィリアム・トムソンが書き送った手紙を受け定理を知り試験に出題したものとされる。またこのときの数学優等試験では、電磁気学で有名なジェームズ・クラーク・マクスウェルが (力学で有名なラウスと共に) 首席で合格している。

(出典：ウィキペディア日本語版)

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial z} \right) \left( -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial x} \right) \left( -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right) \\ + \left( \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial y} \right) \end{array} \right] dx dy$$

です。更に、 $J_x, J_y, J_z$  を含む項に整理すると

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial z} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial z} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \\ -\frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial y} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial x} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \end{array} \right\} \times dx dy \tag{7.32}$$

と整理します。 $J_x(\mathbf{x}) = J(x, y, z)$  で書き換えて、(7.4) :  $z = \varphi(x, y)$  に注意して

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \left\{ \begin{array}{l} -\left[ \frac{\partial J_x(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial J_x(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right]_{z=\varphi(x, y)} \\ \left[ \frac{\partial J_y(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial J_y(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right]_{z=\varphi(x, y)} \\ \left[ -\frac{\partial J_z(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial J_z(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \right]_{z=\varphi(x, y)} \end{array} \right\} \times dx dy \tag{7.33}$$

です。ここで、以下の裏技 (?) を使いましょう。(7.33)の

- 第 1 項と第 2 項は

$$\left[ \frac{\partial J_x(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial J_x(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right]_{z=\varphi(x, y)} = \frac{\partial J_x(x, y, \varphi(x, y))}{\partial y}$$

$$\left[ \frac{\partial J_y(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial J_y(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right]_{z=\varphi(x, y)} = \frac{\partial J_y(x, y, \varphi(x, y))}{\partial x}$$
(7.34)

とまとめられます。

- 第 3 項は、

$$-\frac{\partial J_z(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial J_z(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \overbrace{J_z(x, y, z)}^{P(x, y)} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \overbrace{J_z(x, y, z)}^{Q(x, y)} \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$
(7.35)

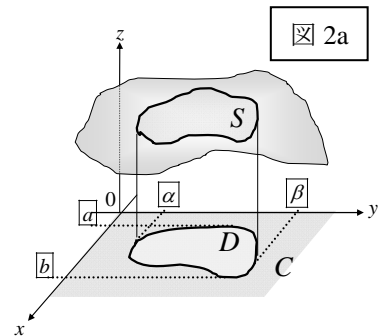
と整理できます (問題 3 : (7.35) を示せ)。この式は、グリーンの定理において、

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \Leftarrow \begin{cases} P(x, y) = J_z(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} \\ Q(x, y) = J_z(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$
(7.36)

に対応することがわかります。

以上から、(7.33)は

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \frac{\partial J_x(x, y, \varphi(x, y))}{\partial y} \\ \frac{\partial J_y(x, y, \varphi(x, y))}{\partial x} \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \end{cases} \times dx dy$$
(7.37)



とまとめられた項から成り立ちます。従って、求める積分は

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left( -\frac{\partial J_x(x, y, \varphi(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial J_y(x, y, \varphi(x, y))}{\partial x} + \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] \right) dx dy$$
(7.38)

- 積分領域  $dx dy$  なので、 $x-y$  平面上の領域  $D$  になります (図 2a) です。第 1 項と第 2 項は、すぐに積分できて

$$\iint_D \left( -\frac{\partial J_x(x, y, \varphi(x, y))}{\partial y} \right) dx dy = \int_b^a \overbrace{J_x(x, y, \varphi(x, y))}^{y \text{ 積分を実行}} dx = \oint_C J_x(x, y, z) dx$$
(7.39)

$$\iint_D \frac{\partial J_y(x, y, \varphi(x, y))}{\partial x} dx dy = \int_a^\beta \overbrace{J_y(x, y, \varphi(x, y))}^{x \text{ 積分を実行}} dy = \oint_C J_y(x, y, z) dy$$
(7.40)

- それぞれ、図 1c ((7.40) の  $x$  積分) と 1e ((7.39) の  $y$  積分) を用いて  $\oint_C$  にする。積

分経路の向きを間違えないようにする  
になります。第 3 項は、(7.36)のグリーンの定理より、

$$\begin{aligned} \iint_S \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy &= \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \oint_C J_z(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} dx + J_z(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= \oint_C J_z(x, y, z) \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \end{aligned} \tag{7.41}$$

ですが、

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = dz$$

に注意して

$$\iint_S \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy = \oint_C J_z(x, y, z) \left( \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = \oint_C J_z(x, y, z) dz$$

になります。以上から、

$$\begin{aligned} \iint_S \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} &= \oint_C J_x(x, y, z) dx + \oint_C J_y(x, y, z) dy + \oint_C J_z(x, y, z) dz \\ &= \oint_C (J_x(x, y, z) dx + J_y(x, y, z) dy + J_z(x, y, z) dz) \end{aligned} \tag{7.42}$$

と計算できました。最終的に、ベクトル表記にして

$$J_x(x, y, z) dx + J_y(x, y, z) dy + J_z(x, y, z) dz = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \tag{7.43}$$

なので、

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

になります。これが**ストークスの定理**です。

### III. $\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x})$ と回転 (rotation)

ストークスの定理は「面積を囲む外周の線」に関連しています。そこで、一番簡単な長方形の外周に沿った線積分  $\oint_C \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$  において

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \tag{7.44}$$

を考えます。そこで

- 「外周に沿った線積分」から  $\nabla \times \mathbf{J}$  が自動的に現れることを示します。

微小な部分を考えていきます。図 3a のように

- $x-y$  平面上に微小長方形
  - $d\mathbf{x}$  は線の方向により変化する
- ので注意しましょう。  $x-y$  平面上なので、

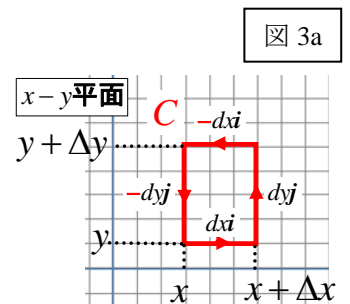
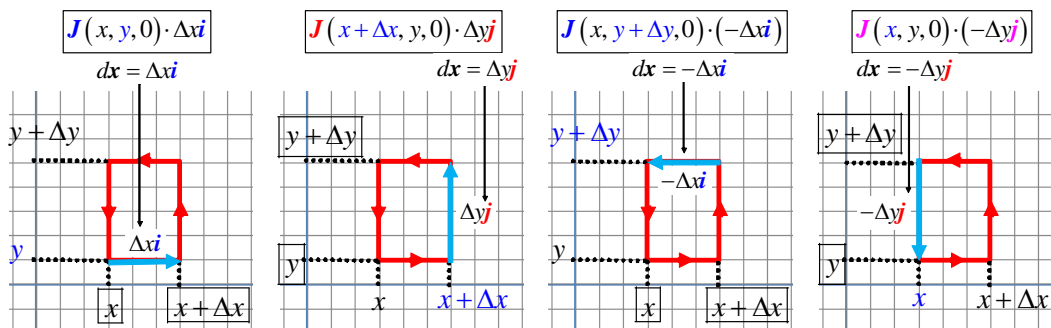


図 3a



$$z = 0 \Rightarrow \mathbf{x} : (x, y, 0) \tag{7.45}$$

です。図 1a で示した積分経路  $C$  との対応より  $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$  は 4 つの部分に分かれ



$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{J}(x, y, 0) \cdot \Delta x \mathbf{i} + \mathbf{J}(x + \Delta x, y, 0) \cdot \Delta y \mathbf{j} + \mathbf{J}(x + \Delta x, y + \Delta y, 0) \cdot (-\Delta x \mathbf{i}) + \mathbf{J}(x, y + \Delta y, 0) \cdot (-\Delta y \mathbf{j}) \tag{7.46}$$

と表せます。  $\mathbf{J} = J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j} + J_z \mathbf{k}$  なので、

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{i} = J_x, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{j} = J_y \tag{7.47}$$

より、

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = J_x(x, y, 0) \Delta x + J_y(x + \Delta x, y, 0) \Delta y - J_x(x + \Delta x, y + \Delta y, 0) \Delta x - J_y(x, y + \Delta y, 0) \Delta y \tag{7.48}$$

になります。ここで、

- 微小長方形が限りなく小さくなる時を考え、  $\Delta x \rightarrow 0$  と  $\Delta y \rightarrow 0$

で  $f(x + \Delta x)$  のテーラー展開：

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \\ &= f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{\overbrace{(\Delta x)^2}^{2! = 2 \cdot 1 = 2}}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{\overbrace{(\Delta x)^3}^{3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6}}{6} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{\overbrace{(\Delta x)^4}^{4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24}}{24} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} + \dots \end{aligned} \tag{7.49}$$

において (問題 4 :  $n!$  を説明せよ。)、  $\Delta x$  の項までとります：

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} \tag{7.50}$$

例えば、  $\Delta x = 1/1$  億 とすると、  $\Delta x = 1/1$  億  $\gg (\Delta x)^2 = 1/1$  億<sup>2</sup> なので  $(\Delta x)^2$  の項を無視して

も非常にいい精度で(7.50)が成り立ちます。

(7.50)を(7.48)の  $J_y(x + \Delta x, y, 0)$ ,  $J_x(x, y + \Delta y, 0)$  に適用して

$$\begin{aligned}
 J_y(x + \Delta x, y, 0) &= \overset{\text{多変数のときは偏微分にする}}{J_y(x, y, 0) + \frac{\partial J_y(x, y, 0)}{\partial x} \Delta x} \\
 J_x(x, y + \Delta y, 0) &= \overset{\text{多変数のときは偏微分にする}}{J_x(x, y, 0) + \frac{\partial J_x(x, y, 0)}{\partial y} \Delta y}
 \end{aligned}
 \tag{7.51}$$

です。従って、(7.48)は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= J_x(x, y, 0)\Delta x + J_y(x + \Delta x, y, 0)\Delta y - J_x(x, y + \Delta y, 0)\Delta x - J_y(x, y, 0)\Delta y \\
 &= \cancel{J_x(x, y, 0)\Delta x} + \left( \cancel{J_y(x, y, 0)} + \frac{\partial J_y(x, y, 0)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \\
 &\quad - \left( \cancel{J_x(x, y, 0)} + \frac{\partial J_x(x, y, 0)}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x - \cancel{J_y(x, y, 0)\Delta y} \\
 &= \frac{\partial J_y(x, y, 0)}{\partial x} \Delta x \Delta y - \frac{\partial J_x(x, y, 0)}{\partial y} \Delta y \Delta x = \left( \frac{\partial J_y(x, y, 0)}{\partial x} - \frac{\partial J_x(x, y, 0)}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y
 \end{aligned}
 \tag{7.52}$$

と計算でき、

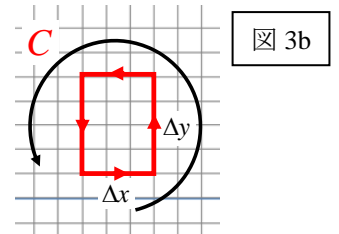
$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \left( \frac{\partial J_y(x, y, 0)}{\partial x} - \frac{\partial J_x(x, y, 0)}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y
 \tag{7.53}$$

となります。これを、(7.15)の

$$\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \overbrace{\left( \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial y} - \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial z} \right)}^{x\text{成分}} \mathbf{i} + \overbrace{\left( \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial z} - \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial x} \right)}^{y\text{成分}} \mathbf{j} + \overbrace{\left( \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial x} - \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial y} \right)}^{z\text{成分}} \mathbf{k}
 \tag{7.54}$$

と比較して、

$$\mathbf{J}(x, y, 0) \cdot d\mathbf{x} = (\nabla \times \mathbf{J}(x, y, 0))_z \Delta x \Delta y \leftarrow \text{微小長方形}
 \tag{7.55}$$



が得られます。(7.55)の結果、

- 積分経路が 1 周すると  $\nabla \times \mathbf{J}$  が現れる

ことがわかります。図 3b のように積分経路に沿って回転 (rotation) しながら積分するので、この **rot** を用いて

$$\nabla \times \mathbf{J} = \text{rot} \mathbf{J} \quad (\text{rotation: 回転})
 \tag{7.56}$$

とも表します。