

06 ガウスの定理：面積分と体積分

I. 直交座標系

ガウスの定理は、

- 微分して、すぐに積分すると元に戻る

というルールを 3 次元積分に適用した定理になります。よく知っているのは

$$\int \frac{dJ(x)}{dx} dx \left(\begin{array}{l} \text{変数が1つの場合は} \\ \text{全微分}d=\text{偏微分}\partial \\ = \end{array} \int \frac{\partial J(x)}{\partial x} dx \right) = J(x) \quad \begin{array}{l} \text{簡単化のため} \\ \text{に0にします} \\ +C \end{array} \quad (6.1)$$

です（積分定数 C を 0 にしています）。これを 2 次元積分（**面積分**）に拡張すると

$$\iint \frac{\partial J(x, y)}{\partial x} dx dy = \int J(x, y) dy \quad (6.2)$$

また、3 次元積分（**体積分**）に拡張すると

$$\iiint \frac{\partial J(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \iint J(x, y, z) dy dz \xrightarrow{(x, y, z) \rightarrow (x)} \iiint \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x} dx dy dz = \iint J(\mathbf{x}) dy dz \quad (6.3)$$

になります。(6.3)の関係がガウスの定理として一般化されます。

そこで、(6.3)を元に $\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x}$ の拡張を

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow \nabla : \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ J(\mathbf{x}) &\rightarrow \mathbf{J}(\mathbf{x}) : (J_x(\mathbf{x}), J_y(\mathbf{x}), J_z(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (6.4)$$

の対応より $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x})$:

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial z} \quad (6.5)$$

とします。そうすると、(6.3)に対応する 3 次元積分は

$$\iiint \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x} dx dy dz \rightarrow \iiint \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) dx dy dz (= \int \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) dx dy dz) \quad (6.6)$$

に拡張されます。(6.6)より

$$\begin{aligned} \iiint \nabla \cdot \mathbf{J} dx dy dz &= \iiint \left(\frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iiint \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial x} dx dy dz + \iiint \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial y} dx dy dz + \iiint \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial z} dx dy dz \end{aligned} \quad (6.7)$$

です。ここで、(6.1)に対応した公式：

$$\int \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial x} dx = J_x(\mathbf{x}), \quad \int \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial y} dy = J_y(\mathbf{x}), \quad \int \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial z} dz = J_z(\mathbf{x}) \quad (6.8)$$

より、

$$\begin{aligned} \iiint \nabla \cdot \mathbf{J} dx dy dz &= \iint J_x(\mathbf{x}) dy dz + \iint J_y(\mathbf{x}) dx dz + \iint J_z(\mathbf{x}) dx dy \\ &= \iint [J_x(\mathbf{x}) dy dz + J_y(\mathbf{x}) dx dz + J_z(\mathbf{x}) dx dy] \end{aligned} \quad (6.9)$$

になります。微小面積ベクトル $d\mathbf{S} = dy dz \mathbf{i} + dz dx \mathbf{j} + dx dy \mathbf{k}$ を用いると

$$\begin{aligned} J_x(\mathbf{x}) dy dz + J_y(\mathbf{x}) dx dz + J_z(\mathbf{x}) dx dy \\ = \underbrace{J_x}_{A_x} \underbrace{dy dz}_{B_x} + \underbrace{J_y}_{A_y} \underbrace{dz dx}_{B_y} + \underbrace{J_z}_{A_z} \underbrace{dx dy}_{B_z} = \underbrace{\mathbf{J}}_{(A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k})} \cdot \underbrace{d\mathbf{S}}_{(B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})} = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (6.10)$$

なので、(6.9)は

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{J} dx dy dz = \iint \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} \quad (6.11)$$

が成立します。

これで、ほぼ「ガウスの定理」が導出できましたが、実際は、積分範囲を示さないといけません。積分範囲を仮に $x:(x_1, x_2)$, $y:(y_1, y_2)$, $z:(z_1, z_2)$ とするとき、その積分範囲で囲まれる 3 次元の領域を V とすると、(6.6)は

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dx dy dz \left(= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} dx dy dz \right) \quad (6.12)$$

と変更されます。公式(6.8)は、実際は

$$\begin{cases} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial J_x(\mathbf{x})}{\partial x} dx = J_x(x_2, y, z) - J_x(x_1, y, z) \\ \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial J_y(\mathbf{x})}{\partial y} dy = J_y(x, y_2, z) - J_y(x, y_1, z) \\ \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial J_z(\mathbf{x})}{\partial z} dz = J_z(x, y, z_2) - J_z(x, y, z_1) \end{cases} \quad (6.13)$$

と変更になります。従って、

$$\begin{aligned} \iiint \nabla \cdot \mathbf{J} dx dy dz &= \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz [J_x(x_2, y, z) - J_x(x_1, y, z)] \\ &\quad + \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} dx [J_y(x, y_2, z) - J_y(x, y_1, z)] \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy [J_z(x, y, z_2) - J_z(x, y, z_1)] \end{aligned} \quad (6.14)$$

となります。各項の積分範囲が違うので、(6.9)のようにまとめられません。これは、直交座標で表していますが、円筒座標や極座標やそれ以外にも色々な座標があります。(6.14)から

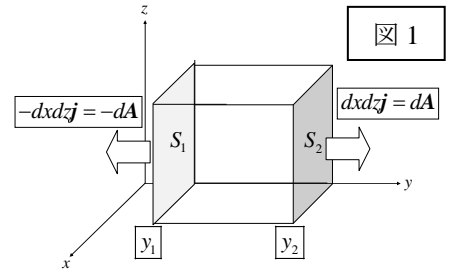
- どんな座標にも適用できるように一般化

しなければなりません。

II. 一般座標系

座標に依らない表示を考えるために、直交座標での表式 (6.14) の意味するところを図 1 に従って考えてみます。図 1

は $\int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} dx [J_y(x, y_2, z) - J_y(x, y_1, z)]$ の項に対応しています。



そこで、図のように、 y_2 の面 S_2 の方向を

$$dA = dxdzj \tag{6.15}$$

とすると、

$$y_1 \text{ の面 } S_1 \text{ の方向} = -y_2 \text{ の面 } S_2 \text{ の方向} \tag{6.16}$$

なので、

$$J_y(x, y_2, z) dxdz = \mathbf{J}(x, y_2, z) \cdot dxdzj = [\mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A}]_{y=y_2} \tag{6.17}$$

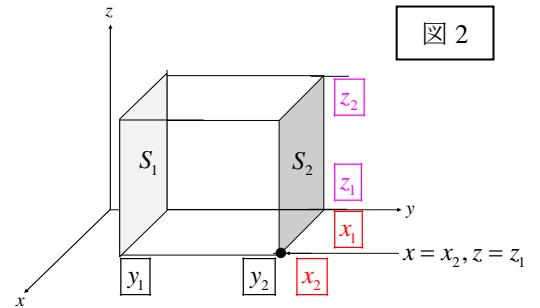
$$J_y(x, y_1, z) dxdz = \mathbf{J}(x, y_1, z) \cdot dxdzj = -[\mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A}]_{y=y_1}$$

になります (問題 1 : $J_y(x, y_2, z) dxdz = \mathbf{J}(x, y_2, z) \cdot dxdzj$ を示せ)。これより、

$$\int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} dx [J_y(x, y_2, z) - J_y(x, y_1, z)] = \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} ([\mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A}]_{y=y_2} + [\mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A}]_{y=y_1}) \tag{6.18}$$

が得られます。積分範囲を動く (x, z) の値は

- $\int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A}]_{y=y_1}$: $y = y_1$ にある面 S_1 上のすべての点
- $\int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A}]_{y=y_2}$: $y = y_2$ にある面 S_2 上のすべての点



を表します。例えば、 $x = x_2, z = z_1$ は面上左隅の点を表します。そこで、

- 積分範囲として面を指定して示すことにすると、面積分として表せ

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A}]_{y=y_1} = \iint_{S_1} \mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A} \tag{6.19}$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A}]_{y=y_2} = \iint_{S_2} \mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A}$$

を得ます。さらに、

- 積分領域として、囲まれた y 方向の領域 S

を表すと \oiint_S 記号を用いて表せ

$$\oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A} = \iint_{S_1} \mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A} + \iint_{S_2} \mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A} \quad (y \text{ 方向のみ}) \quad (6.20)$$

のように、両面をとる約束とします。以上から

$$\oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{A} = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} dx [J_y(x, y_2, z) - J_y(x, y_1, z)] \quad (6.21)$$

を得ます。結局、これを残りの面に適用して

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot dydz\mathbf{i} &= \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz [J_x(x_2, y, z) - J_x(x_1, y, z)] \\ \oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot dx dy\mathbf{k} &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy [J_z(x, y, z_2) - J_z(x, y, z_1)] \end{aligned} \quad (6.22)$$

すべての面の寄与を加えると

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot dydz\mathbf{i} + \oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot dx dz\mathbf{j} + \oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot dx dy\mathbf{k} \\ = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz [J_x(x_2, y, z) - J_x(x_1, y, z)] + \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} dx [J_y(x, y_2, z) - J_y(x, y_1, z)] \\ + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy [J_z(x, y, z_2) - J_z(x, y, z_1)] \end{aligned} \quad (6.23)$$

になります。ここで、左辺は

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot dydz\mathbf{i} + \oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot dx dz\mathbf{j} + \oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot dx dy\mathbf{k} \\ = \oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot (dydz\mathbf{i} + dx dz\mathbf{j} + dx dy\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (6.24)$$

なので

$$dydz\mathbf{i} + dx dz\mathbf{j} + dx dy\mathbf{k} = d\mathbf{S} \quad (6.25)$$

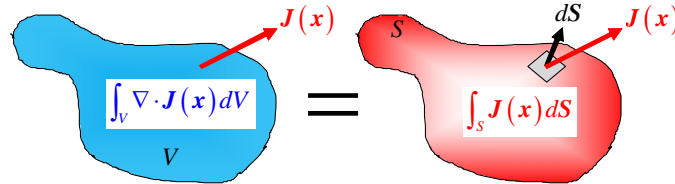
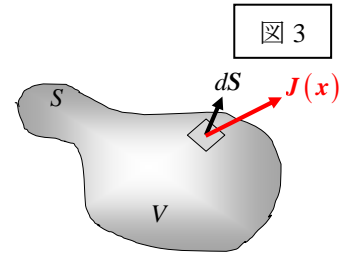
に注意して、(6.24)は最終的に

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{J}(x, y, z) \cdot d\mathbf{S} &= \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz [J_x(x_2, y, z) - J_x(x_1, y, z)] + \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} dx [J_y(x, y_2, z) - J_y(x, y_1, z)] \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy [J_z(x, y, z_2) - J_z(x, y, z_1)] \end{aligned} \quad (6.26)$$

と表す事ができます。従って、座標系に依らない**ガウスの定理**として、直交座標系に依存した表記の体積要素 $dx dy dz$ も dV (Volume:体積) とします：

$$\boxed{\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J}(x) dV = \oiint_S \mathbf{J}(x) \cdot d\mathbf{S}} \quad (\text{ガウスの定理}) \quad (6.27)$$

になります ((x, y, z) のかわりに (\mathbf{x}) を用いています)。領域は、例えば、一般の形として図 3 です。閉曲面を S とするとき、 S で囲まれた立体の体積が V になります。積分領域が図 1 のような直方体の時には、 $\oiint_S \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}$ は $d\mathbf{S}$ による面の向きを考慮して各面上の積分を実行し、結局(6.14)で計算することになります。



Ⅲ. ∇ と流速

ここで、 ∇ の数学的定義は、 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ で与えられています。 ∇ の物理における

役割について説明しましょう。そのため、 \mathbf{J} として

- 物質の流れを示すベクトル **流速** : \mathbf{J}

を考えます。例えば、

- 水流 (水分子の流れ)
- 電流 (電子の流れ)

などであります。従って、ミクロのレベルで見ると分子や電子の (平均) 速度ベクトルに比例することがわかります。そこで、

- 速度は 1 秒当りの

なので、 \mathbf{J} を

- 1 秒当りの移動量 (流速) \Rightarrow 1 秒当り **1 m² 当り** の移動量 (流速)

として考えることにします。

さて、図 4 のようにある物質が十分小さな箱 ($\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$) を通って出て行っています。もとの大きな箱の微小部分で、大きな箱での流出量はこの微小箱で埋め尽くせば得られます。この作業を、数学では**積分**といいます。このとき、 Δt 秒間の流出量の質量は、

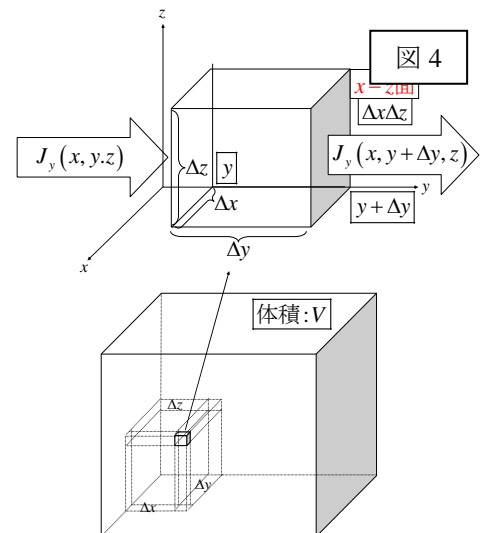
- 流出量の質量 = 1 秒当り箱の面を通る流出量 (流速) の変化 $\Delta J \times$ 面の面積

になります。ここで、

- 各面積は $\Delta x \Delta y, \Delta y \Delta z, \Delta x \Delta z$

で表せます。微小面積による流出量は、図 4 を参考にして、

- $x-z$ 面は y 方向に向いているので流速を J_y



と名付けるルールにすると、各面での流速を

$$\begin{aligned} x-y\text{面}: J_z(\mathbf{x}) &= J_z(x, y, z) \\ y-z\text{面}: J_x(\mathbf{x}) &= J_x(x, y, z) \\ x-z\text{面}: J_y(\mathbf{x}) &= J_y(x, y, z) \end{aligned} \quad (6.28)$$

と名前をつけておきます。そして、ベクトル $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ として

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) : (J_x(\mathbf{x}), J_y(\mathbf{x}), J_z(\mathbf{x})) \quad (6.29)$$

とおきます。このとき、図 4 から $x-z$ 面の Δt 秒当りの流出量が計算できて、

$$\text{入った量} : [J_y(x, y, z) \Delta x \Delta z] \Delta t, \quad \text{出た量} : [J_y(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z] \Delta t \quad (6.30)$$

になります (問題 2 : 何故、 Δt を掛けてあるか?)。従って、流出量は

- **流出量 = 出た量 - 入った量** で計算できる

ので

$$\text{流出量} = ([J_y(x, y + \Delta y, z) - J_y(x, y, z)] \Delta x \Delta z) \Delta t \quad (6.31)$$

になります。残りの面からの流出量を加えて

$$\begin{aligned} \text{流出量} = & \underbrace{[J_x(x + \Delta x, y, z) - J_x(x, y, z)] \Delta y \Delta z \Delta t}_{x \rightarrow y \rightarrow z} + \underbrace{[J_y(x, y + \Delta y, z) - J_y(x, y, z)] \Delta z \Delta x \Delta t}_{y \rightarrow z \rightarrow x} \\ & + \underbrace{[J_z(x, y, z + \Delta z) - J_z(x, y, z)] \Delta x \Delta y \Delta t}_{z \rightarrow x \rightarrow y} \end{aligned} \quad (6.32)$$

になります。ここで、 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} J_x(x + \Delta x, y, z) &= J_x(x, y, z) + \frac{\partial J_x(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \\ J_y(x, y + \Delta y, z) &= J_y(x, y, z) + \frac{\partial J_y(x, y, z)}{\partial y} \Delta y \\ J_z(x, y, z + \Delta z) &= J_z(x, y, z) + \frac{\partial J_z(x, y, z)}{\partial z} \Delta z \end{aligned} \quad (6.33)$$

が成立 (テーラー展開の最初の 2 項) します。これを (6.32) に代入して、

$$\begin{aligned} \text{流出量} &= \left[\frac{\partial J_x(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z \Delta t + \left[\frac{\partial J_y(x, y, z)}{\partial y} \Delta y \right] \Delta z \Delta x \Delta t + \left[\frac{\partial J_z(x, y, z)}{\partial z} \Delta z \right] \Delta x \Delta y \Delta t \\ &= \left[\frac{\partial J_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial J_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial J_z(x, y, z)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \end{aligned} \quad (6.34)$$

従って、

$$\text{流出量} = \left[\frac{\partial J_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial J_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial J_z(x, y, z)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (6.35)$$

とわかります。ここで、

$$\nabla: \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}): (J_x(\mathbf{x}), J_y(\mathbf{x}), J_z(\mathbf{x})) \quad (6.36)$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} J_x + \frac{\partial}{\partial y} J_y + \frac{\partial}{\partial z} J_z &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} J_x + \frac{\partial}{\partial y} J_y + \frac{\partial}{\partial z} J_z &= \nabla \cdot \mathbf{J} \end{aligned} \quad (6.37)$$

が得られます。すなわち、

$$\text{流出量} = \left[\frac{\partial J_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial J_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial J_z(x, y, z)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (6.38)$$

と計算されます。従って、 $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x})$ は

$$\frac{\text{流出量}}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t} = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (6.39)$$

になります。 $\Delta x \Delta y \Delta z$ は微小領域の体積になります。ここで

$$\frac{\text{流出量}}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t} = \text{単位時間あたり単位体積当たりの流出量} \quad (6.40)$$

なので、 ∇ の物理的意味は、

- $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x})$ は単位時間あたり単位体積当たりの流出量

とわかりました。(6.38)では、

- $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t \rightarrow 0$ の極限で dx, dy, dz, dt と表記する

ので

$$\text{流出量} = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) dx dy dz dt \quad (6.41)$$

となります。これより、測定開始 t_1 秒目から終了 t_2 秒目とするとき、全体積 V からの流出量は、

$$\text{全流出量} = \int \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) dx dy dz dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) dx dy dz \quad (V = \text{箱の体積}) \quad (6.42)$$

と計算できます。

また、 $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x})$ は「外に放出」という「**発散**する」様子を表すので、

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \text{div} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (\text{divergence: 発散}) \quad (6.43)$$

と記述することもあります。従って、ガウスの定理は、

$$\boxed{\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) dV &= \oiint_S \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} \\ \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{x}) dV &= \oiint_S \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}} \quad (6.44)$$

と 2 つの表記でまとめられます。

IV. マックスウェルの電磁気学

電磁気学では、真空中のマックスウェルの電磁場方程式は、電場を $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ 、電荷密度を $\rho(\mathbf{x})$ とすると

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}) \quad (6.45)$$

で与えられます。この関係式より、(6.27)は、 $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ と置いて

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) dV = \oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} \quad (6.46)$$

(6.45)を用いて、全電荷を Q とすると

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) dV = \iiint_V \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{x}) dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (6.47)$$

なので、より

$$\boxed{\frac{Q}{\epsilon_0} = \oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}} \quad (6.48)$$

がわかります。これを、 $d\mathbf{S}$ を半径 R の球面で計算すると、【05 2重積分と面積分】－VII.

例：球面上の面積分：閉じた面より

$$d\mathbf{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} \quad (6.49)$$

なので、

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oiint_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\substack{\theta=0 \rightarrow \pi \\ \phi=0 \rightarrow 2\pi}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} = R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (6.50)$$

になります。ここで、 $E_r(\mathbf{x})$ として

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = E_r(\mathbf{x}) \quad (6.51)$$

とすると、(6.50)は

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi E_r(\mathbf{x}) \quad (6.52)$$

ここで、 $E_r(\mathbf{x})$ は極座標では、 $E_r(r, \theta, \phi)$ と表されるが

$$E_r(\mathbf{x}) \text{ は、(角度に依らない) 球対称 : } E_r(\mathbf{x}) = E_r(r) \text{ at } r = R \quad (6.53)$$

と仮定すると、

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi E_r(R) = R^2 E_r(R) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (6.54)$$

です。積分は

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \quad (6.55)$$

になるので (問題 3 : (6.55) を計算して示せ)、

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = R^2 E_r(R) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = R^2 E_r(R) 4\pi \quad (6.56)$$

になります。つまり、

$$E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad (6.57)$$

従って、 \mathbf{x} 位置にある電荷 q に働く力 \mathbf{F} は、 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = q \boxed{\quad}$ で与えられるので、中心から R

にある電荷に働く力 $F_r(R)$ は、(6.57) より

$$F_r(R) = qE_r(R) = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad (6.58)$$

がえられる。これを $\boxed{\quad}$ 力といいます。

V. 演習

閉曲面を S とし、 S で囲まれた立体の体積を V とするとき

$$\oiint_S (x dydz + y dzdx + z dxdy) = 3V \quad (V = \iiint_V dx dy dz) \quad (6.59)$$

を証明せよ。

(6.59) は、 $\mathbf{x} : (x, y, z)$ と $d\mathbf{S} : (dydz, dzdx, dxdy)$ で表す事ができて

$$x dydz + y dzdx + z dxdy = \mathbf{x} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.60)$$

従って、は

$$\oiint_S (x dydz + y dzdx + z dxdy) = \oiint_S \mathbf{x} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.61)$$

となります。そこで、

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = xi + yj + zk \quad (6.62)$$

と置けばガウスの定理(6.27)を利用できるようになり、(6.61)は $\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) dx dy dz$ に等し

くなるので

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{x} = \left(\frac{\overline{A_x}}{\partial} \mathbf{i} + \frac{\overline{A_y}}{\partial} \mathbf{j} + \frac{\overline{A_z}}{\partial} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\begin{matrix} \overline{B_x} & \overline{B_y} & \overline{B_z} \\ x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \end{matrix} \right) \quad (6.63)$$

より

$$\left(\overline{A_x} \mathbf{i} + \overline{A_y} \mathbf{j} + \overline{A_z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\overline{B_x} \mathbf{i} + \overline{B_y} \mathbf{j} + \overline{B_z} \mathbf{k} \right) = \overline{A_x} \overline{B_x} + \overline{A_y} \overline{B_y} + \overline{A_z} \overline{B_z} \quad (6.64)$$

を用いて

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\overline{A_x}}{\partial} \mathbf{i} + \frac{\overline{A_y}}{\partial} \mathbf{j} + \frac{\overline{A_z}}{\partial} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\begin{matrix} \overline{B_x} & \overline{B_y} & \overline{B_z} \\ x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \end{matrix} \right) = \frac{\overline{A_x}}{\partial} \overline{B_x} x + \frac{\overline{A_y}}{\partial} \overline{B_y} y + \frac{\overline{A_z}}{\partial} \overline{B_z} z \quad (6.65)$$

となります。ここで

$$\frac{\partial}{\partial x} x = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y} y = 1, \quad \frac{\partial}{\partial z} z = 1 \quad (6.66)$$

なので、

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{x} = 3} \quad (6.67)$$

より

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{x} = 3 \quad (6.68)$$

です。従って、

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} dx dy dz = \iiint_V 3 dx dy dz = 3V \quad \left(V = \iiint_V dx dy dz \right) \quad (6.69)$$

が証明できました。