

05 2重積分と面積分

I.2 重積分

x と y で2回積分することを「2重積分」といいます。この2重積分は何を意味しているのでしょうか？通常の積分（1重積分）では、

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (5.1)$$

は、図形的には図 1a のように**面積**を表しています。つまり、

- $f(x)$ を高さとしてプロットすると図 1a のような曲線 C

ができます。そのとき、図 1a では

$$y = f(x) \quad (5.2)$$

となります。（微小）長方形は

$$\text{高さ} = f(x) \quad (5.3)$$

$$\text{底辺} = dx \quad (5.4)$$

なので、

$$f(x) dx \quad (5.5)$$

は微小長方形の面積であることがわかります。積分により、

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (5.6)$$

は

- 上辺を曲線 C
- 底辺を x 軸

とする

- **平面図形の面積**

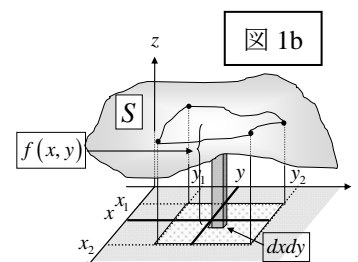
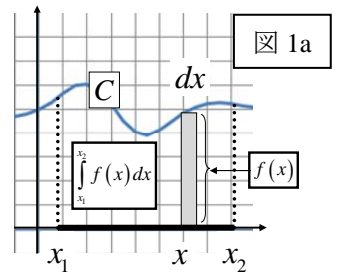
であることがわかります。

では、(5.1)に対応した2重積分は

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy f(x, y) \quad (5.7)$$

図形的には何を表すでしょうか？そこで、

- $f(x, y)$ を高さとしてプロットしたら図 1b のような曲面 S できた



とします。そのとき、図 1b では

$$z = f(x, y) \tag{5.8}$$

となります。(微小) 四角柱は

$$\text{高さ} = f(x, y) \tag{5.9}$$

$$\text{底面積} = dx dy \tag{5.10}$$

なので、

$$f(x, y) dx dy \tag{5.11}$$

は微小四角柱の**体積**であることがわかります。積分により、

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy f(x, y) \tag{5.12}$$

は

- 上面を曲面 S 上での曲がった四辺形
- 底面を $x-y$ 平面上での長方形

とする

- **立体の体積**

であることがわかります。

II. 面積分：平面上

面積分も 2 重積分で、(5.7)

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy f(x, y)$$

と表します。ところで、

- $dx dy$ は微小面積

ですが、これ以外にも考えられる微小面積があります。そこで、図 2a のような体積 V の直方体を考えてみます。面の方向と面の名前は

- x 方向・・・ $y-z$ 平面 ($x \rightarrow y \rightarrow z$ の順番)
- y 方向・・・ $z-x$ 平面 ($y \rightarrow z \rightarrow x$ の順番)
- z 方向・・・ $x-y$ 平面 ($z \rightarrow x \rightarrow y$ の順番)

のような関係があることがわかります。それぞれの面に微小面積があり、図 2b を参考に

- x 方向・・・ $y-z$ 平面・・・ $dy dz$ ($x \rightarrow y \rightarrow z$ の順番)
- y 方向・・・ $z-x$ 平面・・・ $dz dx$ ($y \rightarrow z \rightarrow x$ の順番)
- z 方向・・・ $x-y$ 平面・・・ $dx dy$ ($z \rightarrow x \rightarrow y$ の順番)

と計算できます。 $dx dy$ 以外に $dy dz$, $dz dx$ が丁度 3 つ現れるので、この 3 つをまとめて**微小面**

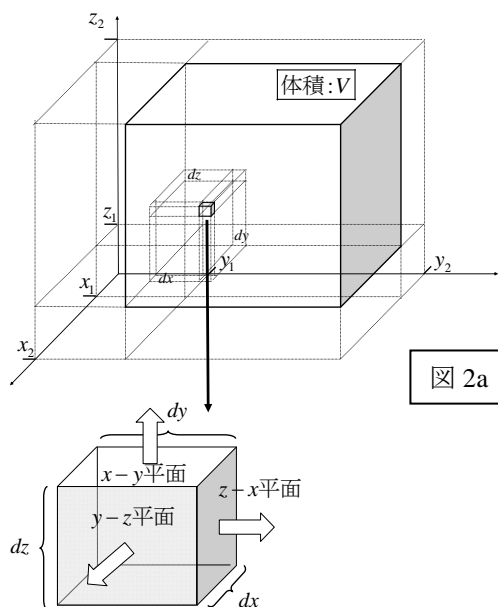


図 2a

積ベクトル dS :

$$dS = dydz\mathbf{i} + dzdx\mathbf{j} + dxdy\mathbf{k} \tag{5.13}$$

として導入します。ここで、

- 面の方向 dS は面に垂直になっている

ので注意しましょう。

dS を用いた積分を得るために、面を通過する流体の量を求めたいと思います。例として、図 2c のように流体が

- 速度 v_z で $x-y$ 面を z 方向に通過

している場合に、**単位時間 (1 秒間)** の微小通過体積

$$z \text{ 方向微小通過体積} = v_z dxdy \tag{5.14}$$

同様にして $y-z$ 面を x 方向、 $z-x$ 面を y 方向の単位時間の微小通過体積は、

$$x \text{ 方向微小通過体積} = v_x dydz \tag{5.15}$$

$$y \text{ 方向微小通過体積} = v_y dzdx \tag{5.16}$$

になります。従って、全方向の微小通過体積、つまり、流体の単位時間の微小量は

$$v_x dydz + v_y dzdx + v_z dxdy \tag{5.17}$$

になります。ここで

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} : (v_x, v_y, v_z) \tag{5.18}$$

$$dS = dydz\mathbf{i} + dzdx\mathbf{j} + dxdy\mathbf{k} : (dydz, dzdx, dxdy) \tag{5.19}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} v_x dydz + v_y dzdx + v_z dxdy &= v_x \underbrace{\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}}_1 dydz + v_y \underbrace{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}}_1 dzdx + v_z \underbrace{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}_1 dxdy \\ &= (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \cdot (dydz\mathbf{i} + dzdx\mathbf{j} + dxdy\mathbf{k}) = \mathbf{v} \cdot dS \end{aligned} \tag{5.20}$$

とわかります。従って、流体の単位時間当りの全通過量は、

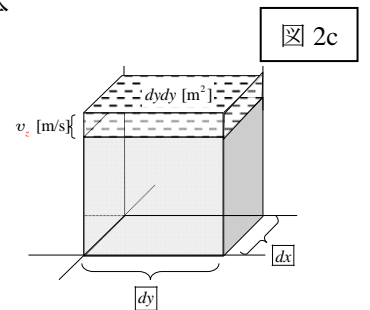
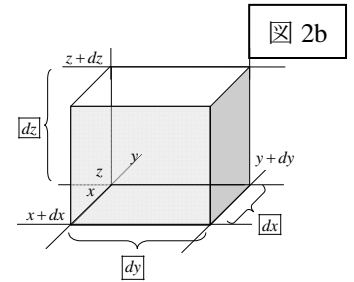
- $dxdy$ の項は dx や dy 等と 2 回積分 (**2 重積分**)

して

$$\iint \mathbf{v} \cdot dS = \iint v_x dydz + \iint v_y dzdx + \iint v_z dxdy \tag{5.21}$$

となります。図 2a より積分範囲を明示すると $\int_{y_2}^{y_1} \int_{z_1}^{z_2} v_x dydz + \int_{z_1}^{z_2} \int_{x_1}^{x_2} v_y dzdx + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} v_z dxdy$ ですが、 x, y の

積分範囲としてわかるような表記：



$$\boxed{\text{単位時間当りの全通過量} = \iint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}} = \int_{y_2}^{y_1} dy \int_{z_1}^{z_2} dz v_x + \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} dx v_y + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy v_z \quad (5.22)$$

をして積分を計算することになります。これを速度 \mathbf{v} 以外の一般的なベクトル $\mathbf{A}:(A_x, A_y, A_z)$ にも拡張でき、

$$\boxed{\iint \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{y_2}^{y_1} dy \int_{z_1}^{z_2} dz A_x(\mathbf{x}) + \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} dx A_y(\mathbf{x}) + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy A_z(\mathbf{x})} \quad (5.23)$$

の面積分を得ることができます。実際に、

- $\iint \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}$ を計算するには $\int_{y_2}^{y_1} dy \int_{z_1}^{z_2} dz A_x(\mathbf{x}) + \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{x_1}^{x_2} dx A_y(\mathbf{x}) + \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy A_z(\mathbf{x})$ を用いる

というルールができます(積分は直交座標 dx, dy, dz 以外にも極座標 $dr, d\theta, d\phi$ など使います)。

また、暗黙の了解として \iint のかわりに \int を用いて

$$\boxed{\int \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} (= \iint \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S})} \quad (5.24)$$

と表記される事もあります。

Ⅲ.面積分：曲面上

今回は

- $x-y$ 平面上の積分 \Rightarrow 曲面 S 上の積分

を考えます。被積分関数を $g(x, y)$ として

- 関数 $g(x, y)$ を曲面 S 上で積分

します。曲面は曲がっているので、微小面積は平面用の直交座標での $dx dy$ のように簡単に表せません。そこで、微小面積をあらわす記号として dS を用います。後ほど、(5.19)を使った

$$d\mathbf{S} = |d\mathbf{S}| \hat{\mathbf{n}} = dy dz \mathbf{i} + dz dx \mathbf{j} + dx dy \mathbf{k} \quad (5.25)$$

になることがわかります。 $x-y$ 平面 ($dz=0$) では

$$\boxed{dS = dx dy \cdots x-y \text{平面上}} \quad (5.26)$$

です。従って、(5.12)は

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy f(x, y) = \iint_S f(x, y) dS \quad (S: x-y \text{平面}) \quad (5.27)$$

と表示されます。

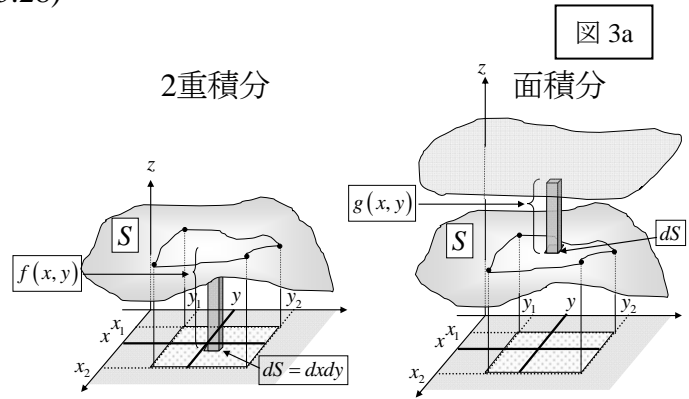
さて、積分

$$\iint_S g(x, y) dS \quad (S: \text{曲面}) \quad (5.28)$$

は、曲面 S 上で行うので、その変数は曲面上にあり、(5.8): $z = f(x, y)$ を満たします。

図 3a には、2重積分 (図 1b と同じ) と面積分の違いを示してあります。違いは、 z の値の違いとして現れ

- **2重積分** : $x-y$ 平面 $z=0$ 上での積分 (図 1b)
- **面積分** : 曲面 $z = f(x, y)$ 上での積分



になります (図 3b)。つまり、

- 違いは、**面の種類の違い**

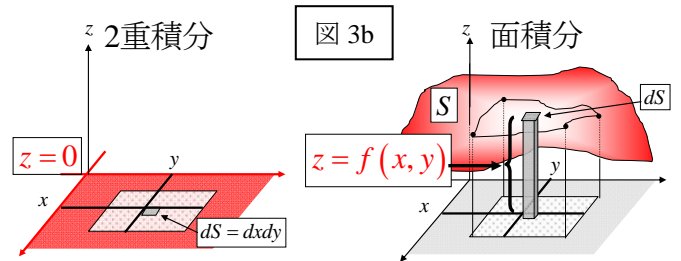
に帰着します。どちらも 2重積分なので、この違いを吸収した式で表してみます。違いを吸収した式では、同じ関数名として h を用い、この関数名 h を読み替えてそれぞれの積分に一致させます。積分に現れられる座標 x, y 以外に、図 3a,b には座標として z 座標もあるので、関数も拡張して z 座標を含めます。つまり、

2重積分 : $z=0$ 上

$$\iint_S f(x, y) dS \rightarrow \iint_S h(x, y, 0) dS \quad (5.29)$$

面積分 : $z = f(x, y)$ 上

$$\iint_S g(x, y) dS \rightarrow \iint_S h(x, y, f(x, y)) dS \quad (5.30)$$



のように同じ関数 $h(x, y, z)$ を用いて表すこととなります。読み替えは

$$\iint_S h(x, y, z) dS = \begin{cases} S: x-y \text{ 平面上} (z=0) \text{ での2重積分} \Rightarrow h(x, y, 0) = f(x, y) \\ S: \text{曲面} (z = f(x, y)) \text{ 上での2重積分} \Rightarrow h(x, y, f(x, y)) = g(x, y) \end{cases} \quad (5.31)$$

です。計算できるかどうかは別にして、(5.31) はどんな曲面 S も指定できます。

次に、 $x-y$ 平面を残りの面 : $y-z$ 平面、 $z-x$ 平面に拡張するため、面を S_z と変更し、

$$\iint_{S_z} h(x, y, z) dx dy \quad (x-y \text{ 平面上なので(5.26) : } dS_z = dx dy \text{ が成り立っている}) \quad (5.32)$$

と表示します。残りの面 $y-z$ 面、 $z-x$ 面の寄与を集めて、 $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$ とベクトルにまとめることを目指し、(5.32) の $h \rightarrow h_z$ にして、

$$\iint_{S_z} h_z(x, y, z) dx dy + \iint_{S_x} h_x(x, y, z) dy dz + \iint_{S_y} h_y(x, y, z) dz dx \quad (5.33)$$

とすれば、(5.33)は

$$\begin{aligned} & \iint_{S_z} h_z(x, y, z) dx dy + \iint_{S_x} h_x(x, y, z) dy dz + \iint_{S_y} h_y(x, y, z) dz dx \\ &= \iint_S \overbrace{(h_x(x, y, z) \mathbf{i} + h_y(x, y, z) \mathbf{j} + h_z(x, y, z) \mathbf{k})}^{h(x)} \cdot \overbrace{(dydz \mathbf{i} + dzdx \mathbf{j} + dxdy \mathbf{k})}^{dS} = \iint_S \mathbf{h}(x) \cdot dS \end{aligned} \quad (5.34)$$

に等しいので、これが平面上の積分：

$$\iint_S \mathbf{h}(x) \cdot dS \quad (S: \text{平面上})$$

になります。形式上 S を曲面上に替えることで、**曲面上の面積分**：

$$\boxed{\iint_S \mathbf{h}(x) \cdot dS (= \int \mathbf{h}(x) \cdot dS : \text{省略形})} \leftarrow \begin{cases} \text{面が決められているので} \\ z = \varphi(x, y) : \mathbf{h}(x) = \mathbf{h}(x, y, \varphi(x, y)) \end{cases} \quad (5.35)$$

が得られます。従って、(5.24)は

$$\boxed{\iint_S \mathbf{A}(x) \cdot dS (= \int \mathbf{A}(x) \cdot dS : \text{省略形})} \quad (\text{面積分}) \quad (5.36)$$

と表記して計算することになります。特に、面が閉じているとき、閉じている記号として \oint を用いた積分記号 \oiint_S を用いて

$$\boxed{\oiint_S \mathbf{A}(x) \cdot dS (= \oint \mathbf{A}(x) \cdot dS : \text{省略形})} \quad (\text{面積分：閉じた面}) \quad (5.37)$$

と表します（例は、**VI. 球面上の面積分：閉じた面**で取り扱います）。

IV. 面積分：平面上と曲面上

曲面を指定しないと曲面上の面積分が計算できません。面を決めるのに、【03 微分ベクトル】－I. 一般曲面と微分ベクトルでは、

$$f(x, y, z) = c (= \text{一定}) \quad (5.38)$$

の条件を使用しました。例としては、半径 r の球面では $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $c = r^2$ を満たします。一方、(5.8)は

$$z = f(x, y) \quad (5.39)$$

としました。球面の例では、 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ なので、例えば、

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad (5.40)$$

です。ここで、(5.39)で(5.38)と同じ関数名 f が用いられているので、改めて(5.39)の関数名を φ として表し

$$z = \varphi(x, y) : \text{曲面を表す} \quad (5.41)$$

とします。そのとき、(5.38)は、

$$f(x, y, z) = c \Rightarrow \begin{cases} f(x, y, z) = z - \varphi(x, y) \\ c = 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

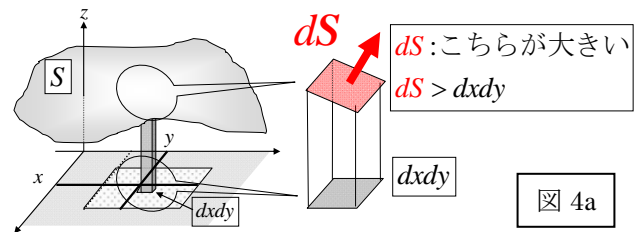
と当てられます。

さて、

- 曲面上の微小面積の大きさはベクトル $d\mathbf{S}$ の大きさです。 $d\mathbf{S}$ の大きさを dS と表すとき、

$$dS (= |d\mathbf{S}|) = \sqrt{(dydz)^2 + (dzdx)^2 + (dxdy)^2} = \sqrt{\frac{(dydz)^2}{(dxdy)^2} + \frac{(dzdx)^2}{(dxdy)^2} + 1} dxdy \quad (5.43)$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dxdy$$



従って、

$$dS > dxdy \quad (5.44)$$

です。この関係は図 4a よりも明らかです。面 S 上で(5.41)より $z = \varphi(x, y)$ を満たしているので、

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \\ \frac{dz}{dy} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (5.45)$$

と計算され

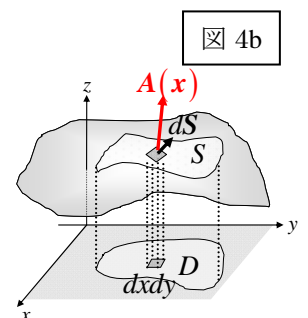
$$dS (= |d\mathbf{S}|) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\right)^2} dxdy \quad (5.46)$$

として与えられます。従って、

- $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ と $d\mathbf{S}$ のなす角度を $\theta(\mathbf{x})$ とする
- 角度 θ は曲面の場所 \mathbf{x} によって違うかもしれないので $\theta(\mathbf{x})$ となる

の角度 θ を用いて内積 $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S}$ が計算でき

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} &= |\mathbf{A}(\mathbf{x})| |d\mathbf{S}| \cos \theta = |\mathbf{A}(\mathbf{x})| \cos \theta dS \\ &= |\mathbf{A}(\mathbf{x})| \cos \theta(\mathbf{x}) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\right)^2} dxdy \end{aligned} \quad (5.47)$$



より、図のように、平面上の領域を D とすると

$$\iint_S \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D |\mathbf{A}(\mathbf{x})| \cos \theta(\mathbf{x}) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (5.48)$$

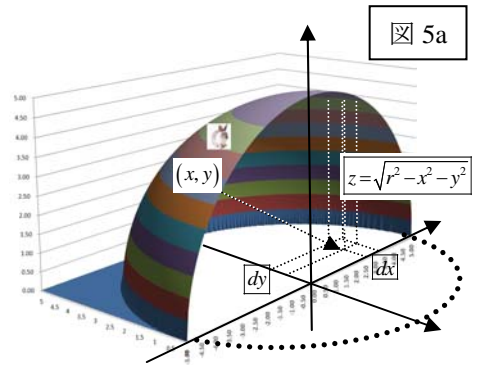
となります。

V. 例：半球の体積と2重積分

体積は、2重積分により、

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy f(x, y) \quad (5.49)$$

で計算できます。実際に体積を計算できる事を見るために、
 図 5a の半径 r の半球に適用してみます。球上の点 (x, y, z) は $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ を満たします。従って、 $z = f(x, y)$ を計算すると $z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ なので、図 5a の半径 r の半球（北半球）は $z \geq 0$ を用いて $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ 、従って



$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad (r^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftarrow \sqrt{\text{内}} \text{が正か} 0) \quad (5.50)$$

となります。体積は、積分値を I として、(5.49)より

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \quad (5.51)$$

と与えられます。この積分値は半球なので、球の体積 の 1/2 なので、

$$I = \frac{2}{3} \pi r^3 \quad (5.52)$$

です。(5.51)を積分してこの答えになれば、半球の**体積が計算**できる事になります。

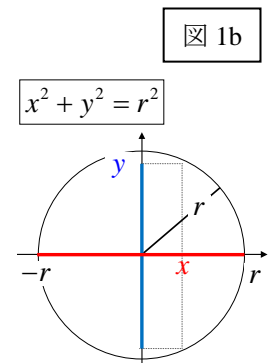
積分範囲を決めないといけません、まず、

- y を最初に積分する

とき、 x は から まで増加します。そのとき、 x を与えた

ときに y の最大値は、図 5b より なので、積分範囲は

$$\begin{aligned} -r &\leq x \leq r \\ -\sqrt{r^2 - x^2} &\leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2} \end{aligned} \quad (5.53)$$



となります。従って、(5.51)は、

$$I = \int_{-r}^r dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \sqrt{r^2-x^2-y^2} \quad (5.54)$$

と与えられます。(5.54)の計算方法は、媒介変数 θ を使います。まず、 $\sqrt{\quad}$ があるので、

- 三角関数 $\sin \theta$ を使って、 $\sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta$ を利用して $\sqrt{\quad}$ をはずす

という手法です。そこで、

$$\begin{cases} y = \sqrt{r^2-x^2} \sin \theta \Rightarrow -\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{dy}{d\theta} = \sqrt{r^2-x^2} \cos \theta \Rightarrow dy = \sqrt{r^2-x^2} \cos \theta d\theta \end{cases} \quad (5.55)$$

なので、

$$I = \int_{-r}^r dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \sqrt{r^2-x^2-y^2} = \int_{-r}^r dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-x^2} \cos \theta d\theta \sqrt{r^2-x^2} \cos \theta = \int_{-r}^r (r^2-x^2) dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \quad (5.56)$$

になります。三角関数の積分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$ は、

- 三角関数の2乗 ($\cos^2 \theta$) の積分はできない
- 三角関数の1乗の積分はできる

ので、【公式】 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$ を利用して

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (5.57)$$

を利用します。つまり、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} [\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] + \frac{1}{4} \left[\sin \left(2 \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(-2 \frac{\pi}{2} \right) \right] \stackrel{\sin \pi = 0}{=} \frac{1}{2} [\pi] + 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (5.58)$$

となる。(5.56)は

$$I = \int_{-r}^r (r^2-x^2) dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \int_{-r}^r (r^2-x^2) dx \frac{\pi}{2} \quad (5.59)$$

と計算できます。 x の積分は【公式】 $\int_{-r}^r x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{-r}^r$ ($x^0 = 1$)を利用して

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\pi}{2} \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{2} \left(r^2 \int_{-r}^r dx - \int_{-r}^r x^2 dx \right) = \frac{\pi}{2} \left(r^2 [x]_{-r}^r - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(r^2 [r - (-r)] - \frac{1}{3} [r^3 - (-r)^3] \right) = \frac{\pi}{2} \left(2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} \frac{6-2}{3} r^3 = \frac{\pi}{2} \frac{4}{3} r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3
 \end{aligned}
 \tag{5.60}$$

になります。従って、(5.52)と計算できました。

VI.例：半球の体積と球面上の面積分

2重積分と面積分の違いをみるために、図 6a のように、(5.51)を半径 r の球面上での積分：

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy z \rightarrow I = \iint_S z dS \quad (z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}) \tag{5.61}$$

を実行します。(5.46)を用いると

$$I = \iint_S z dS = \iint_S z \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right)^2} dx dy \tag{5.62}$$

になります。ここで、

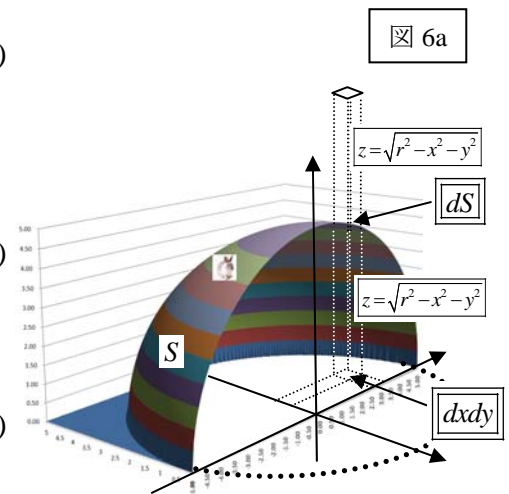
$$z = \varphi(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = (r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{5.63}$$

なので、 $\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}$ と $\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}$ を計算でき

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial (r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x} = \frac{\frac{\partial X^n}{\partial X} = nX^{n-1} \left(n = \frac{1}{2} \right)}{2(r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}-1}} \frac{\partial (r^2 - x^2 - y^2)}{\partial x} \\
 &= \frac{1}{2} (r^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial x^2 = 2x}{(-2x)} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial (r^2 - x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial \left(r^2 - \overbrace{x^2}^{x \rightarrow y} - \overbrace{y^2}^{y \rightarrow x} \right)^{\frac{1}{2}}}{\partial \overbrace{x}^{x \rightarrow y}} \right\} \text{にて } x \leftrightarrow y$$

$$= \left\{ -\frac{\overbrace{x}^{x \rightarrow y}}{\sqrt{r^2 - \overbrace{x^2}^{x \rightarrow y} - \overbrace{y^2}^{y \rightarrow x}}} \right\} \text{にて } x \leftrightarrow y = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2 - x^2}} = -\frac{y}{z} \tag{5.64}$$



より

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S z dS = \iint_S z \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{z}\right)^2 + \left(-\frac{y}{z}\right)^2} dx dy = \iint_S \sqrt{z^2 \left(1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}\right)} dx dy \\
 &= \iint_S \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} dx dy \stackrel{z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}}{=} \iint_S r dx dy = r \iint_S dx dy
 \end{aligned}
 \tag{5.65}$$

になります。図 6a より

- $\iint_S dx dy$ は平面に描かれた半径 r の円の面積

なので、

$$\iint_S dx dy = \text{半径 } r \text{ の円の面積} = \pi r^2
 \tag{5.66}$$

とわかる。従って、

$$I = r \iint_S dx dy = r \pi r^2 = \pi r^3
 \tag{5.67}$$

と計算できました。以上から、**半球の体積**は

$$\boxed{\iint_S z dS = \iint_S \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dS = \begin{cases} \frac{2}{3} \pi r^3 \dots x-y \text{ 平面上の面積分 (平坦面)} \\ \pi r^3 \dots \text{球面上の面積分 (曲面)} \end{cases}}
 \tag{5.68}$$

のように比較できます (問題 1 : 球面上の面積分のほうが大きいのは、どの式が原因か?)。

VII.例 : 球面上の面積分 : 閉じた面

閉じた面上の積分(5.37) : $\oiint A(x) \cdot dS$ を計算してみましょう。代表的な閉じた面として、

半径 R の球面から**一定の速度** v で放出される流体の単位時間の全通過量 Q を求めてみます。積分は(5.22)で与えられますが、球面が閉じているので

$$Q = \oiint_S v \cdot dS
 \tag{5.69}$$

と表記されます。球面なので dS を求めるために(5.13)の直交座標系表示ではなく図 7a のような極座標系表示を使います。その時の単位ベクトルは、

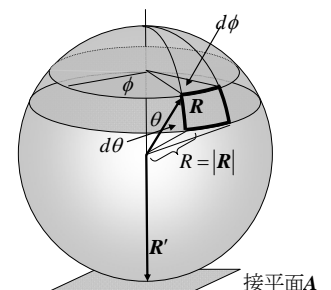
- 図 7b に示す極座標 (r, θ, ϕ) の値が増加する方向で $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ と記述する。

であり、球面は曲がっているため、球面の方向は、

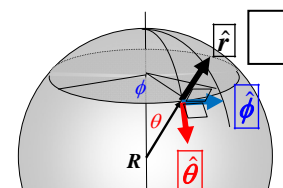
- 球面に接する平面 (**接平面**) の方向として与えます。例として、図 7a には南極に接する平面 (接平面 A)

を描いてあります。南極を指すベクトル R' と接平面 A は なの

図 7a



7b



で、南極での面の方向はベクトル \hat{r} の方向と一致することになります。同様にして

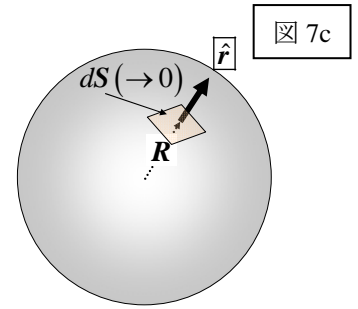
- ベクトル \mathbf{R} に接する平面の方向はベクトル \mathbf{R} の方向と一致

します。 $d\mathbf{S}$ の方向は面の方向なので

$$d\mathbf{S} = \text{微小面積} \times \mathbf{R} \text{の方向} \tag{5.70}$$

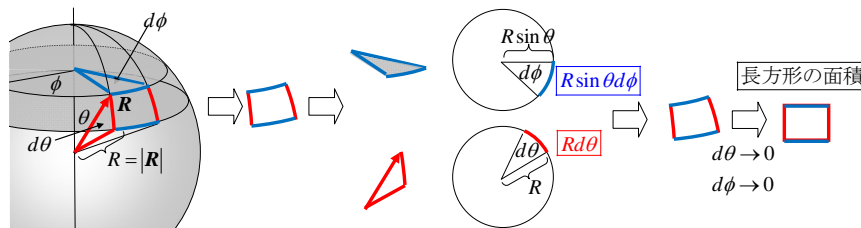
と計算されます。

「 \mathbf{R} の方向」は単位ベクトルで表わすことができるので、図 7c より、その単位ベクトルは \hat{r} であり、「 \mathbf{R} 」と「 \mathbf{R} の長さ」を使って



$$\hat{r} = \left[\text{---} \right] \text{ (} \mathbf{R} \text{の方向)は}(r, \theta, \phi) \text{座標では} (\text{---}, \text{---}, \text{---}) \tag{5.71}$$

になります。「微小面積」は、図 7a の $d\phi$ と $d\theta$ で決められる球面上の微小面積で



図のように計算でき

$$\text{長方形の面積} = R d\theta \times R \sin \theta d\phi = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \tag{5.72}$$

になります (**問題 2** : 図を元に(5.72)の導出過程を説明せよ)。これより、(5.70)は

$$d\mathbf{S} = \text{微小面積} \times \mathbf{R} \text{の方向} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} \tag{5.73}$$

と計算できます。従って、

$$Q = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{v} \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} = R^2 \oint \mathbf{v} \cdot \hat{r} \sin \theta d\theta d\phi \tag{5.74}$$

\mathbf{v} は一定なので、

$$Q = R^2 \oint \mathbf{v} \cdot \hat{r} \sin \theta d\theta d\phi = \mathbf{v} \cdot \hat{r} R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \tag{5.75}$$

です (**問題 3** : θ と ϕ の積分範囲の説明をせよ)。ここで、 \mathbf{v} の極座標 (r, θ, ϕ) の成分を

$\mathbf{v} : (v_r, v_\theta, v_\phi)$ と表すと

$$\mathbf{v} \cdot \hat{r} = \text{---} \tag{5.76}$$

になります。

さて、(5.75)の $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta$ の積分を計算するために、まず θ の積分は三角関数の積分公式

$$\int \sin \theta d\theta = -\cos \theta + C, \int \cos \theta d\theta = \sin \theta + C \tag{5.77}$$

を用いると

$$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = [-\cos \theta + C]_0^{\pi} = -\cos \pi + C - (-\cos 0 + C) = -(-1) - (-1) = 2 \quad (5.78)$$

次に、 ϕ の積分は

$$\int_0^{2\pi} d\phi = [\phi]_0^{2\pi} = 2\pi \quad (5.79)$$

と計算できます。従って、

$$Q = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}} R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = v_r R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = v_r R^2 \times 2\pi \times 2 = 4\pi R^2 v_r \quad (5.80)$$

以上から、

$$\boxed{Q = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi R^2 v_r} \quad (\text{半径}R\text{の球面上の面積分}) \quad (5.81)$$

と計算できました。結果(5.80)は、 $4\pi R^2$ が球の表面積なので

$$Q = \text{球の表面積} \times v_r \quad (5.82)$$

になっています。実は、球面上では

$$\oint d\mathbf{S} = \oint R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} = 4\pi R^2 \hat{\mathbf{r}} \quad (5.83)$$

が導かれ

$$\boxed{\oint d\mathbf{S} = 4\pi R^2 \hat{\mathbf{r}}} \quad (\text{半径}R\text{の球面上の面積分}) \quad (5.84)$$

になる事が分かります。

VIII.例：極座標の単位ベクトル

最後に、(5.19)の代わりに、極座標の単位ベクトル $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ を使用して

$$\boxed{d\mathbf{S} = d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} + d\phi dr \hat{\boldsymbol{\theta}} + dr d\theta \hat{\boldsymbol{\phi}} : (d\theta d\phi, d\phi dr, dr d\theta)} \quad (5.85)$$

と表記されます。そこで、 $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ をもとの $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ で表してみよう。まず、

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = r\hat{\mathbf{r}} \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \quad (5.86)$$

より、

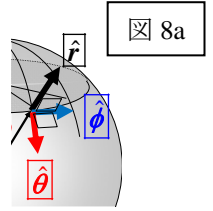
$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} \quad (5.87)$$

がわかります。一方、

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \sin \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (5.88)$$

より、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} = \frac{r \cos \phi \sin \theta \mathbf{i} + r \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k}}{r} \\ &= \sin \theta (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k} \end{aligned} \quad (5.89)$$



と計算できます。

次に、残りの $\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ は、共に $\hat{\mathbf{r}}$ と直交する条件：

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0, \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0 \quad (5.90)$$

から求められます (問題 4 : 何故、「直交する条件」が(5.90)で与えられるか?)。図 7a より、

$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ は平面上での方向を示すことがわかるので、 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ は \mathbf{i}, \mathbf{j} で表され

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} \quad (5.91)$$

と書けます。(5.90): $\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$ は

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\mathbf{r}} &= (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot [\sin \theta (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k}] = a \cos \phi \sin \theta + b \sin \phi \sin \theta \\ &= (a \cos \phi + b \sin \phi) \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (5.92)$$

なので、 $a \cos \phi + b \sin \phi = 0$ より $a \cos \phi = -b \sin \phi$ 、従って

$$a : b = -\sin \phi : \cos \phi \Rightarrow \begin{cases} a = -k \sin \phi \\ b = k \cos \phi \end{cases} \quad (k : \text{比例係数}) \quad (5.93)$$

と計算できます。(5.91)は

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = k(-\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}) \quad (5.94)$$

比例係数 k を決めるため「単位ベクトルの大きさは 1 : $|\hat{\boldsymbol{\phi}}| = 1$ 」を使います。 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ の大きさ $|\hat{\boldsymbol{\phi}}|$ は

$$|\hat{\boldsymbol{\phi}}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{k^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)} = \sqrt{k^2} = k \quad (5.95)$$

なので、 $k = 1$ 。(5.94)は、

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j} \quad (5.96)$$

と与えられます。

残りの $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は、 $|\hat{\boldsymbol{\theta}}| = 1$ で $\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0, \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 0$ より

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) - \sin \theta \mathbf{k} \quad (5.97)$$

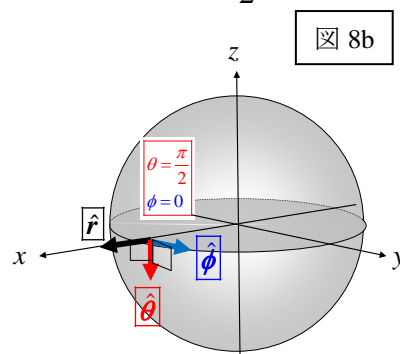
で与えられる事が分かります (問題5 : $\hat{\theta} \cdot \hat{r} = 0, \hat{\theta} \cdot \hat{\phi} = 0$ を証明せよ。)。以上から、

$$\begin{cases} \hat{r} = \sin \theta (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) + \cos \theta \mathbf{k} \\ \hat{\theta} = \cos \theta (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) - \sin \theta \mathbf{k} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j} \end{cases} \quad (5.98)$$

と計算できました。これを答えの分かっている場所でチェックします。図 4b では、 $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0$

の点での $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ を示しています。図 8b から分かるように

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{r} \cdots x \text{軸方向} \Rightarrow \hat{r} = \mathbf{i} \\ \hat{\theta} \cdots -z \text{軸方向} \Rightarrow \hat{\theta} = -\mathbf{k} \\ \hat{\phi} \cdots y \text{軸方向} \Rightarrow \hat{\phi} = \mathbf{j} \end{cases} \quad (5.99)$$



なので、(5.98)に $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0$ を代入した式と一致する事が分かりま

す (問題6 : $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0$ のとき、(5.98)を計算し(5.99)に一致する事を示せ)。