

# 04 ベクトルの線積分

## I. 積分の種類

通常 of 物理で使う積分には 3 種類あります。積分変数の数に応じて

- 線積分 (記号) …横 (1 重)

➤  $\int dx, \int dy, \int dz \cdots \int dl$  (line:線) 【04 ベクトルの線積分】

- 面積分 (記号) …縦×横 (2 重)

➤ 2 重積分記号  $\iint dxdy, \iint dydz, \iint dzdx \cdots \iint dS$  (Surface:面積) 【05 2 重積分と面積分】

➤ 1 重積分記号  $\int dxdy, \int dydz, \int dzdx \cdots \int dS$  と表す (省略形)

- 体積分 (記号) …縦×横×高さ (3 重)

➤ 3 重積分記号  $\iiint dxdydz \cdots \iiint dV$  (Volume:体積) 【06 ガウスの定理: 面積分と体積分】

➤ 1 重積分記号  $\int dxdydz \cdots \int dV$  と表す (省略形)

線積分と面積分は 3 種類あるので、丁度、3 次元空間の 3 つのベクトルとしてまとめる事もできて

$$dxi + dyj + dzk = dx \Rightarrow \int dx = \int dxi + \int dyj + \int dzk$$

$$dydzi + dydzj + dzdxk = dS \Rightarrow \int dS = \int dydzi + \int dzdxj + \int dxdyk$$

になります (問題 1 :  $dS$  において、 $dydzi$  として  $dydz$  を  $x$  成分とするのは?)。

## II. ベクトルの線積分

ある関数  $f(x)$  の区間  $[x_1, x_2]$  での積分は、

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (4.1)$$

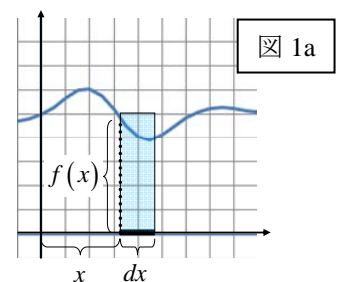
ここで、図 1a のように

- 図形的には  $dx$  は  $x$  軸上の微小線分を表すので

- $f(x) dx$  は微小長方形の面積

です。この微小面積を区間  $[x_1, x_2]$  で続けて作成し足し合わせれば図形の面積が求められます。

例えば、図 1b では



- 5つの長方形を加えて完成

できますが、実際の  $f(x)$  の面積とはかなり違います。実際の  $f(x)$  の面積に近づけるには、 $dx$  をさらに小さくすれば近づきます (図 1c)。

- 理想的には  $dx \rightarrow 0$  にして無限個の長方形を加えることとなります。この「無限個の長方形を加える」操作を積分：

$$\int f(x)dx = \text{無限個の面積ゼロの長方形の足し算} \quad (4.2)$$

で表します。

**ベクトルの積分**に拡張できるように、(4.1)の積分を**ベクトル表記**で表してみます。

- $x$  軸方向は、単位ベクトル  $i$  の方向
- $i \cdot i = 1$

であることを用いて

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \times 1 \times dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) i \cdot i dx = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) i) \cdot (dx i) \quad (4.3)$$

になるので、新しいベクトル表記：

$$\begin{cases} f(x) = f(x) i \\ dx = dx i \\ x = x i \end{cases} \quad (4.4)$$

を用いると

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1 i}^{x_2 i} f(x) i \cdot dx i \quad (4.5)$$

になります。ここで、

- 変数  $x$  も  $x = xi$  としてベクトル  $x$  に拡張されていることに注意しましょう。

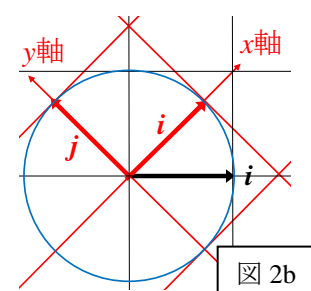
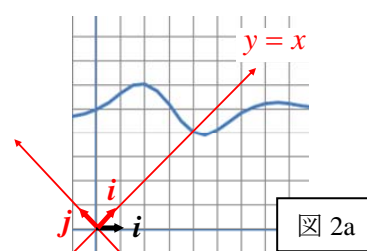
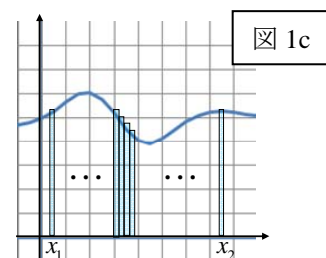
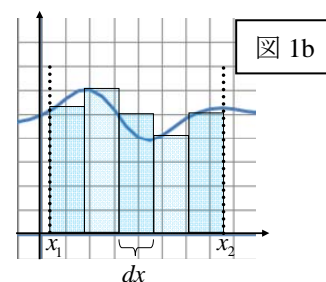
ところで、 $x$  軸や  $y$  軸は直交すればどのように引いても良いので、例えば、図 2a のような  $45^\circ$  傾いた軸を引いてみます。図 2b の作図を参考にして、この新しい軸で元のベクトルを表すと  $i$  は

$$i = \boxed{a} i + \boxed{b} j \quad (4.6)$$

と表されると事が分かります (**問題 2** :  $a$  と  $b$  を求めよ)。図に書かれている円の半径は  $\boxed{\quad}$  です。また、新しい  $x$  軸は、

$$y = x \quad (4.7)$$

の直線に一致します。(4.6)を、(4.3)に代入して、

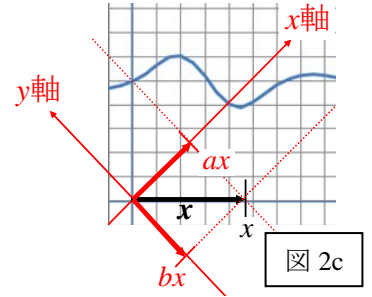


$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (f(x)\mathbf{i}) \cdot (dx\mathbf{i}) = \int_{x_1}^{x_2} (f(x)(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})) \cdot (dx(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})) \leftarrow a, b \text{ は (4.6) で与えた数値}$$

(4.8)

となるので、(4.5)に対応して、

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})}^{x_2(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})} f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \leftarrow \begin{cases} f(\mathbf{x}) = f(x)(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \\ d\mathbf{x} = dx(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \\ \mathbf{x} = x(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \end{cases} \quad (4.9)$$



が得られます。ベクトル  $\mathbf{x} = x(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})$  は図 2c の様に表されています。

また、この積分はベクトル化された積分領域  $[x_1(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}), x_2(a\mathbf{i} + b\mathbf{j})]$  を明示する代わりに

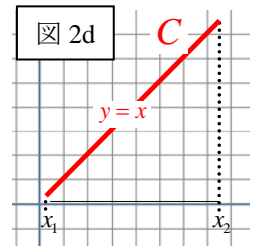
- 積分領域がある事を示す記号  $C$  (Contour: 輪郭) : **積分経路** という

を添え字としてつけ、

$$\int_C f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{但し、} C \text{ を示す図と一緒にする}) \quad (4.10)$$

として表します。従って、

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_C f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{但し、} C \text{ は図 2d で与えられる}) \quad (4.11)$$



になります。これから使用する**積分の公式**として、

$$\int t^n dt = \begin{cases} \frac{t^{1+n}}{1+n} + C \quad (1+n \neq 0: n \text{ は任意の実数}) \\ \log|t| + C \quad (1+n = 0) \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C \end{cases} \quad (4.12)$$

を覚えておこう。また、

$$\int df(t) = f(t) + C \quad (\text{微分して積分すると元に戻る}) \quad (4.13)$$

が一番簡単な積分公式になります。一般の表記に拡張すると

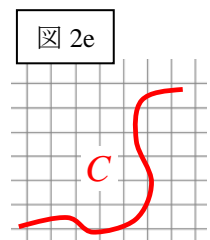
$$\int_C f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \leftarrow \begin{cases} f(\mathbf{x}) = f_x(x)\mathbf{i} + f_y(x)\mathbf{j} + f_z(x)\mathbf{k} : (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \\ d\mathbf{x} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} : (dx, dy, dz) \end{cases} \quad (4.14)$$

- ベクトル場  $f(\mathbf{x})$  の曲線  $C$  (図 2e) 上での**線積分**

です。ちなみに、

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) \quad (4.15)$$

になりますので、



- $f(x)$  と  $f(x, y, z)$  はどちらを用いてもよい

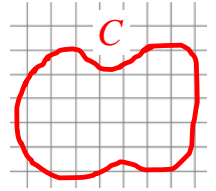
こととなります。

特に、積分経路が閉じているときに、閉じている記号として  $\oint$  を用いた積分記

号  $\oint$  を用いて

$$\oint_C f(x) \cdot dx$$

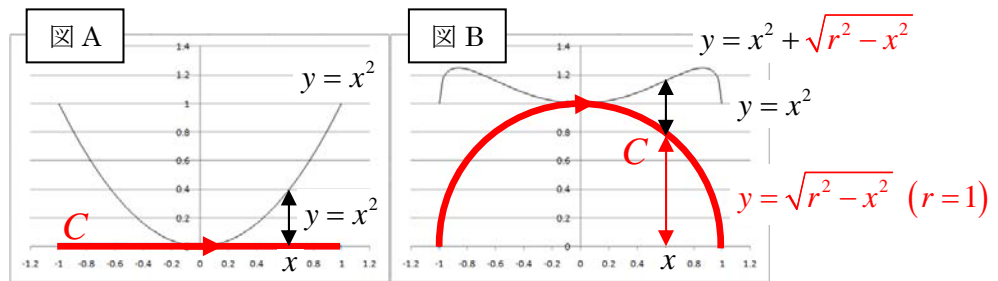
図 2f



- ベクトル場  $f(x)$  の曲線  $C$  (図 2f) 上での線積分

と表します。

### Ⅲ. 曲線上の線積分



曲線上の線積分の様子を理解するために、円周上での積分を考えてみます。積分範囲は

- $-1 \leq x \leq 1$

とします。図 A と図 B の線積分共に

$$\oint_C f(x) dx \tag{4.16}$$

と表せます。それぞれの場合に、

- 異なった積分経路  $C$

が指定されます。図 A の通常の積分は、

$$\oint_C f(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx \tag{4.17}$$

と表せます。図 B の円周上の積分は、極座標表示を用いると良いでしょう。極座標表示で半径  $r$  の角度  $\theta$  の円弧  $l$  は、

$$l = r\theta \quad (\text{図 B では } r=1 \text{ なので、} l = \theta) \tag{4.18}$$

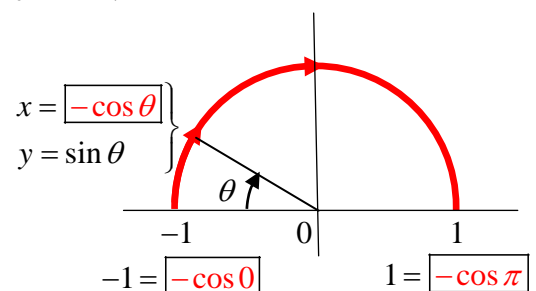
になります。 $\theta$  が増えるに連れ円周上を移動していきます。その微少量  $dl$  は

$$dl = r d\theta \quad (\text{図 B では } r=1 \text{ なので、} dl = d\theta) \tag{4.19}$$

です。また、

$$\theta = 0 \text{ が } x = -1 \tag{4.20}$$

にあたる事に注意して



$$x = -r \cos \theta \quad (\text{図Bでは } r=1 \text{ なので、 } x = -\cos \theta) \quad (4.21)$$

なので、積分範囲は、 $x$  から  $\theta$  で表すと、 $r=1$  を考慮して

$$x = \cos \theta \begin{cases} x: -1 \rightarrow 1 \\ \theta: 0 \rightarrow \pi \end{cases} \quad (4.22)$$

とわかります。図 B の円周上の積分は、

$$\oint_C f(x) dx = \oint_C x^2 dx = \int_0^\pi (-\cos \theta)^2 d\theta = \int_0^\pi (\cos \theta)^2 d\theta \quad (4.23)$$

と  $\theta$  の積分で表せます。(4.23)は、

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (4.24)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \oint_C f(x) dx &= \int_0^\pi (\cos \theta)^2 d\theta = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left( \int_0^\pi d\theta + \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( [\theta]_0^\pi + [\sin 2\theta]_0^\pi \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

と計算できるので、

$$\oint_C f(x) dx = \oint_C x^2 dx = \begin{cases} 2 \cdots \text{直線}(x\text{軸})\text{上の積分} \\ \frac{\pi}{2} \cdots \text{曲線(円周)}\text{上の積分} \end{cases} \quad (4.26)$$

という結果を得る事になります。

## IV. 演習

【問題 A】 点  $A: (-1, 0, 0)$  から点  $B: (6, 0, 0)$  に向かう線分を  $C$  (図 4a) とするとき、

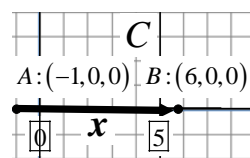
$$f(x) = f(x, y, z) = xi \quad (4.27)$$

の線積分(4.10)を求めよ。

積分領域は線分  $C$  で  $A: (-1, 0, 0) \rightarrow B: (6, 0, 0) \Rightarrow x = -1 \rightarrow x = 6$

$$\int_C f(x) \cdot dx \Big|_{x=xi}^{x=xi} = \int_{-1}^6 xi \cdot d(xi) = \int_{-1}^6 x dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^6 = \frac{1}{2} (6^2 - (-1)^2) = \frac{35}{2} \leftarrow (4.12) \text{ で } n=1 \quad (4.28)$$

図 4a



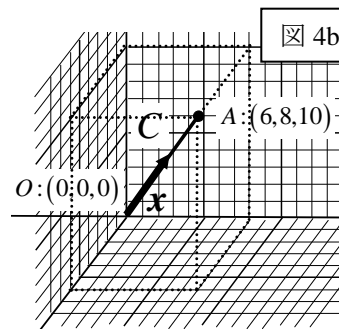
【問題 B】 原点  $O: (0, 0, 0)$  から点  $A: (6, 8, 10)$  に向かう線分を  $C$  (図 4b)

とするとき、

$$f(x) = f(x, y, z) = xi + yj + zk \quad (4.29)$$

の線積分(4.10)を求めよ。

図 4b



積分領域は線分  $C$  で  $O:(0,0,0) \rightarrow A:(6,8,10)$

$x:(x,y,z)$  は、線分  $C$  上にある。線分  $C$  のベクトル表示を  $A$  とすると、 $A:(6,8,10) \Rightarrow$

$A = 6i + 8j + 10k$  と表される。線分  $C$  上で積分するので、積分領域は  $x:(0,0,0) \rightarrow (6,8,10)$

である。この変化は

$$x = tA \quad (0 \leq t \leq 1) \Rightarrow x : \overbrace{(0,0,0)}^{t=0} \rightarrow \overbrace{(6,8,10)}^{t=1}$$

と表される。従って

$$\begin{cases} x = tA \\ dx = dtA \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1) \tag{4.30}$$

を用いる。この  $t$  は経過時間と置いて良く、

$$\text{点 } O:(0,0,0) \cdots \boxed{\text{0秒目}} \text{ に出発} \tag{4.31}$$

$$\text{点 } A:(6,8,10) \cdots \boxed{t\text{秒目}} \text{ に到達}$$

となる。そこで

$$\begin{aligned} \boxed{\int_C f(x) \cdot dx} & \stackrel{x=C, dx=dtC}{=} \int_0^1 tA \cdot dtA \stackrel{|A|^2=A \cdot A}{=} \int_0^1 t \cdot dt |A|^2 \\ & \stackrel{\leftarrow (4.12) \text{ で } n=1}{=} \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 |A|^2 = \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) |A|^2 = \frac{|A|^2}{2} \end{aligned} \tag{4.32}$$

また、 $A:(6,8,10) \Rightarrow A = 6i + 8j + 10k$  なので、 $|A|^2 = 6^2 + 8^2 + 10^2 = 36 + 64 + 100 = 200$  より、

$$\boxed{\int_C f(x) \cdot dx} = \frac{|A|^2}{2} = 100 \tag{4.33}$$

**【問題 C】** 点  $A:(A_x, A_y, A_z)$  から点  $B:(B_x, B_y, B_z)$  に向かう任意の経路を  $C$  (従って、 $C$  は曲線

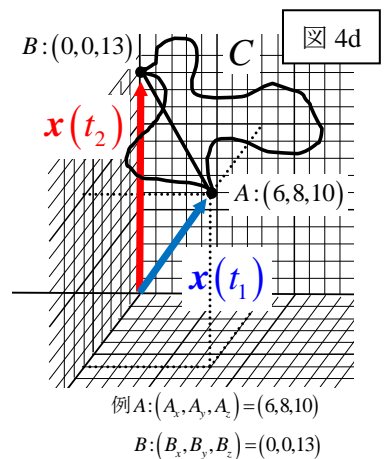
でもよく無限通りの経路がある) とする。

このとき、

$$f(x) = \nabla \overset{\text{ポテンシャル}}{\phi}(x) \leftarrow \nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k, \quad x = xi + yj + zk \tag{4.34}$$

の線積分(4.10)を求めよ。

**【補足】** 例として、図 4d には、直線を含む 3 つの経路が示してあり、曲がっている経路もあるが、それぞれの経路を  $x$  軸に見立てて積分する事になる。後ほど、実は、どの積分経路を用いても同じ答えになる事が分かる。ここでも、(4.30) のように時間  $t$  を用いるので、図 4d に、



$$\begin{aligned} \text{点}A:(A_x, A_y, A_z) \cdots \boxed{t_1 \text{秒目}} \text{に出发} &\Rightarrow \mathbf{x}(t_1):(A_x, A_y, A_z) \\ \text{点}B:(B_x, B_y, B_z) \cdots \boxed{t_2 \text{秒目}} \text{に到達} &\Rightarrow \mathbf{x}(t_2):(B_x, B_y, B_z) \end{aligned} \quad (4.35)$$

として示してある。直線以外の経路もあるので、 $t$ 秒目に(4.30)のような簡単な関係式は作れないので形式的に、 $t$ 秒目として、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \quad (4.36)$$

となる。

さて、求める積分は・・・

$$\boxed{\int_C \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}} = \int_C \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (4.37)$$

であり、時間  $t$  を明示して

$$\boxed{\int_C \nabla \phi(\mathbf{x}(t)) \cdot d\mathbf{x}(t)} = \int_C \nabla \phi(\mathbf{x}(t)) \cdot d\mathbf{x}(t) \frac{1}{dt} = \int_C \left( \nabla \phi(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right) dt \quad (4.38)$$

と表す。【03 微分ベクトル】での(3.11)： $\frac{df(x, y, z)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla f(x, y, z)$ を用いる事ができ、

$f$  を  $\phi$  に代え  $(x, y, z)$  をベクトル表示  $(\mathbf{x})$  にして  $t$  を明示し  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}(t)$ 、

$$\frac{d\phi(\mathbf{x}(t))}{dt} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}(t)) \quad (4.39)$$

なので、(4.38)は

$$\int_C \nabla \phi(\mathbf{x}(t)) \cdot d\mathbf{x}(t) = \int_C \left( \nabla \phi(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right) dt = \int_C \left( \frac{d\phi(\mathbf{x}(t))}{dt} \right) dt \quad (4.40)$$

になる。積分経路  $C$  は、 $t$  で指定できるようになったので(4.35)を考慮すれば

$$\int_C \nabla \phi(\mathbf{x}(t)) \cdot d\mathbf{x}(t) = \int_C \left( \frac{d\phi(\mathbf{x}(t))}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\phi(\mathbf{x}(t))}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\phi(\mathbf{x}(t)) \frac{1}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} d\phi(\mathbf{x}(t)) \quad (4.41)$$

と計算でき、この積分は、(4.13)の公式を用いると

$$\int_C \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} d\phi(\mathbf{x}(t)) = \left[ \phi(\mathbf{x}(t)) + C \right]_{t_1}^{t_2} = \phi(\mathbf{x}(t_2)) - \phi(\mathbf{x}(t_1)) \quad (4.42)$$

になる。(4.35)より  $\mathbf{x}(t_1):(A_x, A_y, A_z)$ 、 $\mathbf{x}(t_2):(B_x, B_y, B_z)$  なので

$$\boxed{\int_C \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}} = \phi(\mathbf{x}(t_2)) - \phi(\mathbf{x}(t_1)) = \phi(B_x, B_y, B_z) - \phi(A_x, A_y, A_z) \quad (4.43)$$

と計算できる。

計算結果を(4.43)みると、 $\mathbf{x}(t_1):(A_x, A_y, A_z)$  と  $\mathbf{x}(t_2):(B_x, B_y, B_z)$  に依存しているのみなので

- $\mathbf{x}(t_1):(A_x, A_y, A_z), \mathbf{x}(t_2):(B_x, B_y, B_z)$  が同じ全ての経路での積分値は同じ答え

になることがわかる。つまり、

- $\int_C \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$  は、**積分経路  $C$  に無関係**に計算できる

ことになる。

## V.ポテンシャル $\phi(\mathbf{x})$ と $\nabla\phi(\mathbf{x})$

物理では、力の源を

- ポテンシャル (Potential : "潜在の" という意味)

といいます。ポテンシャルを、(4.34)と同じく  $\phi$  と表すと、力のベクトル  $\mathbf{F}:(F_x, F_y, F_z)$  は

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})} \quad (\phi(\mathbf{x}): \text{ポテンシャル}) \quad (4.44)$$

と与えられます (**問題 3** :  $F_x, F_y, F_z$  を  $\phi$  で表せ)。力を加えて箱を移動させたとき、仕事は、

- **【公式】** 仕事 = 力 × 移動距離

で計算できるので、図 5 のように経路  $C$  上の**微小距離**

$d\mathbf{x} (\rightarrow 0)$  移動した時、**微小仕事**を  $dW (\rightarrow 0)$  とすると

$$dW = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (4.45)$$

になります。従って、 $\mathbf{x}(t_1)$  から  $\mathbf{x}(t_2)$  への全仕事  $W$  は、

$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (4.46)$$

です。(4.44)を代入して、

$$W = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_C (-\nabla\phi(\mathbf{x})) \cdot d\mathbf{x} = -\int_C \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (4.47)$$

ここに、(4.43)を用いて

$$W = -\int_C \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = -[\phi(\mathbf{x}(t_2)) - \phi(\mathbf{x}(t_1))] = \phi(\mathbf{x}(t_1)) - \phi(\mathbf{x}(t_2)) \quad (4.48)$$

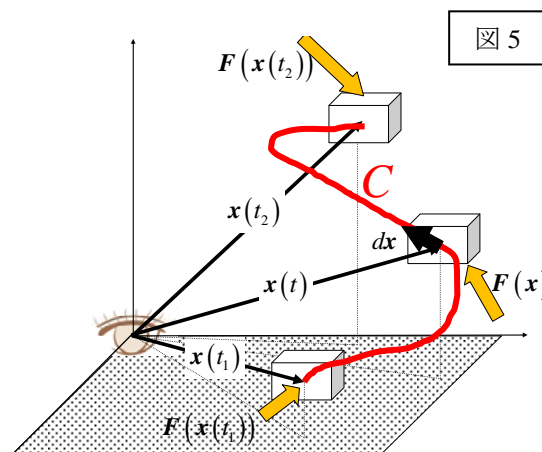
つまり、

- 仕事  $W$  は、最初  $\mathbf{x}(t_1)$  と最後  $\mathbf{x}(t_2)$  の位置が同じならどのような経路で物体を運んでも同じ仕事になる (**問題 4** : (4.48)を用いて説明せよ)

ことを示しています。

このポテンシャルを用いると、

- **エネルギー保存則 (Energy Conservation Law)**





を導けます。ニュートンの第  法則により、質量  $m$  kg の物体に働く力  $\mathbf{F}$  は、 $m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  ( $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ )

で置き換える事ができるので

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} (= \mathbf{F}) = -\nabla\phi \quad (4.49)$$

です。ここで、

- $\mathbf{F} = -\nabla\phi(\mathbf{x})$  なので、力 ( $\mathbf{F}$ ) は位置 ( $\mathbf{x}$ ) にのみ依存する

➤  $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}(t) \Leftarrow \mathbf{x}(t) = \sin \omega t \mathbf{i}$  は OK

➤  $\mathbf{F} = -k \sin \omega t \mathbf{i}$  はダメ

という制限があります (問題 5 : 結果的には同じ式になるが何故、 $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}(t) \Leftarrow \mathbf{x}(t) = \sin \omega t \mathbf{i}$  は OK で  $\mathbf{F} = -k \sin \omega t \mathbf{i}$  はダメか?)。このような特殊な力を

- **保存力**

といいます。

(4.49)の両辺のベクトルと速度ベクトル  $\mathbf{v}$  の内積をとります :

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla\phi \quad (4.50)$$

ここで、(4.50)の

- **右辺**の  $\mathbf{v} \cdot \nabla\phi$  は、 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  を用いて

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\phi = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla\phi \quad (4.51)$$

更に、(4.39):  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla\phi$  より

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\phi = \frac{d\phi}{dt} \quad (4.52)$$

となります。

- **左辺**の  $\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  は、

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} \Leftarrow \frac{dv^2}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \text{ のベクトル版 } (\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \quad (4.53)$$

となります (問題 6 :  $\mathbf{v} : (v_x, v_y, v_z)$  の成分を用い、 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  と  $\frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt}$  を計算し(4.53)を証明せよ)。

従って、(4.50)は、(4.52)を用いて

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla\phi \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( m \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) = -\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \frac{d\phi}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \phi \right) = 0 \quad (4.54)$$

と変形できるので

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \phi \right) = 0 \quad (4.55)$$

が求まります。この解は、

$$\frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \phi = (\text{時間に依らず}) \text{一定} \quad (4.56)$$

になります。つまり、

$$\boxed{E = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \phi} \quad (4.57)$$

をエネルギーと呼び、

- **$E$  は保存する**

ことがわかります。ここで

- $\frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  を  エネルギー

- $\phi$  をポテンシャルエネルギーと呼びます。