

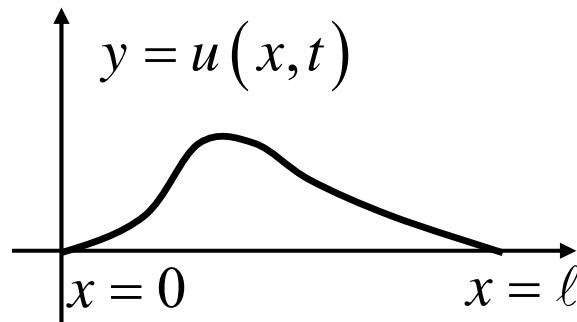
03 閉弦の振動

微小振動する弦の振幅 $u(x,t)$ は、

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + G(x,t) \quad (3.1)$$

で決められた。外力のない場合： $G(x,t)=0$ には簡単に解が求められるので、以降、 $G(x,t)=0$

(外力は0である)とする。とくに、弦の両端が固定された弦を閉弦という。長さ l の弦が $x=0$ の場所と $x=l$ の場所で固定されている時、



振幅 $u(x,t)$ は、振動方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

を満たし、且つ、

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad (3.3)$$

の条件を満たす。このような方程式は、

● 変数分離法

で解くことができる。

変数分離とは、振幅 $u(x,t)$ を

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (3.4)$$

のように、2つの関数の積に分離することである。これを、 $u(x,t)$ の微分方程式：

に代入して

$$\frac{\partial^2 (X(x)T(t))}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (X(x)T(t))}{\partial x^2} \Rightarrow X(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = a^2 T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

両辺を XT で割れば

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (3.6)$$

になる。この方程式が成立するのは、この比が x と t に無関係になった時で、 c とすると

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = c \quad (= x \text{ と } t \text{ に無関係}) \quad (3.7)$$

を満たす。従って、

$$X''(x) - cX(x) = 0, \quad T''(t) - ca^2T(t) = 0 \quad (3.8)$$

を得る。ところで、両端が留められているので、

$$X(0) = X(\ell) = 0 \quad (3.9)$$

である。

以降、

$$c = -\lambda^2 (< 0) \quad (3.10)$$

の場合に限って解を求めることとする。調べる微分方程式は、

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad (3.11)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0 \quad (3.12)$$

であり、どちらも同種の微分方程式であるが、 X に関しては

$$X(0) = X(\ell) = 0 \quad (3.13)$$

の条件がついている事に注意する。

微分方程式の解

(3.11)と(3.12)は、どちらも

$$f''(z) + k^2 f(z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f = X, z = x, k = \lambda \rightarrow X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ f = T, z = t, k = a\lambda \rightarrow T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

という型の微分方程式になる。この解は、任意の定数を A と B とすれば、

$$f(z) = A \cos kz + B \sin kz \quad (3.15)$$

になる。

X(x)の場合

ここで、 $f = X, z = x, k = \lambda$ にし、係数を C と D にすると

$$X(x) = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x$$

(3.13)の条件を加えると、

$$\begin{aligned} X(0) &= C = 0 \\ X(\ell) &= C \cos \lambda \ell + D \sin \lambda \ell = 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

なので、

$$C = 0 \ \& \ \sin \lambda \ell = 0 \tag{3.17}$$

がわかる。従って、

$$\lambda \ell = k\pi \ (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \leftarrow \lambda \neq 0 \text{なので } k \neq 0 \tag{3.18}$$

になる。つまり、振動を記述する解は、**無限にある**ことがわかる。このように、 λ が特別な値

$$\lambda = \frac{k\pi}{\ell} \Rightarrow c = -\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \ (k = \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{3.19}$$

のときのみ、微分方程式に解が存在する。そこで、ある k の値の対応する解を

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \ (A_k : \text{ある定数}) \tag{3.20}$$

とする。このとき、

- $\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell} \ (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ を固有値
- $X_k(x) \ (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ を固有関数

という。sin 関数は奇関数なので、 $k > 0$ に対して

$$\begin{cases} X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \\ X_{-k}(x) = -A_{-k} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \end{cases} \Leftrightarrow A_k = -A_{-k} \text{にすればどちらの解もとることができる} \tag{3.21}$$

なので、以降、 $k > 0$ に限っても、 $k < 0$ の場合は係数の $A_{\square k}$ として $-A_k$ にすればよい。つまり、固有関数と固有値は

- 固有値 : $\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell} \ (k = 1, 2, \dots)$
- 固有関数 : $X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \ (k = 1, 2, \dots)$

になる。

$T(t)$ の場合

この無限のそれぞれの $k (>0)$ に対して、

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0 \quad \left(\lambda = \frac{k\pi}{\ell} \right) \quad (3.22)$$

を満たす T が一つ存在する。この解を T_k とすると

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{\ell} \right)^2 T_k(t) = 0 \quad (3.23)$$

を満たす。任意の定数を E_k と F_k とすれば、解は、

$$T_k(t) = E_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} + F_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} \quad (3.24)$$

である。

振動方程式の解

以上から、それぞれの k に対応する振動解を $u_k(x, t)$ とすると

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t) = A_k \sin \frac{k\pi x}{\ell} \left(E_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} + F_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \quad (3.25)$$

新たに係数として、 $A_k E_k = a_k, A_k F_k = b_k$ にすると、

$$u_k(x, t) = \left(a_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} + b_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (3.26)$$

になる。無限の $k = 1, 2, 3, \dots$ に対応する解が許されるので、微分方程式

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.27)$$

の解は

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\pi a t}{\ell} + b_k \cos \frac{k\pi a t}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad (3.28)$$

と表すことができる。

フーリエ級数

さて、ここで振動の波は、

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}, \quad \sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \quad (3.29)$$

を用いて、変形することができる。その結果、

$$\begin{aligned}
& \left(a_k \sin \frac{k\pi at}{\ell} + b_k \cos \frac{k\pi at}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \\
&= a_k \frac{\cos \left(\frac{k\pi x}{\ell} - \frac{k\pi at}{\ell} \right) - \cos \left(\frac{k\pi x}{\ell} + \frac{k\pi at}{\ell} \right)}{2} + b_k \frac{\sin \left(\frac{k\pi x}{\ell} + \frac{k\pi at}{\ell} \right) + \sin \left(\frac{k\pi x}{\ell} - \frac{k\pi at}{\ell} \right)}{2} \\
&= a_k \frac{\cos \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] - \cos \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right]}{2} + b_k \frac{\sin \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + \sin \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right]}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(a_k \cos \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + b_k \sin \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right) + \frac{1}{2} \left(-a_k \cos \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + b_k \sin \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

なので、

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\pi at}{\ell} + b_k \cos \frac{k\pi at}{\ell} \right) \sin \frac{k\pi x}{\ell} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + b_k \sin \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] - b_k \sin \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

がわかる。ここで、

$$\begin{aligned}
\varphi(x-at) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + b_k \sin \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right) \\
\phi(x+at) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-a_k \cos \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + b_k \sin \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

のようにまとめて表すことにすると、

$$\boxed{u(x,t) = \varphi(x-at) + \phi(x+at)} \tag{3.33}$$

と表すことができる。このような、ある関数を三角関数の和で表すことを

● フーリエ級数

と呼んでいる。以上から、弦の振動解は、

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \varphi(x-at) + \phi(x+at) \\
&\left\{ \begin{aligned} \varphi(x-at) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + b_k \sin \left[(x-at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right) \\ \phi(x+at) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-a_k \cos \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] + b_k \sin \left[(x+at) \frac{k\pi}{\ell} \right] \right) \end{aligned} \right.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

である。

第二回目レポート

レポートの回数(二回目)、学生証番号と氏名を明記すること

必ず表紙を付ける (A4レポート用紙使用のこと)

1) つぎの問いに答えよ。

A) $f = \sin t$ のとき $\frac{d^2 f}{dt^2} + f = 0$ を満たすことを示せ。

B) $f = \cos t$ のとき $\frac{d^2 f}{dt^2} + f = 0$ を満たすことを示せ。

C) A) と B) を利用して $\frac{d^2 f}{dt^2} + \lambda^2 f = 0$ の解として f を求めよ。

2) $f''(z) - k^2 f(z) = 0$ の解を求めよ。

3) $f(x) = \cos x + i \sin x$ ($i^2 = -1, i^* = -i$) とするとき、

A) $f'(x) = if(x)$ を示せ。

B) $f(x)f(y) = f(x+y)$ を示せ。

C) $f^*(x) = f(-x)$ を示せ。

D) $|f(x)| = 1$ を示せ。

E) e^x の x での微分は $e^x: \frac{de^x}{dx} = e^x$ を用いて $f(x) = e^{ix}$ と表せることを示せ。

F) $f(x) = e^{ix}$ は、B、C、D) を満たすことを示せ。

4) 2) の関係式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ($i^2 = -1, i^* = -i$) を用いて、 $\cos 3x$ を $\cos x$ と $\sin x$ で表せ。3

倍角の公式という。【ヒント】 e^{3ix} と $(\cos x + i \sin x)^3$ を比較するとよい。