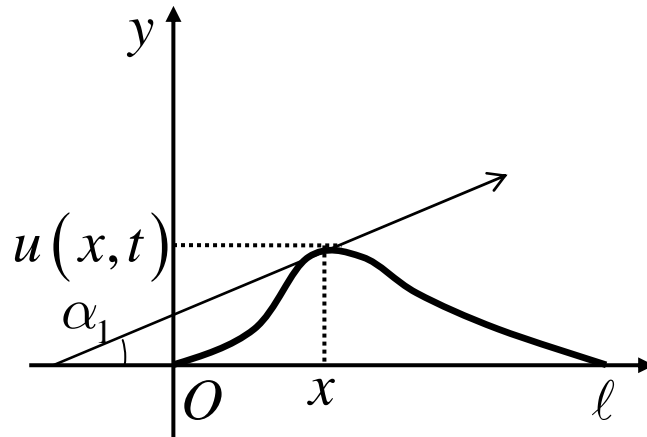


02 弦の振動方程式

長さ l の振動する弦がある。時刻 t における弦のスナップショットが



の図のようであった。場所 x における傾きが角度 α_1 を持っている。その弦の高さを

- $u(x, t)$

とすると、その場所の弦の上下方向の運動は

$$\text{速度} = \frac{\text{位置変化}}{\text{時間変化}} : v = v(x, t) \stackrel{\text{2変数あるときは偏微分}}{=} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

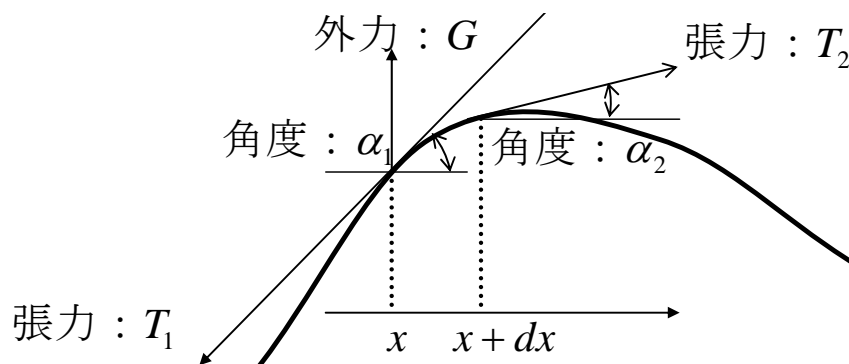
$$\text{加速度} = \frac{\text{速度変化}}{\text{時間変化}} : a = a(x, t) \stackrel{\text{2変数あるときは偏微分}}{=} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.2)$$

で表される。

弦に働く力の釣り合いから弦の振動を記述し、いわゆる

- 波動方程式

を導く。そこで図：



のように、弦のある微小な一部の張力を考える。まず、

- 微小な部分の水平方向の長さ： dx [m]

すると、 dx はほとんど 0 [m] 近くにとるので、¹ 力の釣り合いは x 上にある 1 点として考えれ

¹ 正確には、 $dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x$ 、すなわち、 0 である。また関数 f の微分は、関数値の変化を Δx で割ることにあたり

$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 。ここでは、微小な部分として Δx のことと思ってよい。

ばよい。つまり、

$$\text{水平方向： } T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \text{垂直方向： } T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 + \text{外力} &= \text{弦に働く力} \\ &= \text{微小部分にある弦の質量} \times \text{加速度} \end{aligned} \quad (2.4)$$

である。加速度

$$a = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

なので、ニュートンの教えに従って、弦に働く

- 「力」を「質量×加速度」

で置き代える。垂直方向は、弦の微小部分を考えているので、その「質量」を後から計算するとして、「微小部分にある弦の質量」としよう：

$$\bullet \quad T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 + \text{外力} = \text{弦に働く力} = \text{微小部分にある弦の質量} \times \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

で与えられる。

この2つの式は

- 三角関数 $\sin \alpha_1$ と $\sin \alpha_2$ が入っていて解くことができない。

これが解ける場合を見つけるのが必要になる。ところで、三角関数の $\tan \alpha_1$ は、

- 場所 x [m]での微分は弦の接線の傾き

に等しいことに注意すると

$$\text{場所 } x \text{ [m]での微分： } \frac{du(x, t)}{dx} \xrightarrow{x \text{ のみの変動なので}} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\text{場所 } x \text{ [m]での弦の接線の傾き： } \tan \alpha_1 \quad (2.7)$$

であるので、

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \tan \alpha_1 \quad (2.8)$$

とわかる。同様に、少しずれた $x+dx$ [m]では

$$\text{場所 } x+dx \text{ [m]での微分： } \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x+dx} \quad (2.9)$$

$$\text{場所 } x+dx \text{ [m]での弦の接線の傾き： } \tan \alpha_2 \quad (2.10)$$

であるので、

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x+dx} = \tan \alpha_2 \quad (2.11)$$

この $\tan \alpha_1$ と $\tan \alpha_2$ を利用して三角関数 $\cos \alpha_1$, $\sin \alpha_1$ と $\cos \alpha_2$, $\sin \alpha_2$ を表すことができればよい。

そのため、ごくわずかに振動している場合（微小振動）を考える。角度 α (ラジアン)が非常に小さいので、計算すると

α	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30
$\tan \alpha$	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.27	0.29	0.31
$\sin \alpha$	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30
$\cos \alpha$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.99	0.99	0.99	0.98	0.98	0.98	0.97	0.97	0.96	0.96
α^2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09

より、「 $\tan \alpha_1$ と $\tan \alpha_2$ を利用して、三角関数 $\sin \alpha_1$ と $\sin \alpha_2$ を表す」ためには、数値的に

$$\tan \alpha = \sin \alpha = \alpha, \quad \cos \alpha \stackrel{\text{だいたい等しい}}{\approx} 1 \Rightarrow \boxed{\alpha \leq 0.24 \text{ラジアン} = 14 \text{度くらいかあ?}} \quad (2.12)$$

$$\alpha^2 < 0.06 \stackrel{\text{だいたい等しい}}{\approx} 0$$

がわかる。一般に、変数 x の値が「超小さい」とき、例えば、

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + e \times \left(\begin{array}{l} x^4 \approx 0 \text{ と思えるくらい小さい} \\ x^4 \leq 0.01 - 0.02 \text{ くらいかあ?} \Rightarrow x \leq 0.3 \end{array} \right) \quad (2.13)$$

と近似できるとき、

- この関数の微分を続けてしてゆく

- $\boxed{\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}}$

と、順番に・・・

$$\begin{aligned} f(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 & \Rightarrow f(0) &= a = \overset{=1}{0!} \times a & \Rightarrow a &= \frac{1}{0!} f(0) \\ f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = b + 2cx + 3dx^2 & \Rightarrow f'(0) &= b = 1 \times b & \Rightarrow b &= \frac{1}{1!} f'(0) \\ f''(x) &= \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 2c + 6dx & \Rightarrow f''(0) &= 2c = 2 \times c & \Rightarrow c &= \frac{1}{2!} f''(0) \\ f'''(x) &= \frac{df''(x)}{dx} = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = 6d & \Rightarrow f'''(0) &= 6d = 3 \times d & \Rightarrow d &= \frac{1}{3!} f'''(0) \end{aligned} \quad (2.14)$$

なので、

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = \frac{1}{0!} f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 \quad (2.15)$$

一般に、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{0!} f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \quad (f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f''', \text{等}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

であり、

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)} \quad (2.17)$$

これをマクローリン展開という。ちなみにテーラー展開は、

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)} \quad (2.18)$$

であり、 $a=0$ での展開がマクローリン展開になる。

これを、 $\sin \alpha = \alpha$ ($\alpha \leq 0.24$ ラジアン=14度くらいかぁ?)の場合に当てはめてみると、

$$\sin \alpha \Rightarrow \sin' \alpha = \cos \alpha, \sin'' \alpha = -\sin \alpha, \sin''' \alpha = -\cos \alpha \quad (2.19)$$

なので、

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{1}{0!} \sin 0 + \frac{\alpha}{1!} \sin' 0 + \frac{\alpha^2}{2!} \sin'' 0 + \frac{\alpha^3}{3!} \sin''' 0 + \dots \quad (0! = 1) \\ &= \frac{1}{0!} \cancel{\sin 0} + \frac{\alpha}{1!} \cos 0 - \frac{\alpha^2}{2!} \cancel{\sin 0} - \frac{\alpha^3}{3!} \cos 0 + \dots = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

従って、 $\sin \alpha = \alpha$ になるには、

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{3!} \right) + \dots = \alpha \quad (2.21)$$

より、

- $\frac{\alpha^3}{3!}$ を0と思えるとき

とわかる。そこで、

$$\frac{\alpha^2}{3!} \approx 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{3!} \leq 0.01 - 0.02 \text{ くらいかぁ?} \Rightarrow \alpha \leq 0.17 - 0.25 \text{ ラジアン (10-14度)} \quad (2.22)$$

とすると・・・

$$\tan \alpha \approx \alpha \quad (\alpha^2 \leq 0.06 \Leftrightarrow \alpha \leq 0.17 - 0.25) \quad (2.23)$$

がわかる。数値の表から求めた $\alpha \leq 0.24$ ラジアン=14度とあっている。また、同様にして、

$$\cos' \alpha = -\sin \alpha, \cos'' \alpha = -\cos \alpha, \cos''' \alpha = \sin \alpha \quad (2.24)$$

に注意すると

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \dots \quad (2.25)$$

とわかるので、 $\alpha \leq 0.17 - 0.25$ のとき、

$$\frac{\alpha^2}{2!} \leq 0.02 - 0.03 \quad (2.26)$$

より、

$$\cos \alpha \approx 1 \quad (2.27)$$

とわかる。同様に、

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha \approx \alpha}{\cos \alpha \approx 1} = \alpha \quad (2.28)$$

である。

以上から、微小振動：

$$\tan \alpha_1 = \sin \alpha_1 = \alpha_1, \quad \cos \alpha_1 \overset{\text{だいたい等しい}}{\approx} 1 \quad (\alpha_1 \leq 0.24 \text{ラジアン} = 14 \text{度}) \quad (2.29)$$

$$\tan \alpha_2 = \sin \alpha_2 = \alpha_2, \quad \cos \alpha_2 \overset{\text{だいたい等しい}}{\approx} 1 \quad (\alpha_2 \leq 0.24 \text{ラジアン} = 14 \text{度})$$

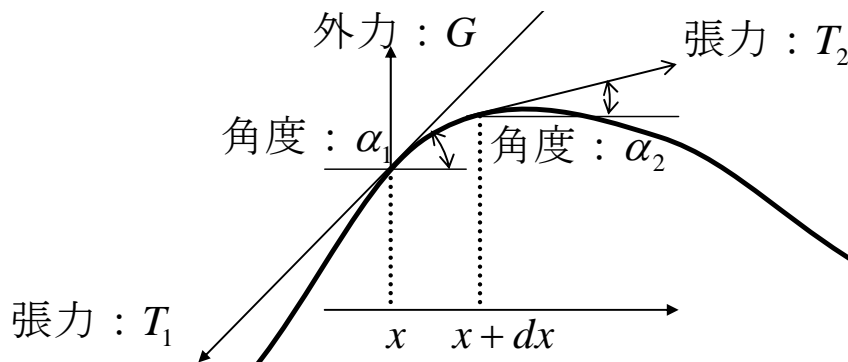
のとき

$$1) T_1 \cos \alpha_1 = T_2 \cos \alpha_2 \Rightarrow T_1 = T_2$$

$$2) T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 + \text{外力} = \text{微小部分にある弦の質量} \times \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.30)$$

sin α を tan α で表せばよいので...

$$\Rightarrow T_2 \tan \alpha_2 - T_1 \tan \alpha_1 + \text{外力} = \text{微小部分にある弦の質量} \times \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$



になる。ここで、

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \tan \alpha_1, \quad \left. \frac{\partial u(x',t)}{\partial x'} \right|_{x'=x+dx} = \tan \alpha_2 \quad (2.31)$$

を用いると、2)を書き換えることができ、

$$\begin{aligned} T_2 \tan \alpha_2 - T_1 \tan \alpha_1 + \text{外力} &= \text{微小部分にある弦の質量} \times \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ &= T_2 \left. \frac{\partial u(x',t)}{\partial x'} \right|_{x'=x+dx} - T_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \text{外力} = \text{微小部分にある弦の質量} \times \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

になる。以上から、

$$1) T_1 = T_2 (=T_0 \text{とする})$$

$$2) T_2 \left. \frac{\partial u(x',t)}{\partial x'} \right|_{x'=x+dx} - T_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \text{外力} = \text{微小部分にある弦の質量} \times \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

なので、2)は1)を用いて

$$2) T_0 \left(\left. \frac{\partial u(x',t)}{\partial x'} \right|_{x'=x+dx} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + \text{外力} = \text{微小部分にある弦の質量} \times \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.34)$$

と整理できる。従って、残りの

○外力

○微小部分にある弦の質量

がわかればよい。外力は、

● 重力、磁石の力、など

が考えられるが、これは「わかる」ので、

○微小部分にある弦の質量

を知ることが必要である。

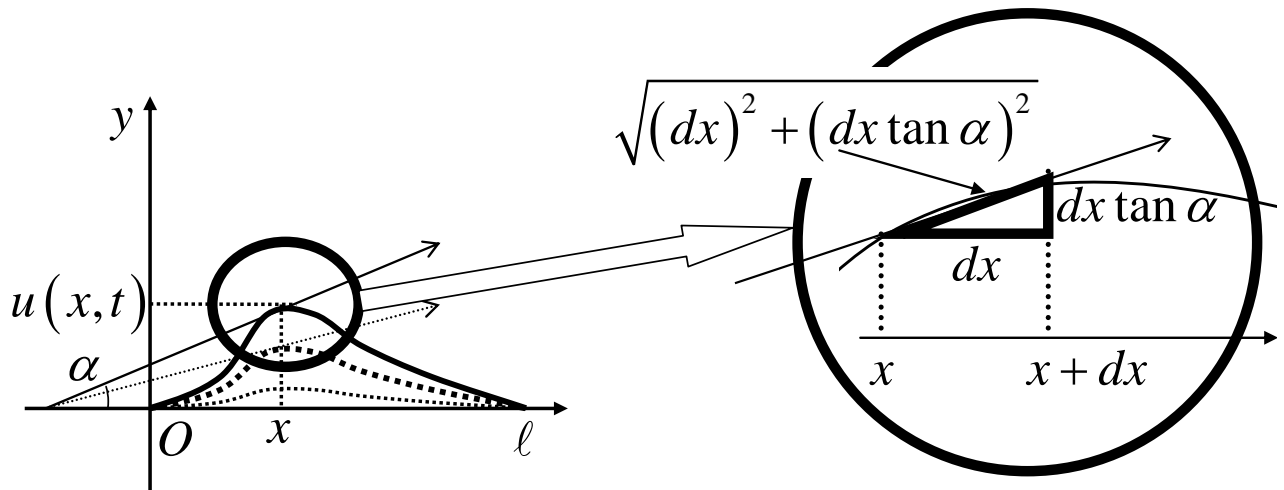
弦の重さは、長さによって違う（長い弦ほど重い）ので

単位長さあたりの重さ = ρ [Kg/m]

で弦の重さを決めている。従って、

微小部分にある弦の質量 = $\rho \times$ 微小部分の弦の長さ

と計算できるので、「微小部分の弦の長さ」がわかればよい。図のような弦の微小部分：



より、

● 弦の曲がっている弧 \approx 直線（地球は曲がった球面だけど、身近な所は直線道路）

なので

$$\begin{aligned}
 \text{弦の長さ} &= \sqrt{(dx)^2 + (dx \tan \alpha)^2} = \sqrt{1 + (\tan \alpha)^2} dx \\
 &\Leftrightarrow \alpha^2 < 0.06 \quad \overset{\text{だいたい等しい}}{\approx} 0 \quad (\leq 0.24 \text{ラジアン} = 14 \text{度}) \\
 &= \sqrt{1 + \alpha^2} dx \quad \overset{\alpha^2 < 0.06}{\approx} dx
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

なので、

$$\bullet \text{ 微小部分にある弦の質量} = \rho \times \text{微小部分の弦の長さ} = \rho dx$$

である。つまり、

$$\begin{aligned}
 2) T_0 \left(\left. \frac{\partial u(x', t)}{\partial x'} \right|_{x'=x+dx} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + \text{外力} &= \text{微小部分にある弦の質量} \times \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \\
 &= \rho dx \times \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

なので、

$$2) T_0 \left(\left. \frac{\partial u(x', t)}{\partial x'} \right|_{x'=x+dx} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + \text{外力} = \rho dx \times \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \tag{2.37}$$

になった。

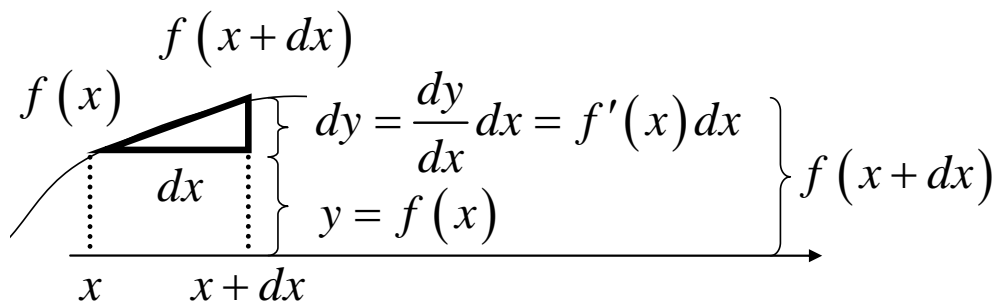
さて、ここで $\left. \frac{\partial u(x', t)}{\partial x'} \right|_{x'=x+dx} - T_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ を計算するために、

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = f(x) \tag{2.38}$$

と置いてみると、

$$\left. \frac{\partial u(x', t)}{\partial x'} \right|_{x'=x+dx} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = f(x') \Big|_{x'=x+dx} - f(x) = f(x+dx) - f(x) \tag{2.39}$$

になる。図より、



なので、

$$f(x+dx) = y + dy = f(x) + f'(x) dx \tag{2.40}$$

である。これを使うと、

$$\left. \frac{\partial u(x',t)}{\partial x'} \right|_{x'=x+dx} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x+dx) - f(x) = f(x) + f'(x)dx - f(x) = f'(x)dx \quad (2.41)$$

とわかるので、

$$2) T_0 \left(\left. \frac{\partial u(x',t)}{\partial x'} \right|_{x'=x+dx} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + \text{外力} = T_0 (f'(x)dx) + \text{外力} = \rho dx \times \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.42)$$

即ち、

$$T_0 f'(x)dx + \text{外力} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (2.43)$$

を得る。また、 $f'(x)$ が

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x) \Rightarrow f'(x) = \boxed{\frac{d}{dx}} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \stackrel{\substack{\text{xのみの微分} \\ \text{なので...}}}{=} \boxed{\frac{\partial}{\partial x}} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.44)$$

と書けるので、

$$T_0 f'(x)dx + \text{外力} = T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx + \text{外力} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (2.45)$$

である。また、単位長さ当りの外力を $g(x,t)$ とすれば、

$$\text{外力} = g(x,t) \times \text{弦の長さ} = g(x,t)dx \quad (2.46)$$

になるので、

$$T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx + g(x,t)dx = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \quad (2.47)$$

が得られた。さらに、

1) 両辺を dx でわると...

$$T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t) = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.48)$$

2) 両辺を ρ でわると...

$$\frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{g(x,t)}{\rho} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.49)$$

これは波動方程式とよばれ、通常

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + G(x,t) \Leftarrow a^2 = \frac{T_0}{\rho}, G(x,t) = \frac{g(x,t)}{\rho}} \quad (2.50)$$

と記述される。

第一回目レポート

レポートの回数(一回目)、学生証番号と氏名を明記すること
必ず表紙を付ける (A4レポート用紙使用のこと)

1) つぎの α^4 までの表式を導け (4 ページ参照)。

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} \dots$$

2) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ のマクローリン展開 (3 ページ参照) の x^4 の項まで求めよ。

3) $f(x, y) = 2x^3 + 5xy^2 + y$, $y = 4x$ のとき

A) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ を求めよ。

B) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ を求めよ。

C) $\frac{df(x, y)}{dx}$ を求めよ。

D) $\frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ が成立していることを示せ。

4) $E = \frac{1}{2}mv^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) + a \cos \omega t$, $v(t) = gt$, $x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ のとき

A) $\frac{\partial E}{\partial t}$ を求めよ。

B) $\frac{dE}{dt}$ を求めよ。

5) 力 F を重力加速度 g 、加速度 a 、質量 m を用いて表せ。空気抵抗は無視する。

力 F [N] で引っ張る

