

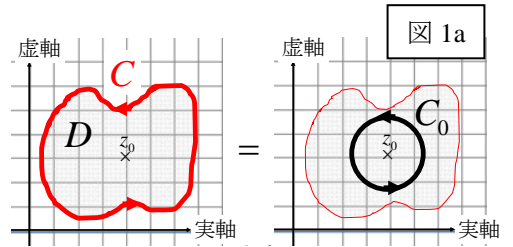
1 4 複素積分：留数定理

I.留数定理：一般の特異点

線積分の値がゼロで無いのは $\oint_C \frac{1}{z-z_0} = 2\pi i$ である。この性質を一般の複素関数 $f(z)$ に拡張して、 $\oint_C f(z)$ の値がゼロで無い場合、 $f(z) = \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \dots$ の形である事を見る。

特異点を $z=z_0$ に持つ複素関数 $f(z)$ とします。この特異

点がある領域を D として、それを囲む積分経路を C とします。ここで、【1 2 複素積分：コーシーの積分公式】－I. 閉じた積分経路と円周での性質により、図 1a のように円周上の積分経路を C_0 とすると、 C と C_0 による線積分が等しく



なります。つまり $\oint_C f(z) dz$ の線積分は $\oint_{C_0} f(z) dz$ に帰着し

$$\overbrace{\oint_C f(z) dz}^{\text{一般の積分経路}} = \overbrace{\oint_{C_0} f(z) dz}^{\text{特別な積分経路=円周上}} \tag{14.1}$$

が成り立ちます。これで、

- 計算が簡単な円周上の積分結果が使えるようになるので、 $\overbrace{\oint_C f(z) dz}^{\text{一般の積分経路}}$ が積分できる

こととなります。ローラン展開 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ を線積分 $\overbrace{\oint_{C_0} f(z) dz}^{\text{特別な積分経路=円周上}}$ に代入して

$$\overbrace{\oint_{C_0} f(z) dz}^{\text{特別な積分経路=円周上}} = \oint_{C_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n dz \stackrel{\text{和記号と積分の順序入替}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint_{C_0} c_n (z-z_0)^n dz \tag{14.2}$$

になります。各項の線積分は、【1 2 複素積分：コーシーの積分定理】－I. 線積分の実技で求めた

$$\overbrace{\oint_{C_0} f(z) dz}^{\text{特別な積分経路=円周上}} = \begin{cases} 2\pi i \dots f(z) = \frac{1}{z} \\ 0 \dots f(z) = \frac{1}{z^n} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

の結果に、特異点 z_0 を取り入れたバージョンの

$$\overbrace{\oint_{C_0} f(z) dz}^{\text{特別な積分経路=円周上}} = \begin{cases} 2\pi i \cdots f(z) = \frac{1}{z-z_0} \\ 0 \cdots f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \quad (n \geq 2) \end{cases} \Leftarrow f(z) = \text{正則関数でない時} \quad (14.3)$$

と

$$\oint_{C_0} f(z) dz = 0 \cdots f(z) = \text{正則関数の時} \quad (14.4)$$

により積分できます。(14.3)と(14.4)を用いて

$$\begin{aligned} \oint_{C_0} f(z) dz &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint_{C_0} c_n (z-z_k)^n dz \\ &= \cdots + \oint_{C_0} c_{-3} (z-z_k)^{-3} dz + \oint_{C_0} c_{-2} (z-z_k)^{-2} dz + \oint_{C_0} c_{-1} (z-z_k)^{-1} dz \\ &\quad + \underbrace{\oint_{C_0} [c_0 (z-z_k)^0 + c_1 (z-z_k)^1 + c_2 (z-z_k)^2 + c_3 (z-z_k)^3 + \cdots] dz}_{\text{コーシーの積分定理：正則関数} \Rightarrow \text{線積分}=0} \\ &= \cdots + \underbrace{\oint_{C_0} \frac{c_{-3}}{(z-z_k)^3} dz}_{m=3} + \underbrace{\oint_{C_0} \frac{c_{-2}}{(z-z_k)^2} dz}_{m=2} + \underbrace{\oint_{C_0} \frac{c_{-1}}{z-z_k} dz}_{\oint_{C_0} \frac{1}{z-z_k} = 2\pi i} = 2\pi i c_{-1} \end{aligned} \quad (14.5)$$

と計算できるので

$$\overbrace{\oint_{C_0} f(z) dz}^{\text{特別な積分経路=円周上}} = 2\pi i c_{-1} \quad (14.6)$$

を得ます。(14.1)に代入して

$$\overbrace{\oint_C f(z) dz}^{\text{一般の積分経路}} = \overbrace{\oint_{C_0} f(z) dz}^{\text{特別な積分経路=円周上}} = 2\pi i c_{-1} \quad (14.7)$$

です。従って、線積分は

$$\boxed{\oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1}} \Leftarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad (14.8)$$

と計算できました。これより、

$$\text{係数：} c_{-1} \Leftarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1 (z-z_0) + \cdots \quad (14.9)$$

が分かると積分値が分かります。この c_{-1} を **留数 (Residue)** といい

$$c_{-1} = \text{Res}(f, z_0) \quad (14.10)$$

と表します。つまり、

$$\boxed{\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz} \Leftarrow \text{留数} \quad (14.11)$$

と表し、この公式を

● **留数定理**

といいます。この定理は

- 線積分を実行しなくても、ローラン展開の**係数** c_{-1} が見つければ**線積分の値**になる

という非常に便利な定理です。つまり、線積分 $\oint_C f(z) dz$ が

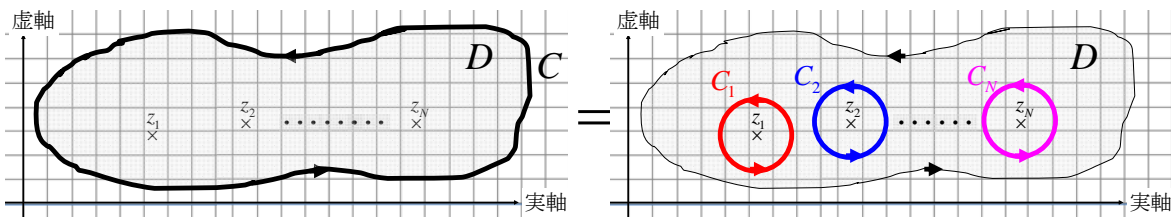
$$\boxed{\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0)}$$
 (14.12)

と計算できます。

$f(z)$ が複数の特異点を持つときも同様に積分できます。特異点が N 個あるとして

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_N$$
 (14.13)

とします。この N 個の特異点がある領域を D として、それを囲む積分経路を C とします。今度は、 N 個の特異点を、 N 個の円で囲む積分経路を $C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$ を用います。



その結果、 $\oint_C f(z) dz$ を計算する代わりに、計算が簡単な円周上 $C_1, C_2, C_3, \dots, C_N$ の積分経路で線積分できます：

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_N} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \oint_{C_k} f(z) dz$$
 (14.14)

積分結果は、(14.8)を拡張した

$$\boxed{\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N c_{-1}^{(k)}} \Leftarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} (z - z_k)^n \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N)$$
 (14.15)

になります。各特異点の回りでの展開は係数が異なります。その違いを $c_n^{(k)}$ の k で表しています。

例えば、 $z = z_2$ と $z = z_5$ の回りとする

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(2)} (z - z_2)^n = \dots + c_{-1}^{(2)} (z - z_2) + c_0^{(2)} \overbrace{(z - z_2)^0}^1 + c_1^{(2)} (z - z_2) + c_2^{(2)} (z - z_2)^2 + \dots \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(5)} (z - z_5)^n = \dots + c_{-1}^{(5)} (z - z_5) + c_0^{(5)} \overbrace{(z - z_5)^0}^1 + c_1^{(5)} (z - z_5) + c_2^{(5)} (z - z_5)^2 + \dots \end{cases}$$
 (14.16)

のように、係数が $c_n^{(2)}$ と $c_n^{(5)}$ で異なる事を示しています。

II. 留数定理：極

k 位の極は $f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots$ であるが、 $(z-z_0)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \dots$

は微分可能になり、関数 $(z-z_0)^k f(z)$ を何回か微分して、 c_{-1} を求める。

ローラン展開が途中から始まる場合、ローラン展開の主要部が k 個の項からなるとき、

- (14.8) の c_{-1} (=線積分の値) を見つける便利な方法

があります。そのとき、 $f(z)$ のローラン展開は

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-k}^{-1} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{主要部}(k\text{個の項がある})} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \\ &= \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (14.17)$$

です。これは

- $f(z)$ が k 位の極を持つ

持つ場合です。ここで、 $f(z)$ に $(z-z_0)^k$ を掛けると、

$$\begin{aligned} (z-z_0)^k f(z) &= (z-z_0)^k \left[\sum_{n=-k}^{-1} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \right] \\ &= (z-z_0)^k \left[\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots \right] \\ &= c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0)^1 + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^{k-0} + c_1(z-z_0)^{k+1} + \dots \end{aligned} \quad (14.18)$$

より

$$(z-z_0)^k f(z) = \overbrace{c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0)^1 + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^{k-0} + c_1(z-z_0)^{k+1} + \dots}^{\text{正則関数}} \quad (14.19)$$

となります。つまり、

- $f(z)$ に $(z-z_0)^k$ を掛けると、正則関数になる

とわかります。これより c_{-1} を含む項のみ取り出すには、 $(z-z_0)^k f(z)$ の微分を使いますが

- $(z-z_0)^k f(z)$ が正則なので微分可能

より、何回でも微分できます。 c_{-1} の項は、

$$(z - z_0)^k f(z) = \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + \cdots \quad (14.20)$$

のように $(z - z_0)^{k-1}$ 比例するので、

● 1 回微分すると z の次数が 1 つ減るので、 $k-1$ 回微分すればよいこととなります。従って、順次微分していくと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(z - z_0)^{k-1} &= (k-1)(z - z_0)^{k-2} = (k-1)(z - z_0)^{k-2} \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dz^2}(z - z_0)^{k-1} &= (k-1) \frac{d}{dz}(z - z_0)^{k-2} = (k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} = (k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} \\ \Rightarrow \frac{d^3}{dz^3}(z - z_0)^{k-1} &= (k-1)(k-2) \frac{d}{dz}(z - z_0)^{k-3} = (k-1)(k-2)(k-3)(z - z_0)^{k-4} \\ &= (k-1)(k-2)(k-3)(z - z_0)^{k-4} \end{aligned} \quad (14.21)$$

なので、次数が減るルールを見つけたため

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(z - z_0)^{k-1} &= \frac{d^1}{dz^1}(z - z_0)^{k-1} = (k-1)(z - z_0)^{k-2} = (k-1)(z - z_0)^{k-2} \\ \frac{d^2}{dz^2}(z - z_0)^{k-1} &= (k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} = (k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} \\ \frac{d^3}{dz^3}(z - z_0)^{k-1} &= (k-1)(k-2)(k-3)(z - z_0)^{k-4} = (k-1)(k-2)(k-3)(z - z_0)^{k-4} \end{aligned} \quad (14.22)$$

より、

$$\frac{d^{\square}}{dz^{\square}}(z - z_0)^{k-1} = (k-1)(k-2)(k-3) \cdots (k - \square)(z - z_0)^{k-1-\square} \quad (14.23)$$

の形式になる事が分かります。つまり、 m 回微分すると

$$\frac{d^m}{dz^m}(z - z_0)^{k-1} = (k-1)(k-2)(k-3) \cdots (k-m)(z - z_0)^{k-1-m}$$

と計算できます。従って、 $k-1$ 回微分するために $m = k-1$ にすると

$$\begin{aligned} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^{k-1} &= (k-1)(k-2)(k-3) \cdots (k - (k-1))(z - z_0)^{k-1-(k-1)} \\ &= \overbrace{(k-1)(k-2)(k-3) \cdots (1)}^{(k-1)!} \overbrace{(z - z_0)^0}^1 = (k-1)! \end{aligned} \quad (14.24)$$

以上から、

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z - z_0)^{k-1} = (k-1)! \quad (14.25)$$

となります。

結果の(14.25)を(14.19)に用いて

$$\begin{aligned} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] &= \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0)^1 + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + c_0(z - z_0)^{k-0} \right. \\ &\quad \left. + c_1(z - z_0)^{k+1} + \cdots \right] \\ &= c_{-1}(k-1)! + c_0 k!(z - z_0) + c_1(k+1)!(z - z_0) + \cdots \end{aligned}$$

となりますが、まだ $(z - z_0)$ 等の項が後ろに付いているので、この項を消すためには $z \rightarrow z_0$ にすればよい事が分かります。 $z \rightarrow z_0$ を取り

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[c_{-1} (k-1)! + \cancel{c_0 k! (z - z_0)} + \cancel{c_1 (k+1)! (z - z_0)^2} + \dots \right] \quad (14.26)$$

$$= c_{-1} (k-1)!$$

を得ます。これから、留数は(14.10)より c_{-1} なので

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] \quad (14.27)$$

と計算できました。従って、線積分の値は

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] \quad (14.28)$$

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots$$

として、計算できます。また、 N 個の k 位極がある場合は、すべての極の留数を加え

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \sum_{n=1}^N \text{Res}(f, z_n) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_n)^k f(z) \right] \quad (14.29)$$

です。

Ⅲ.留数定理 : 積分

留数定理を使って、通常の実数 x の積分がどのように実行されるか問題を解きながら調べてみます。

x 軸の積分は、複素平面上では実軸上の積分なので、 $x: x_1 \rightarrow x_2$ を実軸上の積分経路 C_R と見なして複素数 z の積分に拡張する。

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \oint_{C_R} f(z) dz \quad (C_R \text{ は直線で閉じていないが便宜上 } \oint \text{ で表す})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

求める積分は、 $x = 0$ で対称なので

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^4 + 1} dx \quad (14.30)$$

が成り立ちます。そこで、

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx \right) = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^4+1} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx \right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx \quad (14.31)$$

と変更できます。複素積分で計算するために複素関数に格上(?)し、

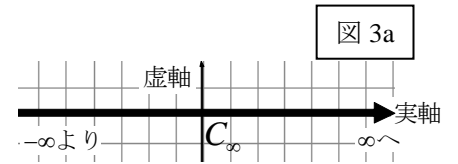
$$f(x) = \frac{1}{x^4+1} \rightarrow f(z) = \frac{1}{z^4+1} \quad (z = x + iy) \quad (14.32)$$

とします。複素積分には

● 積分経路

が必要になりますが、 $x = -\infty \rightarrow x = \infty$ の x 積分を同じ領域の実数軸の領域にとった図 3a の積分経路 C_{∞} を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \oint_{C_{\infty}} f(z) dz \quad (14.33)$$



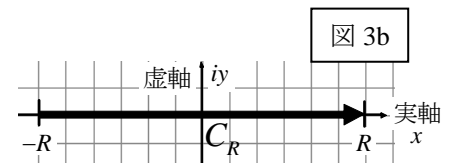
のように x 積分と等しくできます。

ところで、 $-\infty$ から ∞ の経路は、図 3a のようにその一部しか図に描けないので

● 積分経路を $-\infty = -\lim_{R \rightarrow \infty} R \rightarrow \infty = \lim_{R \rightarrow \infty} R$ として描きます (図 3b)。

として、極限操作で ∞ を導入します。その結果、積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx \quad (14.34)$$



となります。対応する積分経路は図 3b の C_R で与えられ、求める積分は

$$\int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx = \oint_{C_R} \frac{1}{z^4+1} dz \quad (14.35)$$

になります。逆に、積分経路 C_R は実軸上 ($y=0$) で y の値は 0 で変化せず ($dy=0$)

$$\left. \begin{aligned} dz &= dx + i \overbrace{dy}^{dy=0} = dx \\ z &= x + i \overbrace{y}^{y=0} = x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} dz = dx \\ z = x \end{cases} \quad (14.36)$$

とすれば、

$$\oint_{C_R} \frac{1}{z^4+1} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx \quad (14.37)$$

が導けます。

留数定理では、特異点を用います。特異点は

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z^4+1} = \infty = \left(\frac{1}{0} \right) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z^4+1) = 0 \Rightarrow z^4 = -1 \quad (14.38)$$

より見つけられます。この解は

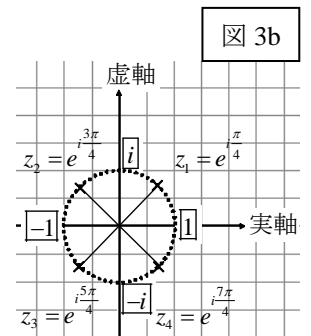
$$z^4 = -1 \Rightarrow \text{4つの解がある} \Rightarrow -1 = e^{i\theta} = \overset{-1}{\cos \theta} + \overset{0}{i \sin \theta} = \begin{cases} e^{i\pi} \dots \theta = \pi \\ e^{3i\pi} \dots \theta = 3\pi \\ e^{5i\pi} \dots \theta = 5\pi \\ e^{7i\pi} \dots \theta = 7\pi \end{cases} \quad (14.39)$$

の 4 つです。この 4 つの解を用いて、

$$z^4 + 1 = \left(z - e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \left(z - e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \left(z - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(z - e^{i\frac{7\pi}{4}} \right) \quad (14.40)$$

と因数分解できます。特異点を図示すると、図 3b のように

$$z = \begin{cases} z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \dots \text{角度} \frac{\pi}{4} \text{の場所} \\ z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \dots \text{角度} \frac{3\pi}{4} \text{の場所} \\ z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \dots \text{角度} \frac{5\pi}{4} \text{の場所} \\ z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \dots \text{角度} \frac{7\pi}{4} \text{の場所} \end{cases} \quad (14.41)$$



になります。ところで、

- $\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz$ の線積分には積分経路 C が必要

になります。その経路は、図 3a の $x = -R \rightarrow x = R$ を含まないといけません。 $x = -R \rightarrow x = R$ を含む閉じた経路を作るには、

- 実軸の上か下に半径 R の半円を追加

しえます。図 3c は上に付けた場合です。2 つの積分経路 C_R と C_0 を

繋ぐと、図 3d の 1 つの積分経路 C ができます。従って、

- $\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz$ の積分経路 C は図 3d

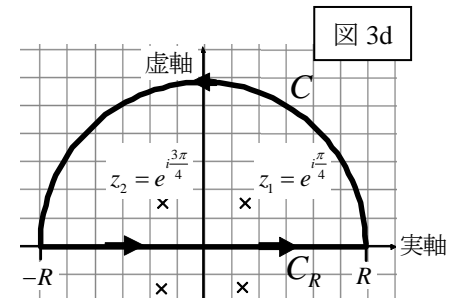
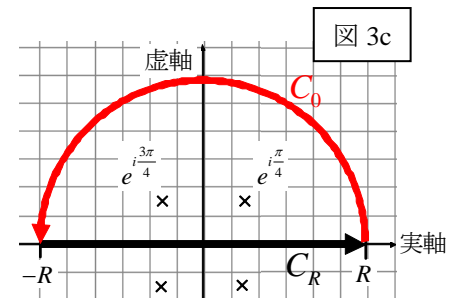
になります。積分経路 C 内には、2 つの特異点

$$\begin{cases} z = z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z = z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{cases} \quad (14.42)$$

があります。このとき、積分経路 $C = C_R + C_0$ なので、

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz = \oint_{C_R} \frac{1}{z^4 + 1} dz + \oint_{C_0} \frac{1}{z^4 + 1} dz \quad (14.43)$$

の関係が表れます。求める答えは、



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \oint_{C_R} \frac{1}{z^4+1} dz$$

になります。

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz$$

線積分は、(14.29)で計算でき、(14.40)より 4 つの特異点は 1 位の極 ($k=1$) なので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz &= \sum_{n=1}^N \overbrace{\frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-z_n)^k f(z)]}^{N=2, k=1} \Leftarrow 0! = 1 \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} [(z-z_1) f(z)] + \lim_{z \rightarrow z_2} [(z-z_2) f(z)] \\ &\quad \underbrace{z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\substack{z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}} } \quad \underbrace{z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}}_{\substack{z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}} } \end{aligned} \tag{14.44}$$

と計算します。(14.40)を $f(z)$ に代入して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z^4+1} dz = \lim_{z \rightarrow z_1} \left[(z-z_1) \frac{1}{z^4+1} \right] + \lim_{z \rightarrow z_2} \left[(z-z_2) \frac{1}{z^4+1} \right] \\ &\quad \underbrace{z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\substack{z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}} } \quad \underbrace{z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}}_{\substack{z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}} } \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} \left[\cancel{(z - e^{i\frac{\pi}{4}})} \frac{1}{\left(\cancel{z - e^{i\frac{\pi}{4}}} \right) \left(z - e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \left(z - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(z - e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)} \right] \\ &\quad + \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} \left[\cancel{(z - e^{i\frac{3\pi}{4}})} \frac{1}{\left(z - e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \left(\cancel{z - e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right) \left(z - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(z - e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}} \left[\frac{1}{\left(z - e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \left(z - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(z - e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)} \right] + \lim_{z \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{4}}} \left[\frac{1}{\left(z - e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \left(z - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(z - e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)} \right] \\ &= \frac{1}{\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)} + \frac{1}{\left(e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)} \\ &= \frac{1}{\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)} - \frac{1}{\left(e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)} \end{aligned} \tag{14.45}$$

ここで、(14.41)より

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad (14.46)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z^4+1} dz &= \frac{1}{\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3\pi}{4}} \right)} \left[\frac{1}{\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)} - \frac{1}{\left(e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \left(e^{i\frac{3\pi}{4}} - e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)} \right] \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right)} \left[\frac{1}{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} - \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)} \right] \\ &= \frac{1}{\left(2\frac{1}{\sqrt{2}} \right)} \left[\frac{1}{\left(2\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \left(2\frac{i}{\sqrt{2}} \right)} - \frac{1}{\left(2\frac{i}{\sqrt{2}} \right) \left(2\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \right)} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}i} \left[\frac{1}{\sqrt{2}(1+i)} - \frac{1}{\sqrt{2}(-1+i)} \right] = \frac{1}{2i} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{-1+i} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{i} \left(\overset{\text{有理化}}{\frac{1}{1+i}} - \overset{\text{有理化}}{\frac{1}{-1+i}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{-i}{i(-i)} \left[\frac{1-i}{(1+i)(1-i)} + \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{-i}{-i^2} \left(\frac{1-i}{1-i^2} + \frac{1+i}{1-i^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{-i}{1} \left(\frac{1-i}{1+1} + \frac{1+i}{1+1} \right) = \frac{-i}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{-i}{2\sqrt{2}} \quad (14.47) \end{aligned}$$

従って、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z^4+1} dz = \frac{-i}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \oint_C \frac{1}{z^4+1} dz = 2\pi i \frac{-i}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (14.48)$$

を得るので、

$$\boxed{\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}} \quad (14.49)$$

と計算できます。

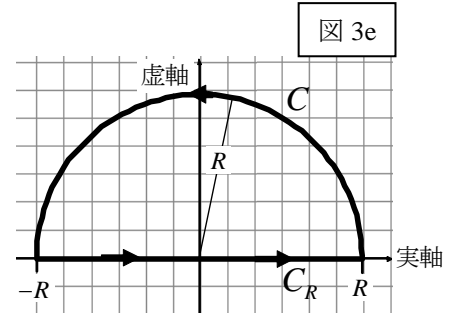
$$\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx + \dots$$

複素積分が $\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ と計算できましたので、この結果を用いて、 $\int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx$ の計算をします。ここで、(14.43)より、

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz = \oint_{C_R} \frac{1}{z^4+1} dz + \oint_{C_0} \frac{1}{z^4+1} dz \quad (14.50)$$

です。それぞれの線積分を計算します。

- $\oint_{C_R} \frac{1}{z^4+1} dz$: (14.37)より $\oint_{C_R} \frac{1}{z^4+1} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx$ です。
- $\oint_{C_0} \frac{1}{z^4+1} dz$: 図 3e より、積分経路 C_0 は、半径 R の円周上なので、 $z = Re^{i\theta}$, $dz = iRe^{i\theta} d\theta$



【1 1 複素積分：コーシーの積分定理】— I. 線積分の実技の(11.18)より半径 r のときに $dz = ire^{i\theta} d\theta$

より

$$\oint_{C_R} \frac{1}{z^4+1} dz = \int_0^\pi \frac{1}{(Re^{i\theta})^4+1} iRe^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4+1} d\theta$$

です。

以上から、

$$\oint_C \frac{1}{z^4+1} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx + i \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4+1} d\theta \tag{14.51}$$

とわかります。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{1}{z^4+1} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx + \dots$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$ を計算するため、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{1}{z^4+1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4+1} d\theta \tag{14.52}$$

を計算しますが、第 1 項は、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx \tag{14.53}$$

で答えを求める積分なので、問題となるのは第 2 項の θ 積分です。第 2 項は、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4+1} d\theta = \int_0^\pi \frac{\infty \times e^{i\theta}}{(\infty \times e^{i\theta})^4+1} d\theta = \int_0^\pi \frac{\infty \times e^{i\theta}}{(\infty \times e^{i\theta})^4} d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{(\infty \times e^{i\theta})^3} d\theta = 0 \tag{14.54}$$

と期待できます。厳密には、以下のようにします。まず、

$$\text{【公式】 } \left| \int f(z) dz \right| < \int |f(z)| dz \tag{14.55}$$

を用いて

$$\left| \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4+1} d\theta \right| < \int_0^\pi \left| \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4+1} \right| d\theta = \int_0^\pi \frac{R|e^{i\theta}|}{|R^4 e^{4i\theta} + 1|} d\theta = \int_0^\pi \frac{R|e^{i\theta}|}{R^4 \left| e^{4i\theta} + \frac{1}{R^4} \right|} d\theta = \frac{1}{R^3} \int_0^\pi \frac{|e^{i\theta}|}{\left| e^{4i\theta} + \frac{1}{R^4} \right|} d\theta \tag{14.56}$$

です。ここで、

$$\begin{cases} |e^{i\theta}| = 1 \\ e^{4i\theta} = \cos 4\theta + i \sin 4\theta \end{cases} \quad (14.57)$$

を用いて

$$\int_0^\pi \frac{|e^{i\theta}|}{|e^{4i\theta} + \frac{1}{R^4}|} d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{|\cos 4\theta + i \sin 4\theta + \frac{1}{R^4}|} d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{|\cos 4\theta + \frac{1}{R^4} + i \sin 4\theta|} d\theta \quad (14.58)$$

になり、

$$\left| \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4 + 1} d\theta \right| < \frac{1}{R^3} \int_0^\pi \frac{1}{|\cos 4\theta + \frac{1}{R^4} + i \sin 4\theta|} d\theta \quad (14.59)$$

を得ます。更に、

$$\left| \cos 4\theta + \frac{1}{R^4} + i \sin 4\theta \right| = \sqrt{\left(\cos 4\theta + \frac{1}{R^4} \right)^2 + (\sin 4\theta)^2} \quad (14.60)$$

より

$$\left| \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4 + 1} d\theta \right| < \frac{1}{R^3} \int_0^\pi \frac{1}{|\cos 4\theta + \frac{1}{R^4} + i \sin 4\theta|} d\theta = \frac{1}{R^3} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\left(\cos 4\theta + \frac{1}{R^4} \right)^2 + (\sin 4\theta)^2}} d\theta \quad (14.61)$$

と分かります。故に、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4 + 1} d\theta \right| < \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^3} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\left(\cos 4\theta + \frac{1}{R^4} \right)^2 + (\sin 4\theta)^2}} d\theta = 0 \quad (14.62)$$

何か有限の値

より

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4 + 1} d\theta = 0 \quad (14.63)$$

となります。従って、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{x^4 + 1} dx + i \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4 + 1} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx + i0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx \quad (14.64)$$

になります。以上から、(14.49)の結果 $\oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ を用いて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{1}{z^4 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (14.65)$$

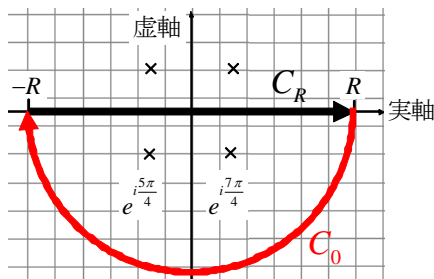
です。従って、

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad (14.66)$$

と計算できます。求める答えは

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}} \quad (14.67)$$

になります。(問題 1：下図の様に、実軸の下に半径 R の半円を追加した場合に留数を計算し、



$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ を導け。上図は、留数定理を導いた経路の回る方向（反時計回り）とは方向

が逆（時計回り）なので注意する事。）