

13 複素積分：ローラン展開

基本戦略：微分不可能な複素関数 $f(z)$ を調べるが、線積分の答えを知っている正則（＝微分可能）な複素関数の**線積分の公式**を使うために、微分不可能な複素関数を微分可能にする方法を考える

【11 複素積分：コーシーの積分定理】－I. 線積分の実技での線積分では、半径 r の円周上の閉じた経路 C 上の積分で

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \begin{cases} 0 \cdots f(z) = z \\ 2\pi i \cdots f(z) = \frac{1}{z} \\ 0 \cdots f(z) = \frac{1}{z^n} \quad (n \geq 2) \end{cases} \quad (13.1)$$

特別な積分経路＝円周上

という結果でした。とくに、**積分値がゼロでない関数**は

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (13.2)$$

で、その特徴は、

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty \quad (13.3)$$

である事が分かります。このようにある点で発散（ ∞ の値）、或いは、不定（ $\frac{0}{0}$ の値）になる場合、その点を

- **特異点**：発散（ ∞ の値）、或いは、不定（ $\frac{0}{0}$ の値）

といいます。従って、

- 正則でない複素関数は特異点があり、線積分はゼロ以外の値が計算可能
 - 正則な複素関数の線積分はゼロ（コーシーの積分定理）

です。発散（ ∞ の値）する場合には $\frac{1}{z}$ と同じ形の $\frac{1}{z^n}$ ($n > 0$) があります。 z_0 を使って、一般化すると

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} \quad (n > 0) \Rightarrow f(z_0) = \infty \quad (13.4)$$

になります。このような特別な形で $z = z_0$ において正則でなくなる場合、

- z_0 を **n 位の極** (pole)

といいます。数学的な厳密さを加えると、特異点とは

- 関数 $f(z)$ は $z = z_0$ で正則でないが、 z_0 のどんな近傍をとっても、その中の少なく

とも 1 点で正則であるとき、 z_0 は $f(z)$ の **特異点** であるという。
になります。

I. ローラン展開

ゼロでない線積分の値を求めるには特異点の存在が重要になります。複素関数 $f(z)$ に

$\frac{1}{(z-z_0)^n}$ ($-\infty \leq n \leq \infty$) 型の特異点があるかどうか、簡単に分かるような $f(z)$ の展開方法が

あります。これを

- **ローラン展開**

といいます。特別な場合に

- **テーラー展開**

を含みます。

ローラン展開を導くために複素関数 $f(z)$ が特異点 z_0 を持ち、

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

の関数とします。つまり、

- 積分領域 D で、1 つの点 $z = z_0$ 除いて正則 (微分可能)

➤ z_0 は **特異点** ($z = z_0$ のみ微分不可能)

◇ 例えば、 $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$ ($n > 0$) $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(z-z_0)^n} = \infty$ で微分不可能

とします。図 1a のような

- 特異点 z_0 を中心にする円の積分領域 D

をとり、それを囲む円周上の積分経路 C_0 とします。ここで、**線積分の結果がわかっているコーシーの積分公式** を使うために、

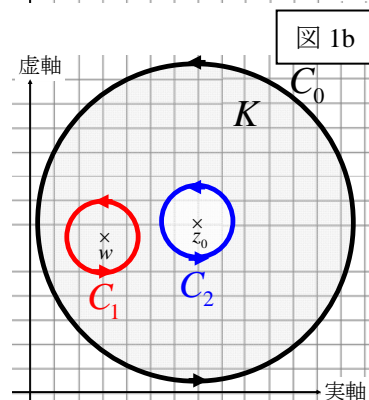
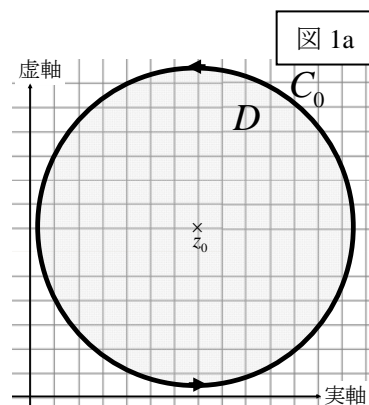
- $f(z)$ をすべての領域で正則

にします。そこで、

- 正則でない特異点 $z = z_0$ を除いた新しい積分領域 K

- $z = z_0$ を含まない積分領域なので、 K で $f(z)$ は正則

になります。 $z = z_0$ を含まない積分領域を作るために、図 1b のよ



うに、新たに 2 つの積分経路を、孤立特異点 z_0 、及び、任意の指定した複素数 w を囲む様に

- 点 z を囲む円周上の積分経路 C_1
- 点 z_0 を囲む円周上の積分経路 C_2

を取ります。領域 K として 2 つの積分経路 C_0 と C_2 で挟まれた領域 (図 1b) にすると、 $z=z_0$ を含みません。そのとき、

領域 K に変更すると、 $f(z)$ は正則関数 (微分可能)

になります。正則関数 $f(z)$ にたいして、点 $z=w$ でのコーシーの積分公式が使える

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-w} dz \tag{13.5}$$

です。ここで、大きな経路 C 内の 2 つの経路 C_1, C_2 に対して **【12 複素積分：コーシーの積分公式】— I. 閉じた積分経路と円周**の(13.16)が成立し

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-w} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-w} dz + \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-w} dz \tag{13.6}$$

が成り立ちます。従って、(13.5)は

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-w} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-w} dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-w} dz \end{aligned} \tag{13.7}$$

この積分を計算します。

- $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-w} dz$ の計算： z は C_0 の円周上 (図 1c)

図 1c から分かるように $|z-z_0| > |w-z_0|$ なので、 $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| < 1$

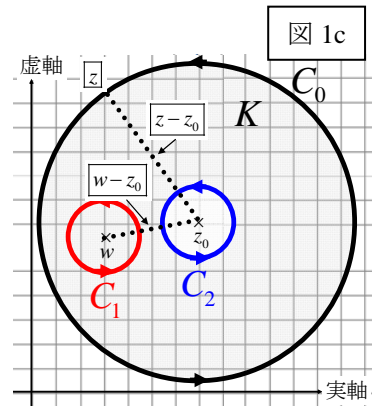
です。その結果、 $\frac{1}{z-w}$ は $\frac{w-z_0}{z-z_0}$ で展開できます。つまり、

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0+z_0-w} = \frac{1}{(z-z_0)\left(1+\frac{z_0-w}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{(z-z_0)\left(1-\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} \tag{13.8}$$

になるので、

【公式】

$$\begin{aligned} x: \text{実数} &\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \begin{cases} \infty \dots |x| > 1 \\ \text{有限} \dots |x| < 1 \end{cases} \\ z: \text{複素数} &\Rightarrow \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \begin{cases} \text{発散} \dots |z| > 1 \\ \text{有限} \dots |z| < 1 \end{cases} \end{aligned}$$



より、

$$\frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} = 1 + \frac{w-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^2 + \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \leftarrow \text{有限} \dots \frac{|w-z_0|}{|z-z_0|} < 1$$

を(13.8)に代入し

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-z_0) \left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \tag{13.9}$$

を用いて

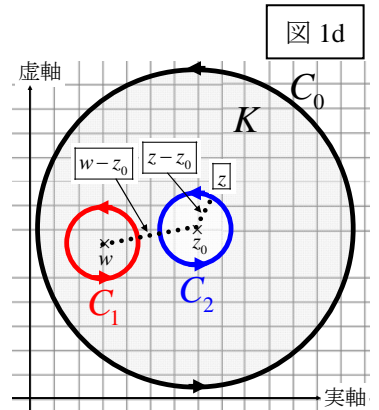
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-w} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \end{aligned} \tag{13.10}$$

と計算できました。

- $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-w} dz$ の計算： z は C_2 の円周上 (図 1d)

図 1d から分かるように $|z-z_0| < |w-z_0|$ なので、

$\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$ です。その結果、 $\frac{1}{z-w}$ は $\frac{z-z_0}{w-z_0}$ で展開できます。



つまり、

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0 + z_0-w} = \frac{1}{(z_0-w) \left(1 + \frac{z-z_0}{z_0-w}\right)} = - \frac{1}{(w-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} \tag{13.11}$$

になるので、前と同様に

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \leftarrow \text{有限} \dots \frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1 \tag{13.12}$$

を(13.8)に代入し

$$\frac{1}{z-w} = - \frac{1}{(w-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = - \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \tag{13.13}$$

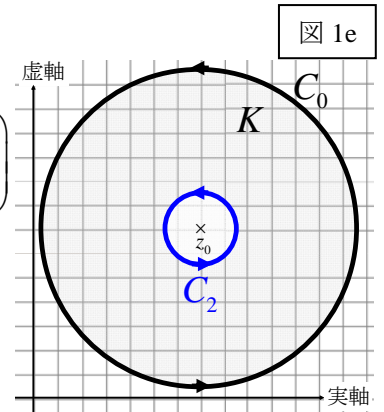
を用いて

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \left[- \frac{f(z)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \right] dz = - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(z)}{(w-z_0)^{n+1}} dz \tag{13.14}$$

と計算できました。

以上から、(13.10)とより

$$\begin{aligned}
 f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-w} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz - \left(-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(z)}{(w-z_0)^{n+1}} dz \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(z)}{(w-z_0)^{n+1}} dz
 \end{aligned}
 \tag{13.15}$$



になります。積分経路 C_0, C_2 は図 1e で与えられます。

(13.15)の結果で、積分 \oint と和記号 \sum の順序を入れ替えて、

$$\begin{aligned}
 f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^n f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n f(z)}{(w-z_0)^{n+1}} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\oint_{C_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right] (w-z_0)^n + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\oint_{C_2} (z-z_0)^n f(z) dz \right] (w-z_0)^{-n-1} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\oint_{C_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right] (w-z_0)^n + \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\oint_{C_2} (z-z_0)^{m-1} f(z) dz \right] (w-z_0)^{-m} \tag{13.16} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right] (w-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} (z-z_0)^{n-1} f(z) dz \right] (w-z_0)^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (w-z_0)^{-n}
 \end{aligned}$$

と表記すれば

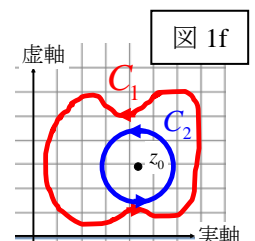
$$\begin{aligned}
 f(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (w-z_0)^{-n} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (n=0,1,2,3,\dots) \\ c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} (z-z_0)^{n-1} f(z) dz \quad (n=1,2,3,\dots) \end{cases} \tag{13.17}
 \end{aligned}$$

と級数展開ができます。ここで、【12 複素積分：コーシーの積分公式】－I. 閉じた積分経路と円周において、

- 円周 C_2 上の経路積分は任意の閉曲線 C_1 上の経路積分に置き直せる (図 1f)

ので、

- 円周 C_0 上の経路積分は、任意の閉曲線 C 上の経路積分に置き直せ



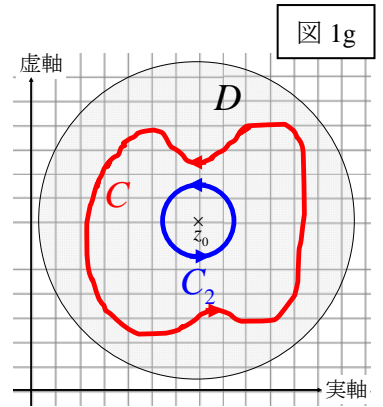
る (図 1g)

➤ 円周 C_2 上の経路積分も、任意の閉曲線 C 上の経路積分に置き直せる (図 1h)

こととなります。従って、(13.17)の係数 c_n, c_{-n} は

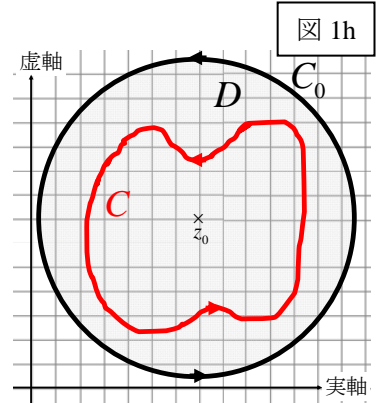
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (n=0,1,2,3,\dots)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} (z-z_0)^{n-1} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z-z_0)^{n-1} f(z) dz \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (13.18)$$



と同じ積分経路 C 上の線積分になります。更に、 c_{-n} は

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z-z_0)^{n-1} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (13.19)$$



なので、(13.18)は

$$\left. \begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (n=0,1,2,3,\dots) \\ c_{-n} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz \quad (n=1,2,3,\dots) \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (n=\dots-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots) \quad (13.20)$$

とまとめる事ができます。同様に、(13.17)も

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (w-z_0)^{-n}$$

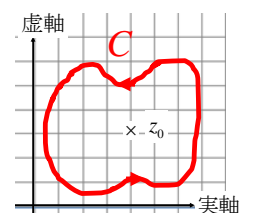
$$= \underbrace{c_0 (w-z_0)^0}_{n=0} + \underbrace{c_1 (w-z_0)^1}_{n=1} + \underbrace{c_2 (w-z_0)^2}_{n=2} + \underbrace{c_3 (w-z_0)^3}_{n=3} + \dots$$

$$+ \underbrace{c_{-1} (w-z_0)^{-1}}_{n=-1} + \underbrace{c_{-2} (w-z_0)^{-2}}_{n=-2} + \underbrace{c_{-3} (w-z_0)^{-3}}_{n=-3} + \dots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (w-z_0)^n \quad (13.21)$$

です。以上から、 w を z に置き換えて

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \Leftarrow c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (13.22)$$



が得られ、この級数展開を **ローラン展開** といひ

- 孤立特異点 $z = z_0$ の回りでの展開

になります。

II. 特異点の種類

特異点は、**ゼロでない線積分の結果**を与えるために重要な役割をします。特異点とは、

- 関数 $f(z)$ は $z = z_0$ で正則でないが、 z_0 のどんな近傍をとっても、その中の少なくとも 1 点で正則であるとき、 z_0 は $f(z)$ の **特異点** (∞ や $0/0$ になる点) であるという。特異点は複数あって良い。
- 関数 $f(z)$ が 1 つの点 z_0 を除いて正則であるとき、点 z_0 は関数の **孤立特異点** である。

です。特に、孤立特異点は、ローラン展開の項の種類により分類ができます。主に、**主要部 (負のべきの部分)** の形によって、次のタイプに分類されます：

- **主要部が無い場合** ($n=0$ から始まる) : **除去可能な特異点**

$f(z)$ は、 $z = z_0$ で正則でないが、それを置き換える $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ が存在するとき、 $z = z_0$

を除去可能な特異点という。ローラン展開は負のべきの項を持たない。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

【例】 $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の級数とするとき

$$f(z) = \frac{g(z) - a_0}{z} \Rightarrow f(0) = \frac{\overbrace{g(0) - a_0}^{a_0} - a_0}{0} = \frac{0}{0} = \text{不定}$$

$$f(z) = \frac{\cancel{a_0} + a_1 z + a_2 z^2 + \dots - \cancel{a_0}}{z} = \frac{a_1 z + a_2 z^2 + \dots}{z} = a_1 + a_2 z + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n \Rightarrow f(0) = a_1$$

$\Rightarrow f(0) = \text{不定}$ の代わりに $f(0) = a_1$ とすればよい

- **主要部が有限の場合** ($n = -k$ ($k > 0$) から始まる) : **k 位の極**

ローラン展開の主要部が k 個の項からなるとき、つまり、

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-k}^{-1} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \underbrace{\frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0}}_{\text{主要部}(k\text{個の項がある})} + c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

で与えられるとき、 $z = z_0$ を k 位の極という。そのとき、

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

である。

- **主要部が無限の場合** ($n = -\infty$ から始まる) **真性特異点**

「極」でも「除去可能な特異点」でもないとき、真性特異点という。ローラン展開の主要部は無数個の項を持つ。つまり

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \overbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}}^{\text{主要部}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \frac{c_{-\infty}}{(z-z_0)^{\infty}} + \dots$$

以上の 3 種類です。

特異点を持たない正則な関数の展開は、**テーラー展開**と呼ばれ、(13.22)より

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \leftarrow c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (13.23)$$

です。しかし、これは実数 x の場合のテーラー展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \left(f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right) \quad (13.24)$$

と違います。ここで、【12 複素積分：コーシーの積分公式】—II. コーシーの積分公式(13.32)の結果：

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \leftarrow \begin{cases} f(z) \text{ は正則関数} \\ \text{積分経路 } C \text{ は } z_0 \text{ を囲む} \end{cases} \quad (13.25)$$

を用いると、

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (13.26)$$

と計算できるので、テーラー展開は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \leftarrow f(z) \text{ は正則関数} \quad (13.27)$$

となり、実数の場合のテーラー展開(13.24)に一致します。

III. 特異点：0 と ∞

複素関数 $f(z)$ が、無限遠方 (∞) に特異点を持つ場合

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

は、どう取り扱うのでしょうか？無限遠方は

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

の関係があるので、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \infty$$

となります。つまり、

- $f\left(\frac{1}{z}\right)$ は $z=0$ に特異点のある複素関数

になります。このことから、例えば、

- $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は、**テーラー展開**

ですが、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

になります。一方

$$\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = \infty$$

です。そのとき、 $z=0$ に特異点があり

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \cdots + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{z} + 1 \text{ は、ローラン展開}$$

になります。