

# 1 2 複素積分：コーシーの積分公式

## I. 閉じた積分経路と円周

積分しなくても線積分の結果が分かる場合の第 2 弾です。それは、

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!} \left( f^{(n)}(z) = \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right) \leftarrow \begin{cases} f(z) \text{ は正則関数} \\ \text{積分経路 } C \text{ は } z_0 \text{ を囲む} \end{cases} \quad (12.1)$$

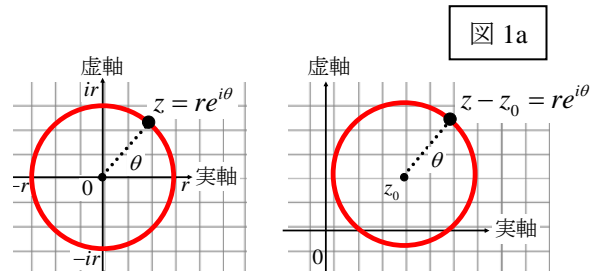
になります。これを、**コーシーの積分公式**といいます。

【1 1 複素積分：コーシーの積分定理】－ I. 線積分の実技 での線積分では、半径  $r$  の円周上の閉じた経路  $C$  で

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \quad (12.2)$$

が得られました。更に、 $z = z_0$  で発散する場合

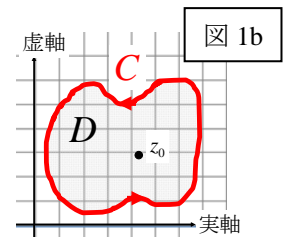
$$\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \leftarrow \text{円周上} \quad (12.3)$$



が成り立ちます。これは、図 1a のように、実軸と虚軸を違う場所を取る事、従って  $z - z_0 = re^{i\theta}$ 、

に対応します。図 1b のような任意の閉じた積分経路を用いても同じ積分値になり

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \leftarrow \text{一般の閉じた経路 } C \quad (12.4)$$



です。このとき、

- 領域  $D$  内に  $z = z_0$  が含まれているので、 $\frac{1}{z-z_0}$  は  $z = z_0$  で発散し  $(\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z-z_0} = \infty)$ 、

$$\text{微分不可能} \text{なので } \oint_C \frac{1}{z-z_0} dz \neq 0$$

になっています。

(12.4)を証明するため、コーシーの積分定理を使います。この場合、

- 被積分関数は**微分可能**

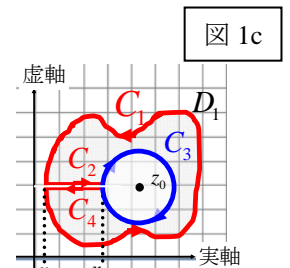
である必要があります。そのため、 $\frac{1}{z-z_0}$  が積分可能になるような**都合の良い領域**を指定しな

いといけません。  $z = z_0$  のみ微分不可能なので、

- 指定する領域は  $z = z_0$  を含まない領域

にします。線積分は円周上(12.3)と一般の経路(12.4)との関係なので、

- 円周と一般の経路を繋ぐ新たな積分経路



を作ります。それには、図 1c のように  $x$  軸に平行な直線で繋ぎます。すると、積分経路は  $C$  は

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \quad (12.5)$$

と分解されます。このとき、積分経路で囲まれた領域を  $D_1$  とすると、

- 領域  $D_1$  内に  $z = z_0$  が含まれていないので、 $\frac{1}{z - z_0}$  は**微分可能**で、コーシー・リーマンの積分定理により

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 0 \quad (12.6)$$

となります。線積分(12.4)は、(12.6)を用いると計算結果が 0 で、積分経路を(12.5)に従って

$$0 = \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_3} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_4} \frac{1}{z - z_0} dz \quad (12.7)$$

と分解できます。ここで、繋いだ直線上は、行きと帰りに通過するので、そこから積分への寄与は 0 になります。何故なら、 $x$  軸に平行な直線上の積分は通常の  $x$  積分になり

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{z - z_0} dx \\ \oint_{C_4} \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_{x_2}^{x_1} \frac{1}{z - z_0} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{z - z_0} dx \end{aligned} \quad (12.8)$$

なので、

$$\oint_{C_2} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_4} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{z - z_0} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{z - z_0} dx = 0 \quad (12.9)$$

となり、寄与は 0 なので、

$$\oint_{C_2} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_4} \frac{1}{z - z_0} dz = 0 \quad (12.10)$$

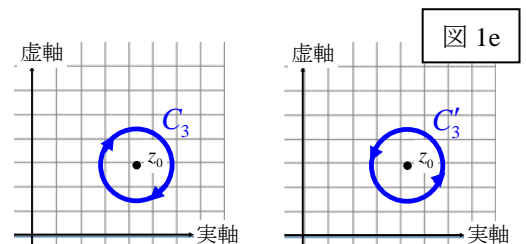
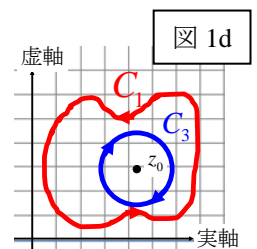
がわかります。従って、(12.7)は

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_3} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_4} \frac{1}{z - z_0} dz \\ &= \oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_3} \frac{1}{z - z_0} dz \end{aligned} \quad (12.11)$$

です。その結果、積分経路は図 1d の 2 つになり、

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0} dz = - \oint_{C_3} \frac{1}{z - z_0} dz \quad (12.12)$$

になります。また、図 1e のように、 $C_3$  に対して逆向きの



経路  $C'_3$  とすると、【1 1 複素積分：コーシーの積分定理】—II. コーシーの積分定理：B. 行

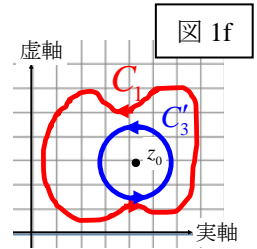
きと帰りの経路の(12.44)の積分の性質より

$$\oint_{C_3} \frac{1}{z-z_0} dz = -\oint_{C'_3} \frac{1}{z-z_0} dz \tag{12.13}$$

です。つまり、

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z-z_0} dz = -\oint_{C'_3} \frac{1}{z-z_0} dz = \oint_{C_3} \frac{1}{z-z_0} dz \tag{12.14}$$

になります。これより、図 1f のように、同じ向きに回る積分経路では



- $z = z_0$  を中心にする円周上の線積分は(12.3) :  $\oint_{C_3} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$
- $z = z_0$  を含む一般の積分経路の線積分 :  $\oint_{C_1} \frac{1}{z-z_0} dz = \oint_{C_3} \frac{1}{z-z_0} dz (= 2\pi i)$

ともに同じ積分結果を与える事が分かり、ます。従って、

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \leftarrow \text{一般の閉じた経路 } C_1 \tag{12.15}$$

になり、(12.4)が証明できました。

これは一般化することができて

- 正則関数  $f(z)$  の線積分 :  $\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$
- 大きな積分経路  $C$  の中に
  - 幾つかの色々な形の  $C$  と同じ方向の小さな積分経路がある場合、  
 $C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$  (12.16)

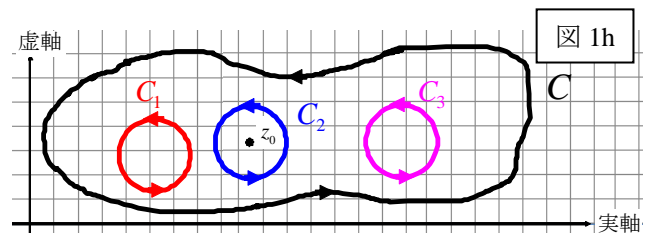
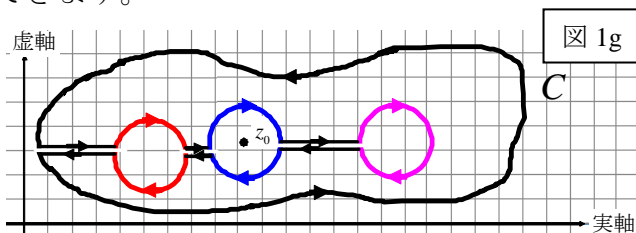
になり、それぞれ個別の積分経路に沿った線積分の和

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \oint_{C_3} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \dots \tag{12.17}$$

になる事がわかります。図 1g,1h では

- 3つの積分経路を含む
- 積分経路は円周

の場合が示してあります。証明は、「 $z = z_0$  を避けて行きと帰りに通過する」経路で結び (図 1g) 「コーシーの積分定理」を適用して、最後に円の積分経路の向き逆にすれば (図 1h) 証明できます。



この時、図 1h の積分経路に於いて

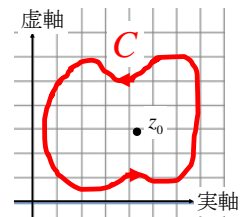
$$\begin{cases} C_1: \oint_{C_1} \frac{1}{z-z_0} dz = 0 \\ C_2: \oint_{C_2} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \\ C_3: \oint_{C_3} \frac{1}{z-z_0} dz = 0 \end{cases} \quad (12.18)$$

に注意しましょう（問題 1：何故、積分経路  $C_2$  のみ線積分の値があるか？）。

## II. コーシーの積分公式（簡略編）

まず、数学的厳密さを犠牲にしてコーシーの積分公式を導いてみます。使用する積分結果は、(12.4)の結果：

$$\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i \quad (12.19)$$



です。まず、 $z_0$  でテーラー展開できる複素関数を  $f(z)$  用いると、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \left( f^{(n)}(z) = \frac{d^n f(z)}{dz^n} \Rightarrow f^{(0)}(z) = f(z) \right) \quad (12.20)$$

と展開できるので、

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz & \stackrel{\text{テーラー展開}}{=} \oint_C \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n}{z-z_0} dz \stackrel{\text{積分と和の順序が交換可能}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_C \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \frac{(z-z_0)^n}{z-z_0} dz \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \oint_C (z-z_0)^{n-1} dz \\ & = f^{(0)}(z_0) \underbrace{\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz}_{=2\pi i} + \overbrace{f^{(1)}(z_0) \oint_C dz + \frac{f^{(2)}(z_0)}{2!} \oint_C (z-z_0) dz + \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!} \oint_C (z-z_0)^2 dz + \dots}_{=0} \end{aligned} \quad (12.21)$$

です。つまり

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f^{(0)}(z_0) = 2\pi i f(z_0) \quad (12.22)$$

になり、最終的に

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz \quad (12.23)$$

をコーシーの積分公式という。この方法では、 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} dz$  なども計算でき、

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} dz & \stackrel{\text{テーラー展開}}{=} \oint_C \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n}{(z-z_0)^4} dz \stackrel{\text{積分と和の}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_C \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^4} dz \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \oint_C (z-z_0)^{n-4} dz \\
& = \overbrace{f^{(0)}(z_0) \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^4} dz + f^{(1)}(z_0) \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^3} dz + \frac{f^{(2)}(z_0)}{2!} \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^2} dz}^{=0} \\
& \quad + \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!} \underbrace{\oint_C \frac{1}{z-z_0} dz}_{=2\pi i} \\
& \quad + \overbrace{\frac{f^{(4)}(z_0)}{4!} \oint_C dz + \frac{f^{(5)}(z_0)}{5!} \oint_C (z-z_0) dz + \frac{f^{(6)}(z_0)}{6!} \oint_C (z-z_0)^2 dz + \dots}^{=0}
\end{aligned} \tag{12.24}$$

なので、

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} dz = 2\pi i \frac{f^{(3)}(z_0)}{3!} \tag{12.25}$$

です。つまり

$$f^{(\boxed{3})}(z_0) = \frac{\boxed{3}!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{\boxed{4}}} dz \quad (\boxed{4} = \boxed{3} + 1) \tag{12.26}$$

より、従って、

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

と計算できます。

### Ⅲ. コーシーの積分公式（厳密編）

さて、厳密にコーシーの積分公式を導くのに、以下の予備知識を用います：

- ① コーシーの積分定理
- ②  $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i \leftarrow$  一般の閉じた経路  $C$
- ③  $f(z)$  は  $z_0$  の近傍**収束半径内**でベキ級数に展開可能 ((12.21): **テーラー展開できる**)
  - **収束半径内**で = 発散しないで級数になるという事
- ④ ベキ級数は項別に積分可能 ((12.21): **積分と和の順序が交換可能**)
- ⑤ ベキ級数は正則 = 微分可能である ((12.21): **テーラー展開できる**)

正則な関数  $f(z)$  に対して、①の性質：ベキ級数に展開可能より

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + a_3 (z - z_0)^3 + \dots \quad (12.27)$$

になります。このとき、

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 - z_0)^n = a_0 + \overbrace{a_1 (z_0 - z_0) + a_2 (z_0 - z_0)^2 + a_3 (z_0 - z_0)^3 + \dots}^{=0} \quad (12.28)$$

なので

$$a_0 = f(z_0) \quad (12.29)$$

です。両辺を、 $z - z_0$  で割ると

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{a_0}{z - z_0} + a_1 + a_2 (z - z_0) + a_3 (z - z_0)^2 + \dots \quad (12.30)$$

を得ます。そこで、図 1a のように半時計回りの閉じた積分経路  $C$  をとり

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \left[ \frac{a_0}{z - z_0} + a_1 + a_2 (z - z_0) + a_3 (z - z_0)^2 + \dots \right] dz \quad (12.31)$$

の線積分にします。④の性質：項別に積分可能より

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{a_0}{z - z_0} dz + \oint_C \left[ a_1 + a_2 (z - z_0) + a_3 (z - z_0)^2 + \dots \right] dz \quad (12.32)$$

に分けられます。①の性質：コーシーの積分定理と⑤の性質：べき級数は正則より

$$\oint_C \overbrace{\left[ a_1 + a_2 (z - z_0) + a_3 (z - z_0)^2 + \dots \right]}^{\text{正則関数}} dz = 0 \quad (12.33)$$

なので、(12.32)は

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \oint_C \frac{a_0}{z - z_0} dz + \oint_C \left[ a_1 + a_2 (z - z_0) + a_3 (z - z_0)^2 + \dots \right] dz \\ &= \oint_C \frac{a_0}{z - z_0} dz + 0 = \oint_C \frac{a_0}{z - z_0} dz \end{aligned} \quad (12.34)$$

です。従って、

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{a_0}{z - z_0} dz \quad (12.35)$$

が成り立ちます。②の性質を用いれば

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{a_0}{z - z_0} dz = a_0 \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i a_0 \quad (12.36)$$

なので、

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (12.37)$$

です。(12.29)より、

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i a_0 = 2\pi i f(z_0) \quad (12.38)$$

と計算できます。以上から、**コーシーの積分公式**

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz} \Leftarrow \begin{cases} f(z) \text{ は正則関数} \\ \text{積分経路 } C \text{ は } z_0 \text{ を囲む} \end{cases} \quad (12.39)$$

が導けました。

ここで、 $f(z_0)$  は正則関数で微分可能なので、 $z_0$  で微分でき

$$f'(z_0) = \frac{d}{dz_0} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{dz_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \quad (12.40)$$

になります。ここで、

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{(a-z)^n} = \frac{d}{dz} (a-z)^{-n} = -n(a-z)^{-n-1} (-1) = \frac{n}{(a-z)^{n+1}} \quad (12.41)$$

なので、

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{dz_0} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^2} f(z) dz \quad (12.42)$$

を得る。同様にして、

$$\begin{aligned} f''(z_0) &= \frac{d}{dz} f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{dz_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{2}{(z-z_0)^3} f(z) dz = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz \\ f'''(z_0) &= \frac{d}{dz} f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{2 \cdot 3}{(z-z_0)^4} f(z) dz = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} dz \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z_0) &= \frac{d^n}{dz^n} f(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \end{aligned} \quad (12.43)$$

がわかります。つまり、

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz} \Leftarrow \begin{cases} f(z) \text{ は正則関数} \\ \text{積分経路 } C \text{ は } z_0 \text{ を囲む} \end{cases} \quad (12.44)$$

と計算できます。もちろん、 $n=0$  の場合は、**コーシーの積分公式**(12.39)に帰着します。

次章では、ローラン展開といって、

- $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$  を新たな関数  $g(x)$  とみなし  $g(x)$  に対してコーシーの積分公式

を導く方法を学びます。つまり、(12.26)では

$$f^{(3)}(z_0) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_C \overbrace{\frac{f(z)}{(z-z_0)^{3+1}}}^{g(z)} dz = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n}^{g(z)}}{(z-z_0)^4} dz = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C g(z) dz \quad (12.45)$$

なので、新たな関数  $g(x)$  に対して

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \frac{1}{(z-z_0)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-4} \\ &= \overbrace{f^{(0)}(z_0)}^{c_{-4}} \frac{1}{(z-z_0)^4} + \overbrace{f^{(1)}(z_0)}^{c_{-3}} \frac{1}{(z-z_0)^3} + \overbrace{\frac{f^{(2)}(z_0)}{2!}}^{c_{-2}} \frac{1}{(z-z_0)^2} + \overbrace{\frac{f^{(3)}(z_0)}{3!}}^{c_{-1}} \frac{1}{z-z_0} \\ &\quad + \overbrace{\frac{f^{(4)}(z_0)}{4!}}^{c_0} + \overbrace{\frac{f^{(5)}(z_0)}{5!}}^{c_1} (z-z_0) + \overbrace{\frac{f^{(6)}(z_0)}{6!}}^{c_2} (z-z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=-4}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \Leftarrow c_n = \frac{f^{(n+4)}(z_0)}{(n+4)!} \end{aligned} \quad (12.46)$$

になります。つまり、

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} = \sum_{n=-4}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \Leftarrow c_n = \frac{f^{(n+4)}(z_0)}{(n+4)!} \quad (12.47)$$

です。  $c_n$  の計算方法を導けば(12.44)に対応した公式が得られます。ここで、(12.44)より、  $c_n$  は

$$c_n = \frac{f^{(n+4)}(z_0)}{(n+4)!} = \frac{1}{(n+4)!} \frac{(n+4)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+5}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+5}} dz \quad (12.48)$$

になり、更に、(12.47)より

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+5}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (12.49)$$

と計算できます。以上から、

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} = \sum_{n=-4}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \Leftarrow c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (12.50)$$

と展開できる事になります。これを

- 4位の極を持つ関数  $g(x)$  のローラン展開

と言います。一般化すれば、テーラー展開を知らなくても  $g(x)$  のローラン展開として、

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \Leftarrow \boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz} \quad (12.51)$$