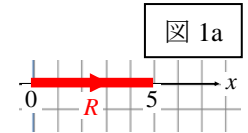


# 1 1 複素積分：コーシーの積分定理

変数  $x$  の  $[0,5]$  の定積分は、例えば、 $\int_0^5 f(x) dx$  ですが、

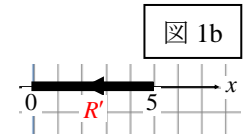
● 積分範囲を図と共に表す  
ことにして、

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_R f(x) dx \quad (\text{図1aの } R \text{ と共に}) \quad (11.1)$$



と表します。また、 $[5,0]$  の定積分は

$$\int_5^0 f(x) dx \left( = -\int_0^5 f(x) dx \right) = \int_{R'} f(x) dx \quad (\text{図1bの } R' \text{ と共に}) \quad (11.2)$$



となります。このように、

● 矢印の方向が違くと**積分値が逆**

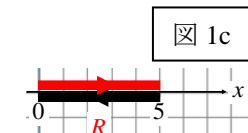
$$\triangleright \int_{R'} f(x) dx = -\int_R f(x) dx \quad (11.3)$$

になります。また、

● 図 1a と図 1b を一度に行うと、図 1c の様に積分範囲が  $[0,0]$  になり、**積分値は 0**

です。このとき、

● 行って戻ってくる積分範囲なので積分記号  $\oint$  で表す



約束です。従って、

$$\oint_R f(x) dx = 0 \quad (\text{図1cの } R \text{ と共に}) \quad (11.4)$$

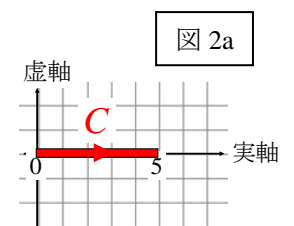
がわかります。

以上の性質は、複素平面に拡張する事ができ、積分範囲は  $[0,5]$  は図 2a の様に実軸上の範囲で表せます。この線を

●  $C$  ( $C$ ontour: 輪郭) と名付け

複素数での定積分は、

$$\int_C f(z) dz \quad (\text{図2aの } C \text{ と共に}) \quad (11.5)$$



と表す事になります。この方法では、

● **複素数での定積分**は、いろいろな  $C$  で積分範囲が決まることになります。従って、図 2b の様な一般の曲線  $C$  を用いて

$$\int_C f(z) dz \Leftarrow \begin{cases} f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \\ z = x + iy \end{cases} \quad (11.6)$$

と定義できます。また、積分経路が閉じている場合には、図 1c に対応して

- 複素平面上の閉じた積分経路  $C$  を図 2c で与えるとき、

$$\oint_C f(z) dz \Leftarrow \begin{cases} f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \\ z = x + iy \end{cases} \quad (11.7)$$

と表します。ここで、積分経路の回り方は、図 1a を拡張して

- **反時計回り**

になります。逆の場合（時計回り）の積分経路を  $C'$  とすると、(11.7) の線積分の値について、(11.3) を拡張した

$$\oint_{C'} f(z) dz = - \oint_C f(z) dz \quad (11.8)$$

の性質があります。これは(11.3)の積分結果を拡張した

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx \quad (11.9)$$

の性質と同じです (図 2d)。この閉じた積分経路上での線

積分の値が**計算しなくても分かる場合**があり、(11.4)の  $\oint_R f(x) dx = 0$  に対応して

$$\oint_C f(z) dz = 0 \Leftarrow f(z) \text{ は正則関数 (微分可能関数)} \quad (11.10)$$

です。これを**コーシーの積分定理**と言います。

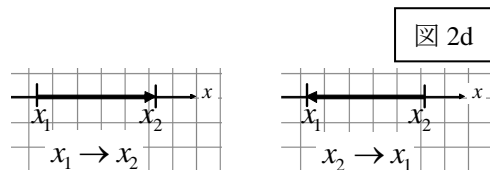
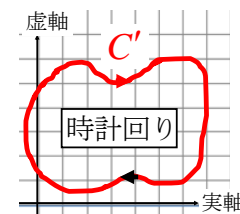
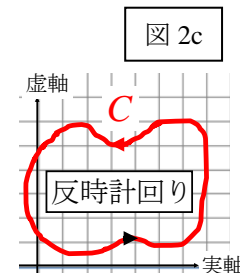
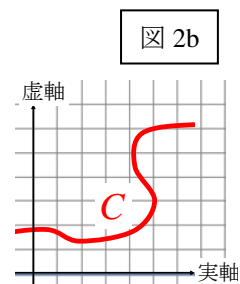
## II. 線積分の実技

複素数の線積分の例として、**閉じた積分経路**の積分を円周上で実行します。複素関数として 3 種類の関数を考えます：

$$\oint_C f(z) dz \Leftarrow \begin{cases} f(z) = z \\ f(z) = \frac{1}{z} \\ f(z) = \frac{1}{z^n} \quad (n \geq 2) \end{cases} \quad (11.11)$$

です。積分経路  $C$  は、図 2e のように、一定の半径  $r$  の**反時計回り**の円周です。半径が  $r$  の円周上の点  $z$  は

$$|z| = r = \text{一定} \quad (11.12)$$



を満たすすべての点になります。線積分は、この条件の元での積分になり

$$\oint_C f(z) dz \leftarrow |z|=r \tag{11.13}$$

です。

条件(11.13)を取り入れやすい様に  $z$  に制限を加えます。円周上を移動する点は、【08 複素数とは何か？複素平面】-II. 複素数と極座標の(9.27)より、 $z$  が図 2f の様に角度  $\theta$  を持つとき  $z=|z|e^{i\theta}$  となります。従って、(11.12)より

$$z = re^{i\theta} \tag{11.14}$$

と表せ、すべての点に対して、円周上を

$$\theta = 0 \rightarrow \theta = 2\pi \tag{11.15}$$

と移動します。(11.14)より、 $dz$  は

$$dz = d(re^{i\theta}) \tag{11.16}$$

ですが、

$$\text{【公式】 } d(AB) = (dA)B + AdB \tag{11.17}$$

より、ここで、

$$r = \text{一定} \Rightarrow dr = 0 \tag{11.18}$$

なので

$$dz = d(re^{i\theta}) = (dr)e^{i\theta} + rde^{i\theta} \stackrel{r=\text{一定} \rightarrow dr=0}{=} rde^{i\theta} \tag{11.19}$$

となります。次に  $de^{i\theta}$  は

$$de^{i\theta} = de^{i\theta} \times 1 = de^{i\theta} \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{de^{i\theta}}{d\theta} d\theta \tag{11.20}$$

なので、

$$\text{【公式】 } \frac{de^{a\theta}}{d\theta} = ae^{a\theta} \tag{11.21}$$

より

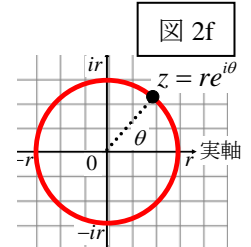
$$\frac{de^{i\theta}}{d\theta} = ie^{i\theta} \tag{11.22}$$

を用いて、

$$de^{i\theta} = \frac{de^{i\theta}}{d\theta} d\theta = ie^{i\theta} d\theta \tag{11.23}$$

となります。以上から

$$dz = ire^{i\theta} d\theta \tag{11.24}$$



を得ます

$$f(z) = z$$

線積分は

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C z dz \quad (11.25)$$

です。(11.14)と(11.24)を代入して

$$\oint_C z dz = \int_0^{2\pi} r e^{i\theta} (i r e^{i\theta} d\theta) = i r^2 \int_0^{2\pi} e^{i\theta} e^{i\theta} d\theta = i r^2 \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta \quad (11.26)$$

と計算できます。積分は

$$\text{【公式】} \int_{\alpha}^{\beta} e^{a\theta} d\theta = \left[ \frac{1}{a} e^{a\theta} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{e^{a\beta} - e^{a\alpha}}{a} \quad (11.27)$$

を用いて、

$$\int_0^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta = \frac{e^{2i(2\pi)} - e^{2i0}}{2i} = \frac{e^{4i\pi} - e^0}{2i} \quad (11.28)$$

なので、

$$\text{【公式】} e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (11.29)$$

より

$$\int_0^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta = \frac{e^{4i\pi} - e^0}{2i} = \frac{\overbrace{\cos 4\pi}^1 + i \overbrace{\sin 4\pi}^0 - \left( \overbrace{\cos 0}^1 + i \overbrace{\sin 0}^0 \right)}{2i} = \frac{1-1}{2i} = 0 \quad (11.30)$$

を得ます。以上から、

$$\oint_C z dz = i r^2 \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta = i r^2 \cdot 0 = 0 \quad (11.31)$$

従って

$$\boxed{\oint_C z dz = 0} \quad (11.32)$$

と計算できます。

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

線積分は

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{1}{z} dz \quad (11.33)$$

です。(11.14)と(11.24)を代入して

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} (i r e^{i\theta} d\theta) = i \int_0^{2\pi} d\theta = i[\theta]_0^{2\pi} = i(2\pi - 0) = 2\pi i \quad (11.34)$$

と計算できます。従って

$$\boxed{\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i} \quad (11.35)$$

と計算できます。

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \quad (n \geq 2)$$

線積分は

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{1}{z^n} dz \quad (n \geq 2) \quad (11.36)$$

です。(11.14)と(11.24)を代入して

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z^n} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(re^{i\theta})^n} (ire^{i\theta} d\theta) = i \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}}{(re^{i\theta})^n} d\theta = ir^{n-1} \int_0^{2\pi} e^{i\theta - in\theta} d\theta = ir^{n-1} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta \\ &\Leftarrow \int_{x_1}^{x_2} e^{ax} = \left[ \frac{e^{ax}}{a} \right]_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \quad (11.37)$$

$$= ir^{n-1} \left[ \frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)} \right]_0^{2\pi} = \frac{r^{n-1}}{1-n} \left[ e^{i(1-n)\theta} \right]_0^{2\pi} \Leftarrow \begin{cases} n \geq 2 \text{ なので} \\ 1-n \neq 0 \end{cases}$$

より

$$\oint_C \frac{1}{z^n} dz = \frac{r^{n-1}}{1-n} \left[ e^{i(1-n)\theta} \right]_0^{2\pi} = \frac{r^{n-1}}{1-n} (e^{i(1-n)2\pi} - e^{i(1-n)0}) = \frac{r^{n-1}}{1-n} \left( e^{i(1-n)2\pi} - e^0 \right) = \frac{r^{n-1}}{1-n} (e^{i(1-n)2\pi} - 1) \quad (11.38)$$

です。ここで、

$$e^{i(1-n)\theta} = \cos(1-n)\theta + i \sin(1-n)\theta \Rightarrow e^{i(1-n)2\pi} = \overbrace{\cos(1-n)2\pi}^1 + i \overbrace{\sin(1-n)2\pi}^0 = 1 \quad (11.39)$$

なので

$$\oint_C \frac{1}{z^n} dz = \frac{r^{n-1}}{1-n} (e^{i(1-n)2\pi} - 1) = \frac{r^{n-1}}{1-n} \left( \overbrace{e^{i(1-n)2\pi}}^1 - 1 \right) = 0$$

より

$$\boxed{\oint_C \frac{1}{z^n} dz = 0 \quad (n \geq 2)} \quad (11.40)$$

と計算できます。

以上から、円周上の線積分は

$$\oint_C f(z) dz = \begin{cases} 0 \cdots f(z) = z \\ 2\pi i \cdots f(z) = \frac{1}{z} \\ 0 \cdots f(z) = \frac{1}{z^n} \quad (n \geq 2) \end{cases} \quad (11.41)$$

という 3 つの結果を得ました。この結果は、一般の閉じた経路での複素積分に拡張でき

- **コーシーの積分定理**： $\oint_C f(z) dz = 0 \rightarrow$ 次の節へ
- **コーシーの積分公式**： $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \rightarrow$ 次の章へ

と呼ばれています。コーシーの積分公式を用いれば、 $\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$  は、

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \Rightarrow \begin{cases} f(z) = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{0}{z_0}\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{\frac{0}{z - z_0}} dz \\ &\Rightarrow \overbrace{f(0)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{\frac{0}{z - z_0}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z} dz \\ &\Rightarrow 1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z} dz \Rightarrow \boxed{\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i} \end{aligned} \quad (11.42)$$

として、答えが得られます。

### Ⅲ. コーシーの積分定理

線積分  $\oint_C f(z) dz$  の答えが決まっている場合があります。それは

- $f(z)$  が正則関数 (決められた領域  $D$  で微分可能) の時

$$\triangleright \boxed{\oint_C f(z) dz = 0} \leftarrow C \text{ は図 3a の積分経路} \quad (11.43)$$

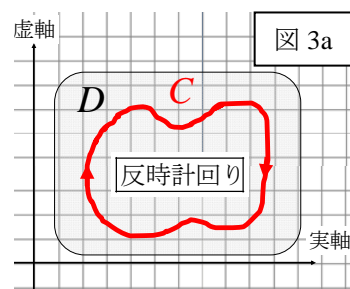
です。(11.43) を **コーシーの積分定理** といいます。(11.32) の  $\oint_C z dz = 0$  がこの例になります。

#### A. グリーンの定理を用いて

$f(z)$  と  $z$  を 2 つの実数で表し

$$\odot z = x + iy \Rightarrow dz = dx + idy \quad \odot f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (11.44)$$

を用いて、 $f(z) dz$  を書き換えると



$$\begin{aligned}
 f(z)dz &= (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy) = u(x,y)(dx + idy) + iv(x,y)(dx + idy) \\
 &= u(x,y)dx + iv(x,y)idy + u(x,y)idy + iv(x,y)dx \\
 &= u(x,y)dx - v(x,y)dy + iu(x,y)dy + iv(x,y)dx \\
 &= [u(x,y) + iv(x,y)]dx + [-v(x,y) + iu(x,y)]dy
 \end{aligned} \tag{11.45}$$

なので

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C [u(x,y) + iv(x,y)]dx + [-v(x,y) + iu(x,y)]dy \tag{11.46}$$

と計算できます。(11.46)は、【07 ストークスの定理：線積分と面積分】－I. グリーンの定理の(8.32)：

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dx dy \tag{11.47}$$

を使うことができる。(11.46)に於いて

$$\begin{aligned}
 \oint_C f(z)dz &= \oint_C \left[ \overbrace{u(x,y) + iv(x,y)}^{P(x,y)} dx + \overbrace{[-v(x,y) + iu(x,y)]}^{Q(x,y)} dy \right] \\
 &= \iint_D \left( \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} [-v(x,y) + iu(x,y)] - \frac{\partial}{\partial y} [u(x,y) + iv(x,y)] \right) dx dy \\
 &= \iint_D \left( -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right) dx dy
 \end{aligned} \tag{11.48}$$

となります。ここで、

- $f(z)$  が正則関数 (微分可能関数)

であると、【10 複素微分：コーシー・リーマンの方程式】－I. コーシー・リーマンの方程式：実関数と正則性の (11.8)：

- コーシー・リーマンの方程式

$$\triangleright \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \tag{11.49}$$

が使えます。(11.48)で、 $x$  微分を  $y$  微分に置き換えると、

$$\begin{aligned}
 \oint_C f(z)dz &= \iint_D \left( -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right) dx dy \\
 &= \iint_D \left( -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \left( -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right) dx dy \\
 &= \iint_D \left( \cancel{-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}} + i\cancel{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} - i\cancel{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}} \right) dx dy = 0
 \end{aligned} \tag{11.50}$$

と計算できます。従って、コーシーの積分定理

$$\oint_C f(z) dz = 0 \iff f(z) \text{は正則関数} \tag{11.51}$$

が示せました。

別の見方をすると、これは困った事で、

● (有る領域で) 正則 (微分可能) な複素関数の線積分の答えはいつもゼロ  
 になってしまいます。ゼロでない結果を出す線積分は

● 微分不可能な複素関数が大事

➤ (11.42)の  $\oint_C f(z) dz = 2\pi i \iff f(z) = \frac{1}{z}$  は、 $f(0) = \infty$  で  $z=0$  で微分不可能

です。微分不可能複素関数は【1 4 複素積分：ローラン展開と留数定理】で詳しく調べます。

### B. 行きと帰りの積分経路

「コーシーの積分定理」によるとある領域  $D$  で複素関数が正則であるとき、領域  $D$  内の閉じた積分経路  $C$  上で線積分すると 0 になりました。この積分経路を 2 つに区切ってみます、

図 3b のように、 $C$  上の  $z = z_1$  と  $z = z_2$  で区切り、2 つの  $C_1, C_2$  :

$$\begin{cases} z_1 \rightarrow z_2 : C_1 \\ z_2 \rightarrow z_1 : C_2 \end{cases} \tag{11.52}$$

とします。線積分(11.51)は

$$0 = \oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz \tag{11.53}$$

なので、

$$\oint_{C_2} f(z) dz = -\oint_{C_1} f(z) dz \tag{11.54}$$

がわかります。(11.52)の対応から、(11.54)を模式的に示すと

$$\int_{z_2}^{z_1} f(z) dz = -\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz \tag{11.55}$$

となり、馴染みの深い微分の性質になっています。ここで、図 3c のように、

● 積分経路  $C_3$  を  $C_2$  と逆方向の積分経路

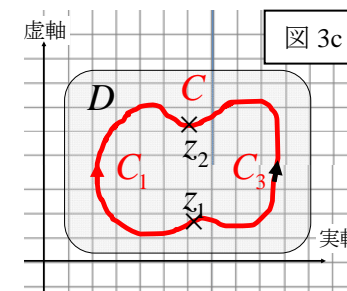
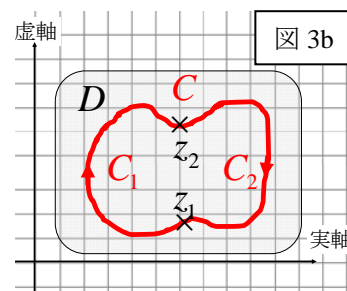
$$\begin{cases} z_2 \rightarrow z_1 : C_2 \\ z_1 \rightarrow z_2 : C_3 \end{cases} \tag{11.56}$$

とすれば、

$$\oint_{C_2} f(z) dz = -\oint_{C_3} f(z) dz \tag{11.57}$$

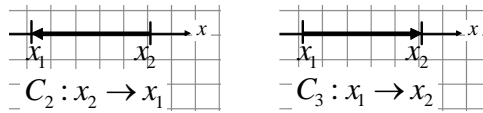
なので、

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_3} f(z) dz \tag{11.58}$$





です。【復習】 $x$  軸積分では、領域は図の様になり



$$\left. \begin{aligned} \oint_{C_2} f(x) dx &= \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx \\ \oint_{C_3} f(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \Rightarrow \oint_{C_2} f(x) dx = - \oint_{C_3} f(x) dx$$

より(11.57)が明らかである。

つまり、「積分経路に依らずに線積分は同じ値になる」事が分かります。以上から

- $f(z)$  が **正則関数** (微分可能複素関数) なら、

➤ **積分経路に依らず**に線積分は同じ値になる

という重要な性質がわかりました。

### C.微分可能領域の取り方

(11.33)の線積分は、

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \Leftarrow f(z) = \frac{1}{z} \tag{11.59}$$

でした。もし、コーシーの積分定理が満たされれば、

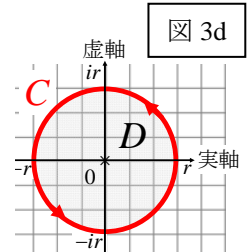
$$\oint_C f(z) dz = 0 \tag{11.60}$$

になります。何が違うのでしょうか？コーシーの積分定理の条件には、

- **決められた領域  $D$  で微分可能**

という補足がありました。ここで、ある領域  $D$  とは、図 3d のように

- 円周で囲まれた領域



になります。この領域内には、 $z=0$  の点が含まれていて、その点で  $\frac{1}{z}$  は発散します。つまり、

$$\frac{1}{z} = \infty \text{ at } z = 0 \tag{11.61}$$

です。従って、

- $z=0$  で微分不可能

です。以上から、

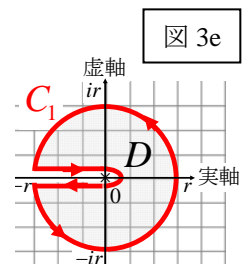
$$\oint_C \frac{1}{z} dz \neq 0 \tag{11.62}$$

とわかります。

逆に  $\frac{1}{z}$  が「コーシー・リーマンの積分定理」をみたすには、

- 領域  $D$  が  $z=0$  を含まない事

を満たせばよいはずですが。たとえば、図 3e のように、 $z=0$  を含まないよう



な領域を  $D$  とって、新たな積分経路  $C_1$  を指定すれば

$$\oint_{C_1} \frac{1}{z} dz = 0$$

(11.63)

になるわけです。