

10 複素微分：コーシー・リーマンの方程式

【9 複素微分：正則関数】で、正則性は複素数 z の関数 $f(z)$ の性質として導き出しました。複素数 z は 2 つの実数 x, y で表され $z = x + iy$ です。同様に、複素関数 $f(z)$ も 2 つの実関数 $u(x, y), v(x, y)$ で表され $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表せます。つまり、

- **複素数** z と **2 つの実数** x, y :
 - $z = x + iy$
- 複素数 z の **複素関数** $f(z)$ と 2 つの実数 x, y の **2 つの実関数** $u(x, y), v(x, y)$:
 - $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

と同じ様な関係が成り立ちます。複素関数 $f(z)$ で導いた正則条件を実関数 $u(x, y), v(x, y)$ の条件として表してみます。

I. コーシー・リーマンの方程式：実関数と正則性

必要条件

まず、

- $f(z)$ が $u(x, y) + iv(x, y)$ の形で書かれているとき、正則関数である $f(z)$ では $u(x, y), v(x, y)$ にはどんな条件が必要か？

という問題の答えを探すこととなります。出発点として、

- $f(z)$ は正則である

が成り立ちます。そのときは $f'(z)$ が計算できて

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (10.1)$$

です。ここで、

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \Delta z = \Delta x + i\Delta y \\ f(z) = u(x, y) + v(x, y) \end{cases} \quad (10.2)$$

と置き換えられるので、

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y} \quad (10.3)$$

になります。

極限值があるので、計算結果は $\Delta z \rightarrow 0$ になる方向によりません。どの方向で計算しても同じ答えになります。従って、計算が簡単になる方向を選べます。

- 実軸に平行に $\Delta z \rightarrow 0$ になる場合 ($\Delta y = 0$: 図 1a)

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x}$$

より

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{i[v(x+\Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x} = i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

を用いて

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (10.4)$$

を得る。

- 虚軸に平行に $\Delta z \rightarrow 0$ になる場合 ($\Delta x = 0$: 図 1b)

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y) - [u(x, y) + iv(x, y)]}{i\Delta y}$$

より

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} = \frac{\partial u(x, y)}{i\partial y} \stackrel{i \times i = -1}{\Rightarrow} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{i[v(x, y+\Delta y) - v(x, y)]}{i\Delta y} = i \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$$

を用いて

$$f'(z) = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad (10.5)$$

を得る。

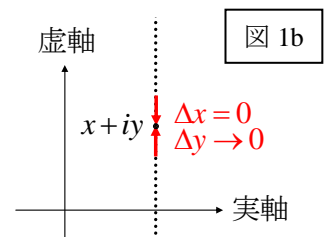
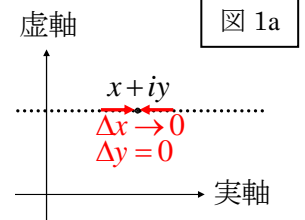
計算結果は方向に依らず同じ値なので、(10.4)と(10.5)は同じ値 $f'(z)$ になり

$$f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad (10.6)$$

が成立します。従って、実部と虚部が等しいので、

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad (10.7)$$

より



$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{aligned}} \quad (10.8)$$

がわかります。これを、**コーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の方程式**といいます。このとき

$$\boxed{f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}} \quad (10.9)$$

もわかります。 $f(z)$ が微分可能 (**正則関数**) であることを示しています。

十分条件

出発点は

- $u(x, y), v(x, y)$ が1次微分可能である
- $u(x, y), v(x, y)$ はコーシー・リーマンの方程式を満たす

です。そのとき、

- $u(x, y) + iv(x, y)$ は $z (= x + iy)$ のみの関数で、且つ、正則関数 (微分可能) である

一般に、 $u(x, y) + iv(x, y)$ は x, y の関数なので z, z^* の関数になり z のみの関数ではない。例として

$$\begin{cases} u(x, y) = x + 2y \\ v(x, y) = 2x + y \end{cases} \Rightarrow u(x, y) + iv(x, y) = x + 2y + i(2x + y) = x + iy + 2y + i2x = x + iy + \overset{i^2 = -1}{2y + i2x}$$

$$= \overbrace{x + iy}^z + 2i \overbrace{(x - iy)}^{z^*} = \boxed{z} + 2i \boxed{z^*}$$

ことが導かれるか? という問題になります。答えとしては、(10.9)が成り立つ事。つまり

$$w = u(x, y) + iv(x, y) \quad (10.10)$$

とするとき、 w の微分が

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (10.11)$$

になり、**微分可能である**ことを示せばよい訳です。

複素数 w を

$$w = u(x, y) + iv(x, y) \quad (10.12)$$

と表し、複素数の微小差を Δw とすると、 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ を計算すると、

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad (10.13)$$

で微分が計算できます。 Δw は

$$w + \Delta w = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) \tag{10.14}$$

で与えられるので

$$\Delta w = w + \Delta w - w = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - [u(x, y) + iv(x, y)] \tag{10.15}$$

となります。この Δw を用いると $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ が計算できます。

Δw を計算すればよいのですが、 Δw の実部 (**Real part** : リアルパート) と虚部 (**Imarginary part** : イメージナリィーパート) に分けて計算すると楽になります。そのため、

$$\begin{aligned} \Delta w &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - [u(x, y) + iv(x, y)] \\ &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)] \end{aligned} \tag{10.16}$$

とすると

$$\begin{aligned} \text{Re}(\Delta w) &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \\ \text{Im}(\Delta w) &= v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) \end{aligned} \tag{10.17}$$

になります。まず、 $\text{Re}(\Delta w)$ は $-u(x, y + \Delta y) + u(x, y + \Delta y) = 0$ を加えて

$$\begin{aligned} \text{Re}(\Delta w) &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) \overbrace{-u(x, y + \Delta y) + u(x, y + \Delta y)}^{=0} - u(x, y) \\ &= \overbrace{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y)}^{\text{平均値の定理}} + \overbrace{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}^{\text{平均値の定理}} \end{aligned} \tag{10.18}$$

と変形します。ここで、「平均値の定理」を使います。

【平均値の定理】

図 1c において、直線 l に平行な接線がひけ、 x と $x + \Delta x$ の間の値で表せる。この間の値は $x + t\Delta x$ ($0 < t < 1$) で表せ

$$x \xleftarrow{t=0} x + t\Delta x \xrightarrow{t=1} x + \Delta x$$

となります。従って、接線の傾きは $f'(x + t\Delta x)$ と表す事ができます。図 1d から、

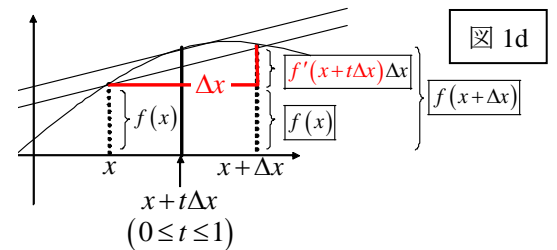
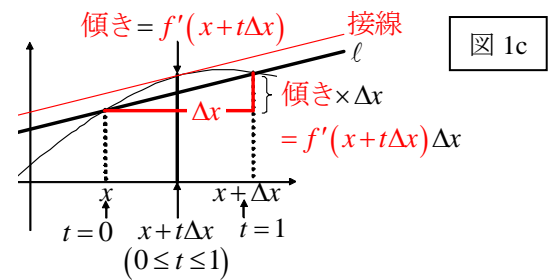
$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x + t\Delta x)\Delta x$$

なので、**平均値の定理**

$$f'(x + t\Delta x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (0 < t < 1)$$

を得ます。

平均値の定理を使いますが x と y の 2 変数なので**偏微分**になり、 $f'(x)$ の代わりに、



$$\boxed{\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ u_y(x, y) &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{aligned}} \quad (10.19)$$

という省略記号を用いています。そのとき、平均値の定理は

$$\begin{aligned} u_x(x+t_x\Delta x, y+\Delta y) &= \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \quad (0 < t_x < 1) \\ u_y(x, y+t_y\Delta y) &= \frac{u(x, y+\Delta y)-u(x, y)}{\Delta y} \quad (0 < t_y < 1) \end{aligned} \quad (10.20)$$

となります。これを、(10.18)に代入して

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\Delta w) &= u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y+\Delta y)+u(x, y+\Delta y)-u(x, y) \\ &= u_x(x+t_x\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+u_y(x, y+t_y\Delta y)\Delta y \quad (0 < t_x, t_y < 1) \end{aligned} \quad (10.21)$$

を得ます。従って、

$$\operatorname{Re}(\Delta w) = u_x(x+t_x\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+u_y(x, y+t_y\Delta y)\Delta y \quad (0 < t_x, t_y < 1) \quad (10.22)$$

になります。全く同様にして、(10.17)の $\operatorname{Im}(\Delta w)$ は

$$\operatorname{Im}(\Delta w) = v_x(x+s_x\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+v_y(x, y+s_y\Delta y)\Delta y \quad (0 < s_x, s_y < 1) \quad (10.23)$$

になります。以上から、 $\Delta w = \operatorname{Re}(\Delta w) + i \operatorname{Im}(\Delta w)$ は、

$$\begin{aligned} \Delta w &= \operatorname{Re}(\Delta w) + i \operatorname{Im}(\Delta w) \\ &= u_x(x+t_x\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+u_y(x, y+t_y\Delta y)\Delta y + i \left[v_x(x+s_x\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+v_y(x, y+s_y\Delta y)\Delta y \right] \end{aligned} \quad (10.24)$$

です。ここで、 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ をとり、

$$\begin{aligned} \Delta x &\rightarrow dx \\ \Delta y &\rightarrow dy \\ \Delta w &\rightarrow dw \end{aligned} \quad (10.25)$$

にすると

$$\begin{aligned} dw &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \Delta w \\ &= \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left(\begin{aligned} &u_x(x+t_x\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+u_y(x, y+t_y\Delta y)\Delta y \\ &+ i \left[v_x(x+s_x\Delta x, y+\Delta y)\Delta x+v_y(x, y+s_y\Delta y)\Delta y \right] \end{aligned} \right) \\ &= u_x(x, y)dx+u_y(x, y)dy + i \left[v_x(x, y)dx+v_y(x, y)dy \right] \end{aligned} \quad (10.26)$$

になります。「 $u(x, y), v(x, y)$ はコーシー・リーマンの方程式を満たす」ので

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y) \\ v_x(x, y) = -u_y(x, y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_y(x, y) = u_x(x, y) \\ u_y(x, y) = -v_x(x, y) \end{cases} \quad (10.27)$$

を用いて、 u_y, v_y を u_x, v_x に置き換えることができ

$$\begin{aligned} dw &= u_x(x, y)dx + u_y(x, y)dy + i[v_x(x, y)dx + v_y(x, y)dy] \\ &= u_x(x, y)dx + [-v_x(x, y)]dy + i[v_x(x, y)dx + u_x(x, y)dy] \\ &= u_x(x, y)dx - v_x(x, y)dy + iv_x(x, y)dx + iu_x(x, y)dy \\ &= u_x(x, y)dx - \overbrace{(-ii)}^1 v_x(x, y)dy + iv_x(x, y)dx + iu_x(x, y)dy \\ &= u_x(x, y)dx + iiv_x(x, y)dy + iv_x(x, y)dx + iu_x(x, y)dy \\ &= u_x(x, y)\overbrace{(dx + idy)}^{dz} + iv_x(x, y)\overbrace{(dx + idy)}^{dz} \\ &= u_x(x, y)dz + iv_x(x, y)dz = [u_x(x, y) + iv_x(x, y)]dz \end{aligned} \quad (10.28)$$

なので、

$$dw = [u_x(x, y) + iv_x(x, y)]dz \quad (10.29)$$

と計算できます。両辺を dz で割り

$$\frac{dw}{dz} = u_x(x, y) + iv_x(x, y) \quad (10.30)$$

が求められます。省略形 $u_x(x, y), v_x(x, y)$ を(10.19)で戻して

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (10.31)$$

が導かれます。これが求める式(10.11)になっています。 $w = u(x, y) + iv(x, y)$ なので

- $u(x, y) + iv(x, y)$ は正則関数 (z だけで表され、微分可能)

であることが分かりました。

以上から、 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ において

- $f(z)$ が正則関数であると
 - コーシー・リーマンの方程式 $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ を満たす
- コーシー・リーマンの方程式 $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ を満たすと

➤ $u(x, y) + iv(x, y)$ は、 $z(x + iy)$ のみの関数で正則関数になる

が証明できました。

II. 例

【10 複素微分 : 正則関数】で扱った 2 つの例、 $f(z) = z^2$ と $f(z) = zz^* = |z|^2$ をコーシー・リーマンの方程式を用いて、微分可能かどうかを調べます。結果は【10 複素微分 : 正則関数】で分かっています

- $f(z) = z^2$ は正則関数である (微分可能である)
- $f(z) = zz^* = |z|^2$ は正則関数ではない (微分可能ではない)

でした。

$$f(z) = z^2$$

まず、2 つの実関数 $u(x, y), v(x, y)$ は、

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2xiy + (iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = u(x, y) + iv(x, y) \quad (10.32)$$

より、実部と虚部を比較して

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases}$$

を得ます。コーシー・リーマンの方程式は

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} = \boxed{2x} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x \frac{\partial y}{\partial y} = \boxed{2x} \end{cases} \Rightarrow \text{満たす} \quad (10.33)$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(2xy)}{\partial x} = 2y \frac{\partial x}{\partial x} = \boxed{2y} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} = -\frac{\partial y^2}{\partial y} = \boxed{-2y} \end{cases} \Rightarrow \text{満たす}$$

となり、両方満たされるので、 $f(z) = z^2$ は

- コーシー・リーマンの方程式を満たすので
 - 微分可能

とわかります。

$$f(z) = zz^* (= |z|^2)$$

同様に、2 つの実関数 $u(x, y), v(x, y)$ は、

$$f(z) = zz^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 - xiy + iyx + (iy)(-iy) = x^2 + y^2 = u(x, y) + iv(x, y) \quad (10.34)$$

より、実部と虚部を比較して

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 + y^2 \\ v(x, y) = 0 \end{cases}$$

を得ます。コーシー・リーマンの方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} = \boxed{2x} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(0)}{\partial y} = \boxed{0} \end{cases} \Rightarrow \text{満たさない} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(0)}{\partial x} = \boxed{0} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = \frac{\partial y^2}{\partial y} = \boxed{2y} \end{cases} \Rightarrow \text{満たさない} \end{aligned} \quad (10.35)$$

となり、両方満たさないので、 $f(z) = zz^* (=|z|^2)$ は

- コーシー・リーマンの方程式を満たさないので
 - **微分不可能**

とわかります。