

第二章 ボルツマン方程式

CPTやS行列のユニタリティの性質を使って、粒子・反粒子の反応過程の関係を調べる。そのとき、スピン0の場合を例にとると、使用する性質は、

空間反転 (P変換)

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_p a(\mathbf{p}) \mathcal{U}_p^{-1} &= a(-\mathbf{p}), \quad \mathcal{U}_p a^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{U}_p = a^\dagger(-\mathbf{p}) \\ \mathcal{U}_p b(\mathbf{p}) \mathcal{U}_p^{-1} &= b(-\mathbf{p}), \quad \mathcal{U}_p b^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{U}_p^{-1} = b^\dagger(-\mathbf{p})\end{aligned}$$

時間反転 (T変換)

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_T a(\mathbf{p}) \mathcal{U}_T^{-1} &= \eta_T a^\dagger(\mathbf{p}) \\ \mathcal{U}_T b(\mathbf{p}) \mathcal{U}_T^{-1} &= \eta_T^* b^\dagger(\mathbf{p}) \Leftrightarrow |\eta_T|^2 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{【注意】 } \mathcal{U}_T \text{Amp}(t = \infty \rightarrow t = -\infty) \mathcal{U}_T^{-1} &\sim \mathcal{U}_T b^\dagger(\mathbf{q}') a^\dagger(\mathbf{p}') b(\mathbf{q}) a(\mathbf{p}) \mathcal{U}_T^{-1} \\ &= \left(\mathcal{U}_T a(\mathbf{p}) \mathcal{U}_T^{-1} \right) \left(\mathcal{U}_T b(\mathbf{q}) \mathcal{U}_T^{-1} \right) \left(\mathcal{U}_T a^\dagger(\mathbf{p}') \mathcal{U}_T^{-1} \right) \left(\mathcal{U}_T b^\dagger(\mathbf{q}') \mathcal{U}_T^{-1} \right)\end{aligned}$$

順序を逆に

粒子・反粒子反転 (C変換)

$$\begin{aligned}a^C(\mathbf{p}) &= \mathcal{U}_C a(\mathbf{p}) \mathcal{U}_C^\dagger, \quad b^{C\dagger}(\mathbf{p}) = \mathcal{U}_C b^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{U}_C^\dagger \\ a^{C\dagger}(\mathbf{p}) &= \mathcal{U}_C a^\dagger(\mathbf{p}) \mathcal{U}_C^\dagger, \quad b^C(\mathbf{p}) = \mathcal{U}_C b(\mathbf{p}) \mathcal{U}_C^\dagger \Leftrightarrow |\eta_C|^2 = 1\end{aligned}$$

である。

第1節 CPT・CP・ユニタリティ

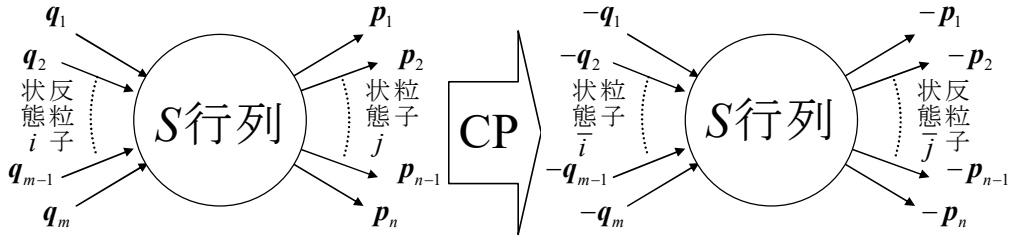
1) 空間&粒子・反粒子反転 (CP変換) に対して不変であると・・・(簡単のため「反粒子が入って粒子が出て行く」場合—実際にはありえない相互作用であるが—を考えてみよう)

$$\begin{aligned}|i\rangle &= b_1^\dagger(\mathbf{q}_1) \cdots b_m^\dagger(\mathbf{q}_m) |0\rangle, \quad \langle j| = \langle 0| a_1(\mathbf{p}_1) \cdots a_n(\mathbf{p}_n) \\ \Rightarrow \mathcal{M}(i \rightarrow j) &\equiv \langle j| S |i\rangle = \langle 0| a_1(\mathbf{p}_1) \cdots a_n(\mathbf{p}_n) S b_1^\dagger(\mathbf{q}_1) \cdots b_m^\dagger(\mathbf{q}_m) |0\rangle \\ \Rightarrow \langle j| \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} \mathcal{U}_C \mathcal{U}_P S \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} \mathcal{U}_C \mathcal{U}_P |i\rangle \\ &= \langle 0| a_1(\mathbf{p}_1) \cdots a_n(\mathbf{p}_n) \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} \mathcal{U}_C \mathcal{U}_P S \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} \mathcal{U}_C \mathcal{U}_P b_1^\dagger(\mathbf{q}_1) \cdots b_m^\dagger(\mathbf{q}_m) |0\rangle \\ &= \langle 0| \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} \mathcal{U}_C \mathcal{U}_P a_1(\mathbf{p}_1) \cdots a_n(\mathbf{p}_n) \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} \left(\mathcal{U}_C \mathcal{U}_P S \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} \right) \mathcal{U}_C \mathcal{U}_P b_1^\dagger(\mathbf{q}_1) \cdots b_m^\dagger(\mathbf{q}_m) \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} \mathcal{U}_C \mathcal{U}_P |0\rangle \\ &\Leftrightarrow \text{CP不変} : |0\rangle = \mathcal{U}_C \mathcal{U}_P |0\rangle, \quad \mathcal{U}_C \mathcal{U}_P \mathcal{M} \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} = \mathcal{M} \\ &= \langle 0| \mathcal{U}_C \mathcal{U}_P a_1(\mathbf{p}_1) \cdots a_n(\mathbf{p}_n) \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} S \mathcal{U}_C \mathcal{U}_P b_1^\dagger(\mathbf{q}_1) \cdots b_m^\dagger(\mathbf{q}_m) \mathcal{U}_P^{-1} \mathcal{U}_C^{-1} |0\rangle \\ &\Leftrightarrow \mathcal{U}_P a(\mathbf{p}) \mathcal{U}_P^{-1} = a(-\mathbf{p}), \quad \mathcal{U}_P b^\dagger(\mathbf{q}) \mathcal{U}_P^{-1} = b^\dagger(-\mathbf{q}) \\ &= \langle 0| \mathcal{U}_C a_1(-\mathbf{p}_1) \cdots a_n(-\mathbf{p}_n) \mathcal{U}_C^{-1} S \mathcal{U}_C b_1^\dagger(-\mathbf{q}_1) \cdots b_m^\dagger(-\mathbf{q}_m) \mathcal{U}_C^{-1} |0\rangle \\ &\Leftrightarrow \mathcal{U}_C a(\mathbf{p}) \mathcal{U}_C^\dagger = a^C(\mathbf{p}), \quad \mathcal{U}_C b^\dagger(\mathbf{q}) \mathcal{U}_C^\dagger = b^{C\dagger}(\mathbf{q}) \\ &= \langle 0| a_1^C(-\mathbf{p}_1) \cdots a_n^C(-\mathbf{p}_n) S b_1^{C\dagger}(-\mathbf{q}_1) \cdots b_m^{C\dagger}(-\mathbf{q}_m) |0\rangle \\ &\Leftrightarrow |\bar{i}\rangle = b_1^{C\dagger}(-\mathbf{q}_1) \cdots b_m^{C\dagger}(-\mathbf{q}_m) |0\rangle, \quad \langle \bar{j}| = \langle 0| a_1^C(-\mathbf{p}_1) \cdots a_n^C(-\mathbf{p}_n) \\ &= \langle \bar{j}| S |\bar{i}\rangle = \mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})\end{aligned}$$

従って、

$$\boxed{\text{CP不変} : \langle j|S|i\rangle = \langle \bar{j}|S|\bar{i}\rangle}$$

図示すれば、



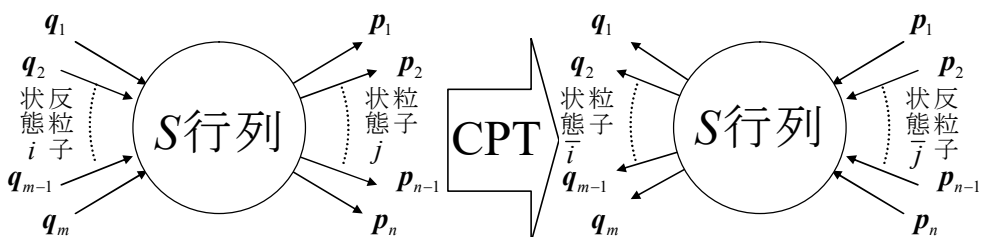
である。

2) 空間&粒子・反粒子反転&時間反転 (CPT変換) に対して不変であると・・・
 簡単のため「反粒子が入って粒子が出て行く」場合を考えてみよう：

$$\begin{aligned} |i\rangle &= b_1^\dagger(q_1)\cdots b_m^\dagger(q_m)|0\rangle, \quad \langle j| = \langle 0|a_1(p_1)\cdots a_n(p_n) \\ \Rightarrow \mathcal{M}(i \rightarrow j) &\equiv \langle j|S|i\rangle = \langle 0|a_1(p_1)\cdots a_n(p_n)Sb_1^\dagger(q_1)\cdots b_m^\dagger(q_m)|0\rangle \\ \Rightarrow \langle j|\mathcal{U}_P^{-1}\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_T^{-1}\mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P S\mathcal{U}_P^{-1}\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_T^{-1}\mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P|i\rangle \\ &= \langle 0|a_1(p_1)\cdots a_n(p_n)\mathcal{U}_P^{-1}\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_T^{-1}\mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P S\mathcal{U}_P^{-1}\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_T^{-1}\mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P b_1^\dagger(q_1)\cdots b_m^\dagger(q_m)|0\rangle \\ &= (\langle 0|\mathcal{U}_P^{-1}\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_T^{-1})\mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P a_1(p_1)\cdots a_n(p_n)\mathcal{U}_P^{-1}\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_T^{-1} \\ &\quad (\mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P S\mathcal{U}_P^{-1}\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_T^{-1})\mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P b_1^\dagger(q_1)\cdots b_m^\dagger(q_m)\mathcal{U}_P^{-1}\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_T^{-1}(\mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P|0\rangle) \\ &\Leftarrow \text{CPT不変} : |0\rangle = \mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P|0\rangle, \quad \mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P S\mathcal{U}_P^{-1}\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_T^{-1} = S \\ &= \langle 0|\mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P a_1(p_1)\cdots a_n(p_n)\mathcal{U}_P^{-1}\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_T^{-1} S\mathcal{U}_T\mathcal{U}_C\mathcal{U}_P b_1^\dagger(q_1)\cdots b_m^\dagger(q_m)\mathcal{U}_P^{-1}\mathcal{U}_C^{-1}\mathcal{U}_T^{-1}|0\rangle \\ &= \langle 0|\mathcal{U}_T a_1^C(-p_1)\cdots a_n^C(-p_n)\mathcal{U}_T^{-1} S\mathcal{U}_T b_1^{C\dagger}(-q_1)\cdots b_m^{C\dagger}(-q_m)\mathcal{U}_T^{-1}|0\rangle \\ &\Leftarrow \mathcal{U}_T a^C(p)\mathcal{U}_T^{-1} = \eta_T a^{C\dagger}(p), \quad \mathcal{U}_T b^{C\dagger}(q)\mathcal{U}_T^{-1} \equiv \eta_T b^C(-q) \leftarrow \mathcal{U}_T b(p)\mathcal{U}_T^{-1} = \eta_T^* b^\dagger(p) \\ &\Leftarrow \mathcal{U}_T \text{Amp}(t = \infty \rightarrow t = -\infty)\mathcal{U}_T^{-1} \sim \mathcal{U}_T b^\dagger(q')a^\dagger(p')b(q)a(p)\mathcal{U}_T^{-1} \\ &\quad \overset{\text{順序を逆に}}{=} (\mathcal{U}_T a(p)\mathcal{U}_T^{-1})(\mathcal{U}_T b(q)\mathcal{U}_T^{-1})(\mathcal{U}_T a^\dagger(p')\mathcal{U}_T^{-1})(\mathcal{U}_T b^\dagger(q')\mathcal{U}_T^{-1}) \\ &= \langle 0|\eta_T b_m^C(-q_m)\cdots \eta_T b_1^C(-q_1)S\eta_T a_n^{C\dagger}(-p_n)\cdots \eta_T a_1^{C\dagger}(-p_1)|0\rangle \\ &\Leftarrow |\bar{j}\rangle = a_n^{C\dagger}(-p_n)\cdots a_1^{C\dagger}(-p_1)|0\rangle, \quad \langle \bar{i}| = \langle 0|\eta_T b_m^C(-q_m)\cdots \eta_T b_1^C(-q_1) \\ &= \langle \bar{i}|S|\bar{j}\rangle = \mathcal{M}(\bar{j} \rightarrow \bar{i}) \end{aligned}$$

従って、

$$\boxed{\text{CPT不変} : \langle j|S|i\rangle = \langle \bar{i}|S|\bar{j}\rangle}$$



3) S行列のユニタリティから・・・

$$S^\dagger S = S S^\dagger = I$$

より¹

$$\langle j | S^\dagger S | j \rangle = \langle j | S S^\dagger | j \rangle = \langle j | j \rangle = 1$$

なので、すべての可能な状態は、

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = I$$

を満たすので、

$$\begin{aligned} \sum_i \langle j | S^\dagger | i \rangle \langle i | S | j \rangle &= \sum_i \mathcal{M}^*(i \rightarrow j) \mathcal{M}(i \rightarrow j) = \sum_i |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 \\ \sum_i \langle j | S | i \rangle \langle i | S^\dagger | j \rangle &= \sum_i \langle i | S^\dagger | j \rangle \langle j | S | i \rangle = \sum_i \mathcal{M}^*(j \rightarrow i) \mathcal{M}(j \rightarrow i) = \sum_i |\mathcal{M}(j \rightarrow i)|^2 \end{aligned}$$

より、

$$\boxed{\sum_i |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = \sum_i |\mathcal{M}(j \rightarrow i)|^2 \text{ (ユニタリテイ)}}$$

また、CPT不変であれば、

$$\sum_i |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = \sum_i |\mathcal{M}(\bar{j} \rightarrow \bar{i})|^2, \quad \sum_i |\mathcal{M}(j \rightarrow i)|^2 = \sum_i |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})|^2$$

になる。従って、CPT不変+ユニタリテイから

$$\boxed{\sum_i |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = \sum_i |\mathcal{M}(j \rightarrow i)|^2 = \sum_i |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})|^2 = \sum_i |\mathcal{M}(\bar{j} \rightarrow \bar{i})|^2 \text{ (CPT不変+ユニタリテイ)}}$$

ここで、CP不変であると、 $\mathcal{M}(i \rightarrow j) = \mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})$ のように個々の反応の間関係が成り立つ。また、CPT不変であると $\mathcal{M}(i \rightarrow j) = \mathcal{M}(\bar{j} \rightarrow \bar{i})$ が成立しているので、CPT&CP不変であると、

$$\boxed{\mathcal{M}(i \rightarrow j) \stackrel{\text{CP}}{=} \mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j}) \stackrel{\text{CPT}}{=} \mathcal{M}(j \rightarrow i) \stackrel{\text{CP}}{=} \mathcal{M}(\bar{j} \rightarrow \bar{i})}$$

が成り立ち、もちろん、「CPT不変+ユニタリテイ」の条件は自動的に満たされる。

CPT&CP不変であれば、粒子とその反粒子の反応の度合いは同じである

ことが保証される。CPが保存しなければ、逆に、粒子とその反粒子の反応の度合いは異なり、

粒子・反粒子非対称が生成

されるので、粒子が優位の世界が現れる原因になるかもしれない。

ところで、最初に同じ数の粒子と反粒子があるときには、「CPT不変+ユニタリテイ」から、粒子と反粒子の反応が同じなので、たとえCP保存が破れていても、粒子・反粒子非対称はおこらない。また、もし、最初に粒子・反粒子非対称が実現されていても、

ボルツマンのH定理

により、平衡過程の結果、「CPT不変+ユニタリテイ」からその非対称は消されてしまい、粒子・反粒子非対称はおこらない。

第2節 ボルツマンのH定理

¹ 幾つかの粒子が区別つかない同種粒子であるときには量子統計による補正がつく。

ボルツマンの H 関数は、分布関数を f_α するとき、

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha} = \text{全粒子数}$$

であり、

$$H = \sum_{\alpha} f_{\alpha} (\ln f_{\alpha} - 1)$$

で与えられる。

(*) 運動量分布の場合には、

$$H = \sum_i \int dp_i f_i(p_i) (\ln f_i(p_i) - 1)$$

であり、粒子の生成・消滅が無ければ、

$$H = \sum_{\alpha} f_{\alpha} (\ln f_{\alpha} - 1) = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \ln f_{\alpha} - \sum_{\alpha} f_{\alpha} \overset{\text{定数 等価}}{\Rightarrow} H = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \ln f_{\alpha}$$

で、通常の H の定義に一致する。

ボルツマンの H 定理とは、

ボルツマン方程式に従う閉じた系では、時間発展と共にボルツマンの H 関数が最小値（最大のエントロピー）をとる平衡状態に移行する

ことを示す定理である。さて、

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} f_{\alpha} (\ln f_{\alpha} - 1) = \sum_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} (\ln f_{\alpha} - 1) + \sum_{\alpha} f_{\alpha} \frac{1}{f_{\alpha}} \frac{df_{\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} \ln f_{\alpha}$$

なので、

$$\boxed{\frac{df_{\alpha}}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{定数} \Rightarrow H \text{の保存}}$$

がわかる。「ボルツマン方程式」の定義より

$$\frac{df_{\alpha_1}}{dt} = \sum_{\substack{\alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \cdots \beta_n}} \left\{ f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_n} \left| \mathcal{M}(\beta_1 \cdots \beta_n \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_m) \right|^2 - f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_m} \left| \mathcal{M}(\alpha_1 \cdots \alpha_m \rightarrow \beta_1 \cdots \beta_n) \right|^2 \right\}$$

α_1 の生成 α_1 の消滅

である。従って、

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} \ln f_{\alpha} = \sum_{\alpha_1} \sum_{\substack{\alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \cdots \beta_n}} \left\{ f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_n} \left| \mathcal{M}(\beta_1 \cdots \beta_n \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_m) \right|^2 - f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_m} \left| \mathcal{M}(\alpha_1 \cdots \alpha_m \rightarrow \beta_1 \cdots \beta_n) \right|^2 \right\} \ln f_{\alpha_1} \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \cdots \beta_n}} \left\{ f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_n} \left| \mathcal{M}(\beta_1 \cdots \beta_n \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_m) \right|^2 - f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_m} \left| \mathcal{M}(\alpha_1 \cdots \alpha_m \rightarrow \beta_1 \cdots \beta_n) \right|^2 \right\} \ln f_{\alpha_1} \\ &\Leftarrow \mathcal{M}(\beta_1 \cdots \beta_n \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_m) = \mathcal{M}(\beta_1 \cdots \beta_n \rightarrow \alpha_k \cdots \alpha_1 \cdots \alpha_m) \\ &\Leftarrow f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_n} \left| \mathcal{M}(\beta_1 \cdots \beta_n \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_m) \right|^2 \ln f_{\alpha_1} = f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_n} \left| \mathcal{M}(\beta_1 \cdots \beta_n \rightarrow \alpha_k \cdots \alpha_1 \cdots \alpha_m) \right|^2 \ln f_{\alpha_k} \\ &= \overset{\text{名前の付替: } k \rightarrow 1, 1 \rightarrow k}{=} f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_n} \left| \mathcal{M}(\beta_1 \cdots \beta_n \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_k \cdots \alpha_m) \right|^2 \ln f_{\alpha_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} \sum_{\substack{\alpha_1 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \cdots \beta_n}} \left\{ f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_n} |\mathcal{M}(\beta_1 \cdots \beta_n \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_m)|^2 - f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_m} |\mathcal{M}(\alpha_1 \cdots \alpha_m \rightarrow \beta_1 \cdots \beta_n)|^2 \right\} (\ln f_{\alpha_1} + \cdots + \ln f_{\alpha_m}) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{\substack{\alpha_1 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \cdots \beta_n}} \left\{ f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_n} |\mathcal{M}(\beta_1 \cdots \beta_n \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_m)|^2 - f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_m} |\mathcal{M}(\alpha_1 \cdots \alpha_m \rightarrow \beta_1 \cdots \beta_n)|^2 \right\} \ln(f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_m}) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ F_\beta |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 - F_\alpha |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \right\} \ln F_\alpha
\end{aligned}$$

表記法の節約のため幾つかの f の項を F で表している:

$$\begin{aligned}
F_\alpha &= f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_m}, \quad F_\beta = f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_n} \\
\alpha &= \{\alpha_1 \cdots \alpha_m\}, \quad \beta = \{\beta_1 \cdots \beta_n\}
\end{aligned}$$

以上から、

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ F_\beta |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 - F_\alpha |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \right\} \ln F_\alpha$$

がわかった。一方、ユニタリー条件は、

$$\sum_{\beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 = \sum_{\beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2$$

なので、

$$\sum_{\beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 F_\alpha = \sum_{\beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 F_\alpha \Rightarrow \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 F_\alpha - \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 F_\alpha = 0$$

が成立する。そこで、この0を適当に加えれば

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{1}{m} \left[\sum_{\alpha, \beta} \left\{ F_\beta |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 - F_\alpha |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \right\} \ln F_\alpha + |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 F_\alpha - |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 F_\alpha \right] \\
&= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 (F_\beta \ln F_\alpha - F_\alpha) - |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 (F_\alpha \ln F_\alpha - F_\alpha) \right\}
\end{aligned}$$

さらに、第2項に $\{\alpha\}$ と $\{\beta\}$ に対して可能なすべての入れ替えを実行し、

$$\sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 (F_\alpha \ln F_\alpha - F_\alpha) \stackrel{\substack{\text{すべての可能な入れ替え:} \\ \{\alpha_1 \cdots \alpha_m\} \leftrightarrow \{\beta_1 \cdots \beta_n\} \text{を施す}}}{=} \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 (F_\beta \ln F_\beta - F_\beta)$$

を得るので、

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 (F_\beta \ln F_\alpha - F_\alpha) - |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 (F_\alpha \ln F_\alpha - F_\alpha) \right\} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 (F_\beta \ln F_\alpha - F_\alpha) - |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 (F_\beta \ln F_\beta - F_\beta) \right\} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 (F_\beta \ln F_\alpha - F_\beta \ln F_\beta + F_\beta - F_\alpha) = \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 (F_\beta (\ln F_\alpha - \ln F_\beta) + F_\beta - F_\alpha) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 \left(F_\beta \ln \frac{F_\alpha}{F_\beta} + F_\beta - F_\alpha \right)
\end{aligned}$$

になる。ここで、

$$F_\beta \ln \frac{F_\alpha}{F_\beta} + F_\beta - F_\alpha = \int_{F_\beta}^{F_\alpha} \ln \frac{x}{F_\alpha} dx \quad (F_\alpha \geq F_\beta), \quad \int_{F_\alpha}^{F_\beta} \ln \frac{F_\alpha}{x} dx \quad (F_\alpha < F_\beta)$$

に注意すれば、この積分は積分領域で \ln 関数が 0 か負であることがわかるので、

$$F_\beta \ln \frac{F_\alpha}{F_\beta} + F_\beta - F_\alpha \leq 0 \quad (\text{等号は } F_\alpha = F_\beta \text{ の時})$$

である。従って、

$$\boxed{\frac{dH}{dt} \leq 0}$$

である。この性質より、

- H は非平衡状態で減少関数
- H は平衡状態で一定になる

ことが知られている。

平衡状態で一定になるとき、

$$\begin{aligned} F_\alpha = F_\beta &= f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_m} \\ &= f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_n} \end{aligned}$$

である。平衡状態では、量子数保存があるとき、その量子数を λ_α とすると

$$f_\alpha = e^{-(E_\alpha - \lambda_\alpha \mu)/T}$$

なので、 $F_\alpha = F_\beta$ は

$$\sum_{i=1}^m E_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n E_{\beta_i}, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_{\beta_i}$$

で成立する。つまり、

エネルギー保存則と量子数保存が成立するとき、平衡状態

にあることがわかる。粒子（・反粒子）数保存がないときには、平衡状態での位相空間での分布関数 f_α は同じである。従って、 H 定理により平衡状態に移行するので、分布関数（粒子密度）は粒子・反粒子で同じ、つまり

粒子・反粒子数は同じ

粒子・反粒子の非対称性はあられない。

第3節 ボルツマンのH定理（量子統計）

粒子が同一の場合には、分布関数 f_α が量子統計に従う。「ボルツマン方程式」は変更を受け、統計による量子重みが付け加わる。

$$\frac{df_{\alpha_1}}{dt} = \sum_{\substack{\alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \cdots \beta_n}} \left\{ \begin{array}{l} f_{\beta_1} \cdots f_{\beta_n} (1 + \theta_{\alpha_1} f_{\alpha_1}) \cdots (1 + \theta_{\alpha_m} f_{\alpha_m}) \left| \mathcal{M}(\beta_1 \cdots \beta_n \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_m) \right|^2 \\ \alpha_1 \text{の生成} \\ - f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_m} (1 + \theta_{\beta_1} f_{\beta_1}) \cdots (1 + \theta_{\beta_n} f_{\beta_n}) \left| \mathcal{M}(\alpha_1 \cdots \alpha_m \rightarrow \beta_1 \cdots \beta_n) \right|^2 \\ \alpha_1 \text{の消滅} \end{array} \right\} \left(\begin{array}{l} \theta_{\alpha} = +1 \text{ for a boson} \\ \theta_{\alpha} = -1 \text{ for a fermion} \end{array} \right)$$

である。また、ボルツマンの H 関数は

$$H = \sum_{\alpha} \{ f_{\alpha} (\ln f_{\alpha} - 1) - \theta_{\alpha} (1 + \theta_{\alpha} f_{\alpha}) (\ln(1 + \theta_{\alpha} f_{\alpha}) - 1) \}$$

表記法の節約のため

$$\begin{aligned} s_{\alpha} &= 1 + \theta_{\alpha} f_{\alpha} \\ (1 + \theta_{\alpha_1} f_{\alpha_1}) \cdots (1 + \theta_{\alpha_m} f_{\alpha_m}) &= s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_m} = S_{\alpha} \\ (1 + \theta_{\beta_1} f_{\beta_1}) \cdots (1 + \theta_{\beta_n} f_{\beta_n}) &= s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_n} = S_{\beta} \end{aligned}$$

や

$$\Theta_{\alpha} = \theta_{\alpha_1} \cdots \theta_{\alpha_m}$$

とすると、

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha} \{ f_{\alpha} (\ln f_{\alpha} - 1) - \theta_{\alpha} s_{\alpha} (\ln s_{\alpha} - 1) \} \\ \frac{df_{\alpha_1}}{dt} &= \sum_{\substack{\alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \cdots \beta_n}} \left\{ F_{\beta} S_{\alpha} \left| \mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha) \right|^2 - F_{\alpha} S_{\beta} \left| \mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta) \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

である。

df_{α_1}/dt では、生成される粒子がフェルミ粒子の場合に $1-f_{\alpha}$ を与える。これはパウリの排他律を表し、すでに同じ粒子の状態があるとき ($f_{\alpha}=1$) には、そこへの遷移が禁止される ($1-f_{\alpha}=0$) 状況を反映している。一方、ボーズ粒子の場合は、 $1+f_{\alpha}$ を与える。この $+f_{\alpha}$ が量子統計からの余分の項を与える。 f_{α} は粒子数 N に対応するので、この余分の項を $+N$ の因子として見ることができる。これは同種粒子による重複の組み合わせの数の結果になっている。 N 個の相互作用をしていない同種のボーズ粒子から構成される初期状態を $|N\rangle$ とすると、

$$|N\rangle = \frac{(\hat{a}^{\dagger})^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} |N_{\text{区別}}\rangle \left(|N_{\text{区別}}\rangle = \hat{a}^{\dagger} \hat{a}^{\dagger} \cdots |0\rangle \right)$$

N 個の粒子の割り当て方は $N!$ であり、すべて区別できない同じ状態である。すでに同じ粒子の状態があるときの様子をみるため、遷移中途に余分のボゾンが生成されたとする。終状態は $N+1$ 個のボゾンからなる。この状態を $|N+1\rangle$ とすると、

$$|N+1\rangle = \frac{(\hat{a}^{\dagger})^{N+1}}{\sqrt{(N+1)!}} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} |N+1_{\text{区別}}\rangle$$

で与えられる。そのとき、遷移確率は

$$\langle N+1|S|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \frac{1}{\sqrt{N!}} (N+1)! \langle N+1_{\text{区別}}|S|N_{\text{区別}}\rangle$$

ここで、ボゾン N 個の始状態からボゾン $N+1$ 個の終状態に行く場合の数は $(N+1)!$ であることを使っている。従って、遷移確率は、

$$\left| \langle N_f|S|N_i\rangle \right|^2 = \frac{(N+1)!(N+1)!}{(N+1)!N!} \left| \langle N+1_{\text{区別}}|S|N_{\text{区別}}\rangle \right|^2 = (N+1) \left| \langle N+1_{\text{区別}}|S|N_{\text{区別}}\rangle \right|^2$$

になり、粒子の区別のある場合の遷移確率 $\left| \langle N+1_{\text{区別}}|S|N_{\text{区別}}\rangle \right|^2$ に比べて $N+1$ の増大効果が現れている。これが、 $1+f_\alpha$ 対応する因子であると考えることができる。

さて、

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} \left\{ f_{\alpha} (\ln f_{\alpha} - 1) - \theta_{\alpha} (1 + \theta_{\alpha} f_{\alpha}) (\ln(1 + \theta_{\alpha} f_{\alpha}) - 1) \right\} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} \ln f_{\alpha} - \sum_{\alpha} \left\{ \theta_{\alpha} \left(\theta_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} \right) (\ln(1 + \theta_{\alpha} f_{\alpha}) - 1) + \theta_{\alpha} (1 + \theta_{\alpha} f_{\alpha}) \frac{1}{1 + \theta_{\alpha} f_{\alpha}} \theta_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} \right\} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} \ln f_{\alpha} - \sum_{\alpha} \left\{ \frac{df_{\alpha}}{dt} (\ln(1 + \theta_{\alpha} f_{\alpha}) - 1) + \frac{df_{\alpha}}{dt} \right\} = \sum_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} \ln f_{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} \ln(1 + \theta_{\alpha} f_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} \ln \frac{f_{\alpha}}{1 + \theta_{\alpha} f_{\alpha}} = \sum_{\alpha} \frac{df_{\alpha}}{dt} \ln \frac{f_{\alpha}}{s_{\alpha}} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{\alpha_1} \frac{df_{\alpha_1}}{dt} \ln \frac{f_{\alpha_1}}{s_{\alpha_1}} = \sum_{\alpha_1} \sum_{\substack{\alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \cdots \beta_n}} \left\{ F_{\beta} S_{\alpha} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 - F_{\alpha} S_{\beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \right\} \ln \frac{f_{\alpha_1}}{s_{\alpha_1}} \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \left\{ F_{\beta} S_{\alpha} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 - F_{\alpha} S_{\beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \right\} \ln \frac{f_{\alpha_1}}{s_{\alpha_1}} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ F_{\beta} S_{\alpha} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 - F_{\alpha} S_{\beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \right\} \ln \frac{f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_m}}{s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_m}} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ F_{\beta} S_{\alpha} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 - F_{\alpha} S_{\beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \right\} \ln \frac{F_{\alpha}}{S_{\alpha}} \end{aligned}$$

がわかる。ユニタリー条件は、量子統計を考慮して、

$$\sum_{\beta} S_{\beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 = \sum_{\beta} S_{\beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2$$

なので、

$$\sum_{\beta} S_{\beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 F_{\alpha} = \sum_{\beta} S_{\beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 F_{\alpha} \Rightarrow \sum_{\beta} S_{\beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 F_{\alpha} - \sum_{\beta} S_{\beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 F_{\alpha} = 0$$

が成立する。そこで、この0を適当に加えれば

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{1}{m} \left[\sum_{\alpha, \beta} \left\{ F_{\beta} S_{\alpha} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 - F_{\alpha} S_{\beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \right\} \ln \frac{F_{\alpha}}{S_{\alpha}} + S_{\beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 F_{\alpha} - S_{\beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 F_{\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 \left(F_{\beta} S_{\alpha} \ln \frac{F_{\alpha}}{S_{\alpha}} - F_{\alpha} S_{\beta} \right) - |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \left(F_{\alpha} S_{\beta} \ln \frac{F_{\alpha}}{S_{\alpha}} - F_{\alpha} S_{\beta} \right) \right\} \end{aligned}$$

さらに、第2項に $\{\alpha\}$ と $\{\beta\}$ に対して可能なすべての入れ替えを実行し、

$$\sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \left(F_{\alpha} S_{\beta} \ln \frac{F_{\alpha}}{S_{\alpha}} - F_{\alpha} S_{\beta} \right) \stackrel{\text{すべての可能な入れ替え: } \{\alpha_1 \dots \alpha_m\} \leftrightarrow \{\beta_1 \dots \beta_n\} \text{を施す}}{=} \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 \left(F_{\beta} S_{\alpha} \ln \frac{F_{\beta}}{S_{\beta}} - F_{\beta} S_{\alpha} \right)$$

を得るので、

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 \left(F_{\beta} S_{\alpha} \ln \frac{F_{\alpha}}{S_{\alpha}} - F_{\alpha} S_{\beta} \right) - |\mathcal{M}(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \left(F_{\alpha} S_{\beta} \ln \frac{F_{\alpha}}{S_{\alpha}} - F_{\alpha} S_{\beta} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 \left(F_{\beta} S_{\alpha} \ln \frac{F_{\alpha}}{S_{\alpha}} - F_{\alpha} S_{\beta} \right) - |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 \left(F_{\beta} S_{\alpha} \ln \frac{F_{\beta}}{S_{\beta}} - F_{\beta} S_{\alpha} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 \left(F_{\beta} S_{\alpha} \ln \frac{F_{\alpha}}{S_{\alpha}} - F_{\beta} S_{\alpha} \ln \frac{F_{\beta}}{S_{\beta}} + F_{\beta} S_{\alpha} - F_{\alpha} S_{\beta} \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 \left(F_{\beta} S_{\alpha} \left(\ln \frac{F_{\alpha}}{S_{\alpha}} - \ln \frac{F_{\beta}}{S_{\beta}} \right) + F_{\beta} S_{\alpha} - F_{\alpha} S_{\beta} \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\alpha, \beta} |\mathcal{M}(\beta \rightarrow \alpha)|^2 \left(F_{\beta} S_{\alpha} \ln \frac{F_{\alpha} S_{\beta}}{F_{\beta} S_{\alpha}} + F_{\beta} S_{\alpha} - F_{\alpha} S_{\beta} \right) \end{aligned}$$

になる。ここで、

$$F_{\beta} S_{\alpha} \ln \frac{F_{\alpha} S_{\beta}}{F_{\beta} S_{\alpha}} + F_{\beta} S_{\alpha} - F_{\alpha} S_{\beta} = \int_{F_{\beta} S_{\alpha}}^{F_{\alpha} S_{\beta}} \ln \frac{x}{F_{\alpha} S_{\beta}} dx \quad (F_{\alpha} S_{\beta} \geq F_{\beta} S_{\alpha}), \quad F_{\alpha} S_{\beta} \int_{F_{\alpha} S_{\beta}}^{F_{\beta} S_{\alpha}} \ln \frac{F_{\alpha} S_{\beta}}{x} dx \quad (F_{\alpha} S_{\beta} < F_{\beta} S_{\alpha})$$

に注意すれば、この積分は積分領域で \ln 関数が0か負であることがわかるので、

$$F_{\beta} S_{\alpha} \ln \frac{F_{\alpha} S_{\beta}}{F_{\beta} S_{\alpha}} + F_{\beta} S_{\alpha} - F_{\alpha} S_{\beta} \leq 0 \quad (\text{等号は } F_{\alpha} S_{\beta} = F_{\beta} S_{\alpha} \text{ の時})$$

である。従って、

$$\boxed{\frac{dH}{dt} \leq 0}$$

が成立する。

平衡状態でボルツマンの H 関数が一定になるとき、

$$F_{\alpha} S_{\alpha} = F_{\beta} S_{\alpha}$$

である。つまり、

$$\begin{aligned}\frac{F_\alpha}{S_\alpha} = \frac{F_\beta}{S_\beta} &= \frac{f_{\alpha_1}}{1+\theta_{\alpha_1}f_{\alpha_1}} \cdots \frac{f_{\alpha_m}}{1+\theta_{\alpha_m}f_{\alpha_m}} \\ &= \frac{f_{\beta_1}}{1+\theta_{\beta_1}f_{\beta_1}} \cdots \frac{f_{\beta_n}}{1+\theta_{\beta_n}f_{\beta_n}}\end{aligned}$$

である。平衡状態では、量子数保存があるとき、その量子数を λ_α とすると、

$$\frac{f_\alpha}{1+\theta_\alpha f_\alpha} = e^{-(E_\alpha - \lambda_\alpha \mu)/T}$$

なので、前と同様に

$$\sum_{i=1}^m E_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n E_{\beta_i}, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_{\beta_i}$$

であると、 $dH/dt=0$ になることがわかる。このとき、

$$f_\alpha = \frac{1}{e^{(E_\alpha - \lambda_\alpha \mu)/T} - \theta_\alpha}$$

である。やはり、 H 定理により平衡状態に移行するので、粒子・反粒子で同じ分布関数 (粒子密度)、つまり

粒子・反粒子数は同じ

になり、粒子・反粒子の非対称性はあらわれない。

第4節 CP非保存

さて、CPの保存により

$$\mathcal{M}(i \rightarrow j) \stackrel{\text{CP}}{=} \mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j}) \stackrel{\text{CPT}}{=} \mathcal{M}(j \rightarrow i) \stackrel{\text{CP}}{=} \mathcal{M}(\bar{j} \rightarrow \bar{i})$$

が成立する。そこで、 S 行列を

$$S = I + iT$$

に分解すると、

$$T_{ji} \stackrel{\text{CP}}{=} T_{\bar{j}\bar{i}} \stackrel{\text{CPT}}{=} T_{ij} \stackrel{\text{CP}}{=} T_{\bar{i}\bar{j}} \quad (\text{for } i \neq j) \Leftarrow T_{ji} = \langle j|T|i \rangle$$

であり、従って、遷移確率では、

$$|T_{ji}|^2 = |T_{\bar{j}\bar{i}}|^2 = |T_{ij}|^2 = |T_{\bar{i}\bar{j}}|^2$$

が成り立つ。また、ユニタリテイ ($S^\dagger S = SS^\dagger = I$) から、

$$\begin{aligned}(I+iT)^\dagger (I+iT) &= (I+iT)(I+iT)^\dagger = I \\ \Rightarrow \begin{cases} I+i(T-T^\dagger)+T^\dagger T = I+i(T-T^\dagger)+TT^\dagger \Rightarrow T^\dagger T = TT^\dagger \\ I+i(T-T^\dagger)+TT^\dagger = I \Rightarrow T-T^\dagger = iTT^\dagger \end{cases} \\ \Rightarrow \langle j|(T-T^\dagger)|i \rangle &= i \langle j|TT^\dagger|i \rangle \quad (\text{for } i \neq j) = \langle j|(T-T^\dagger)|i \rangle = i \sum_n \langle j|T|n \rangle \langle n|T^\dagger|i \rangle \\ \Rightarrow T_{ji} - (T^\dagger)_{ji} &= i \sum_n T_{jn} (T^\dagger)_{ni} \Rightarrow T_{ji} - T_{ij}^* = i \sum_n T_{jn} T_{in}^* \quad (T_{ji} = \langle j|T|i \rangle)\end{aligned}$$

なので、

$$\boxed{T_{ji} - T_{ij}^* = i \sum_n T_{jn} T_{in}^* \text{ (ユニタリテイ)}} \Leftarrow T_{ji} = \langle j|T|i \rangle$$

である。CP保存 ($T_{ji} = T_{ij}$) からのズレは、従って、

$$T_{ji} - T_{ij} = i \sum_n T_{jn} T_{in}^* + T_{ij}^* - T_{ij} = i \left(\sum_n T_{jn} T_{in}^* - 2 \text{Im}(T_{ij}) \right)$$

で表せる。また、遷移確率の差 $|T_{ji}|^2 - |T_{ij}|^2$ を目安にすると、

$$\begin{aligned} |T_{ji}|^2 - |T_{ij}|^2 &= \left| T_{ij}^* + i \sum_n T_{jn} T_{in}^* \right|^2 - |T_{ij}|^2 = |T_{ij}^*|^2 + \left| i \sum_n T_{jn} T_{in}^* \right|^2 - |T_{ij}|^2 + (T_{ij}^*)^* \left(i \sum_n T_{jn} T_{in}^* \right) + \left(i \sum_n T_{jn} T_{in}^* \right)^* (T_{ij}^*) \\ &= \left| \sum_n T_{jn} T_{in}^* \right|^2 + T_{ij} i \sum_n T_{jn} T_{in}^* - i \sum_n T_{jn}^* T_{in} T_{ij} = \left| \sum_n T_{jn} T_{in}^* \right|^2 + 2i \text{Im} \left[\left(\sum_n T_{jn} T_{in}^* \right) T_{ij} \right] \end{aligned}$$

になるので、

$$|T_{ji}|^2 - |T_{ij}|^2 = \left| \sum_n T_{jn} T_{in}^* \right|^2 + 2i \text{Im} \left[\left(\sum_n T_{jn} T_{in}^* \right) T_{ij} \right]$$

を得る。この結果から、 $i \rightarrow j$ の遷移が何か小さなパラメータで支配されているとき、

$$T_{ji} = \mathcal{O}(\alpha) \Rightarrow |T_{ji}|^2 - |T_{ij}|^2 = \left| \sum_n T_{jn} T_{in}^* \right|^2 + 2i \text{Im} \left[\left(\sum_n T_{jn} T_{in}^* \right) T_{ij} \right] |T_{ji}|^2 - |T_{ij}|^2 = \mathcal{O}(\alpha^3)$$

つまり、CP非保存の効果 ($|T_{ji}|^2 - |T_{ij}|^2 = \mathcal{O}(\alpha^3)$) は、元の過程 ($|T_{ji}|^2, |T_{ij}|^2 = \mathcal{O}(\alpha^2)$) に比べて少なくともオーダーが一つ上がる ($\alpha^2 \rightarrow \alpha^3$) ことになる。

もう少し詳しく。CP非保存の効果は、

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(i \rightarrow j) &\stackrel{\text{CP}}{=} \mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j}) \stackrel{\text{CPT}}{=} \mathcal{M}(j \rightarrow i) \stackrel{\text{CP}}{=} \mathcal{M}(\bar{j} \rightarrow \bar{i}) \Leftarrow \mathcal{M}(i \rightarrow j) = \langle j|S|i \rangle \\ T_{ji} &\stackrel{\text{CP}}{=} T_{\bar{j}\bar{i}} \stackrel{\text{CPT}}{=} T_{ij} \stackrel{\text{CP}}{=} T_{\bar{j}\bar{i}} \text{ (for } i \neq j) \Leftarrow T_{ji} = \langle j|T|i \rangle \end{aligned}$$

において、CP等号からのズレとして現れる。そこで、

$$|T_{ji}|^2 - |T_{ij}|^2 \neq 0 \Rightarrow |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 - |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})|^2 \neq 0$$

を調べてみる。この要請は (オーダーが一つ上がる) ループ効果を必要とする。とくに、バリオン数を生成する過程では、

$$\boxed{\sum_{j \in B} |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 - \sum_{\bar{j} \in \bar{B}} |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})|^2 \neq 0}$$

ループ効果自身がバリオン数 (B) 非保存の相互作用になる必要がある。まず、

$$\mathcal{M}(i \rightarrow j) = \sum_n \mathcal{M}_1(i \rightarrow n) \mathcal{M}_2(n \rightarrow j)$$

と分解する。ここに

$$\mathcal{M}_1(i \rightarrow n): \text{B 非保存で C P 保存}$$

$$\mathcal{M}_2(n \rightarrow j): \text{B 保存で C P 非保存}$$

とする。すると、

$$\begin{aligned} \sum_{j \in B} |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 &= \sum_{j \in B} \left(\sum_n \mathcal{M}_1(i \rightarrow n) \mathcal{M}_2(n \rightarrow j) \right) \left(\sum_{n'} \mathcal{M}_1(i \rightarrow n') \mathcal{M}_2(n' \rightarrow j) \right)^* \\ &= \sum_{j \in B, n, n'} \mathcal{M}_1^*(i \rightarrow n) \mathcal{M}_2^*(n \rightarrow j) \mathcal{M}_1(i \rightarrow n') \mathcal{M}_2(n' \rightarrow j) \\ &= \sum_{n, n'} \left(\sum_{j \in B} \mathcal{M}_2^*(n \rightarrow j) \mathcal{M}_2(n' \rightarrow j) \right) \mathcal{M}_1^*(i \rightarrow n) \mathcal{M}_1(i \rightarrow n') \end{aligned}$$

ところが、 \mathcal{M}_2 は B 保存なので、終状態 (j) が始状態 (n, n') の B と同じ状態に限られていてもユニタリティ:

$$\sum_{j \in B} \mathcal{M}_2^*(n \rightarrow j) \mathcal{M}_2(n' \rightarrow j) = \delta_{nn'}$$

が成り立つ。従って、

$$\begin{aligned} \sum_{j \in B} |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 &= \sum_{n, n'} \left(\sum_{j \in B} \mathcal{M}_2^*(n \rightarrow j) \mathcal{M}_2(n' \rightarrow j) \right) \mathcal{M}_1^*(i \rightarrow n) \mathcal{M}_1(i \rightarrow n') \\ &= \sum_{n, n'} \delta_{nn'} \mathcal{M}_1^*(i \rightarrow n) \mathcal{M}_1(i \rightarrow n') \Big|_{n, n' \text{ with the same } B} = \sum_{n \in B} \mathcal{M}_1^*(i \rightarrow n) \mathcal{M}_1(i \rightarrow n) \\ &= \sum_{n \in B} |\mathcal{M}_1(i \rightarrow n)|^2 \end{aligned}$$

ところで、 \mathcal{M}_1 は C P 保存の場合なので、

$$\mathcal{M}_1(i \rightarrow n) \stackrel{\text{CP}}{=} \mathcal{M}_1(\bar{i} \rightarrow \bar{n})$$

が成立し、

$$\sum_{j \in B} |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 = \sum_{n \in B} |\mathcal{M}_1(i \rightarrow n)|^2 = \sum_{\bar{n} \in \bar{B}} |\mathcal{M}_1(\bar{i} \rightarrow \bar{n})|^2 = \sum_{\bar{j} \in \bar{B}} |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})|^2$$

なので、

$$\sum_{j \in B} |\mathcal{M}(i \rightarrow j)|^2 - \sum_{\bar{j} \in \bar{B}} |\mathcal{M}(\bar{i} \rightarrow \bar{j})|^2 = 0$$

を得る。従って、バリオン数を生成することはできない。つまり、「 \mathcal{M}_2 は B 保存」なので、バリオン数を生成できないことがわかった。バリオン数生成には、

$$\mathcal{M}(i \rightarrow j) = \sum_n \mathcal{M}_1(i \rightarrow n) \mathcal{M}_2(n \rightarrow j) \begin{cases} \mathcal{M}_1(i \rightarrow n): \text{B 非保存で C P 保存} \\ \mathcal{M}_2(n \rightarrow j): \text{B 非保存で C P 非保存} \end{cases}$$

が必要になることがわかる。