

ラプラス変換

I. ラプラス変換・逆変換

ラプラス変換：

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (\text{Re}(s) > 0) \quad \leftarrow s \text{ は複素数でもよい} \quad (1.1)$$

よりラプラス逆変換：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{sx} F(s) ds \quad (1.2)$$

を導く。更に、(1.2)を計算するのに

● 複素定積分の留数定理を用いると、(1.2)の計算結果が公式として与えられるという結果を用いる。

(1.1)から(1.2)を出すために、既に知っているフーリエ変換／逆変換：

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk \dots \text{フーリエ変換} \\ \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \dots \text{フーリエ逆変換} \end{cases} \quad (1.3)$$

の知識を用いる。まずフーリエ逆変換

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad (1.4)$$

を用いるために、 $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$ の \int_0^{∞} を $\int_{-\infty}^{\infty}$ にする：

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \Rightarrow F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} ??? dx \quad (1.5)$$

そのため、 $x: -\infty \rightarrow 0$ では 0 の関数 $\hat{f}(x)$ ：

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) \dots x > 0 \\ 0 \dots x < 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

を用いて、

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} \hat{f}(x) dx \quad (1.7)$$

とする。すると、 $e^{-sx}\hat{f}(x)$ のフーリエ逆変換の：改めて、関数 $g(x), \tilde{g}(k)$ として

$$\tilde{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} g(x) dx \quad (1.8)$$

を考え、 $g(x) = e^{-sx}\hat{f}(x)$ を代入すれば

$$\begin{aligned} \tilde{g}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \overbrace{e^{-sx}\hat{f}(x)}^{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+ik)x} \hat{f}(x) dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) e^{-(s+ik)x} \hat{f}(x) dx \Leftarrow \begin{cases} \hat{f}(x) = f(x) \cdots x > 0 \\ \hat{f}(x) = 0 \cdots x < 0 \end{cases} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+ik)x} f(x) dx = F(s+ik) \Leftarrow F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \end{aligned} \quad (1.9)$$

を得る。つまり、

$$\tilde{g}(k) = F(s+ik) \quad (1.10)$$

である。元の関数 $g(x) = e^{-sx}\hat{f}(x)$ は、フーリエ変換： $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{g}(k) dx$ より、

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{g}(k) dx \\ \Rightarrow \overbrace{e^{-sx}\hat{f}(x)}^{g(x)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \overbrace{F(s+ik)}^{\tilde{g}(k)} dk \\ \Rightarrow \hat{f}(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{sx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(s+ik) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+ik)x} F(s+ik) dk \end{aligned} \quad (1.11)$$

なので、

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+ik)x} F(s+ik) dk \quad (1.12)$$

を得る。ここで、(1.1)のラプラス変換での s が複素数であるので、 $\text{Re}(s) > 0$ を考慮して

$$\begin{cases} s = \sigma + i\omega \quad (\sigma, \omega: \text{実数}) \\ \sigma > 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

として代入すると

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i(k+\omega))x} F(\sigma+i(k+\omega)) dk \quad (1.14)$$

と表わせる。更に、(1.14)の積分変数 $\sigma + i(k + \omega)$ を改めて複素数 s :

$$s = \sigma + i(k + \omega) \tag{1.15}$$

と表わすと、

$$ds = idk \tag{1.16}$$

であり、積分範囲は

$$k: -\infty \rightarrow \infty \xRightarrow{s = \sigma + i(k + \omega)} s: \sigma + i(-\infty + \omega) \rightarrow \sigma + i(\infty + \omega) \Rightarrow s: \sigma - i\infty \rightarrow \sigma + i\infty \tag{1.17}$$

と変更を受け

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma + i(k + \omega))x} F(\sigma + i(k + \omega)) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} F(s) (-ids) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} F(s) ds \tag{1.18}$$

を得る。最終的に、

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} F(s) ds \quad (\sigma > 0) \begin{cases} \hat{f}(x) = f(x) \cdots x > 0 \\ \hat{f}(x) = 0 \cdots x < 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

が

- $\hat{f}(x)$ のラプラス逆変換

になる。ここまで、まだ

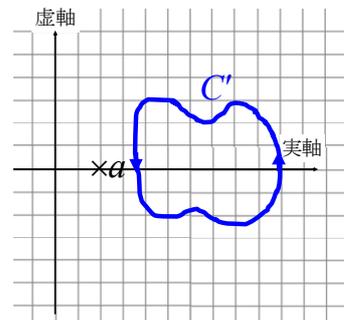
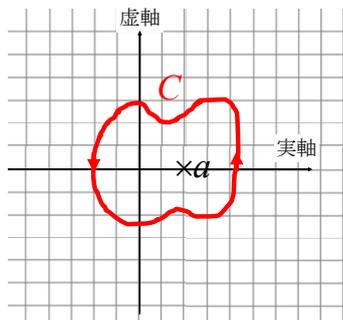
- $f(x)$ のラプラス逆変換は、わからない

ので、次に、(1.19)から $f(x)$ のラプラス逆変換を求める。

II. ラプラス逆変換と留数定理

(1.19)の積分 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} F(s) ds$ ($\sigma > 0$) は、複素定積分なので、**留数定理**を用いるが、定積分経路によ

って複素定積分の値が変わる。つまり、



$$\text{定積分経路: } C \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} g^{(n)}(a)$$

$$\text{定積分経路: } C' \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 0$$

である。このように、同じ複素定積分でも、積分値が 0 になる場合があるので、 $\hat{f}(x)$ の場合分けと関連づける事ができ、(1.6) の条件として

$$\begin{cases} \hat{f}(x) = f(x) \cdots x > 0 \\ \hat{f}(x) = 0 \cdots x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} g^{(n)}(a) = f(x) \\ x < 0 \Rightarrow \hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

の利用を考えると

$$f(x) \left(\stackrel{\text{留数定理}}{=} \frac{1}{n!} g^{(n)}(a) \right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (1.21)$$

と表わせる。ところで、

- $g^{(n)}(a)$ には、変数 x がないので、 x の関数 ($f(x)$) ではない

$$\triangleright \overbrace{f(x)}^{x \text{ を含む}} \stackrel{???}{=} \frac{1}{n!} \overbrace{g^{(n)}(a)}^{x \text{ を含まない}}$$

ので矛盾があるように見えるが、実際には、

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} F(s) ds \quad (1.22)$$

に応用するので、

$$g\left(z, \overset{\downarrow}{x}\right) = e^{-\overset{\downarrow}{x}z} G(z) \quad (x > 0) \quad (1.23)$$

の様に「 x の関数」であり

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \overbrace{\frac{e^{-zx} G(z)}{(z-a)^{n+1}}}^{g(z,x)} dz = \frac{1}{n!} g^{(n)}(a, x) \Leftarrow \boxed{g(z, x) = e^{-zx} G(z)} \quad (x > 0) \quad (1.24)$$

と表せば、 x を含んでいるので、

- $g^{(n)}(a, x)$ として、変数 x を含み x の関数 ($f(x)$) である

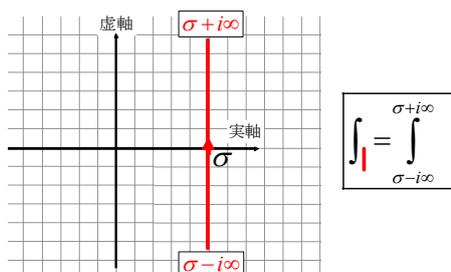
$$\triangleright \overbrace{f(x)}^{x \text{ を含む}} = \frac{1}{n!} \overbrace{g^{(n)}(a, x)}^{x \text{ を含む}} \Leftarrow g(z, x) = e^{-zx} G(z)$$

と表わせる。

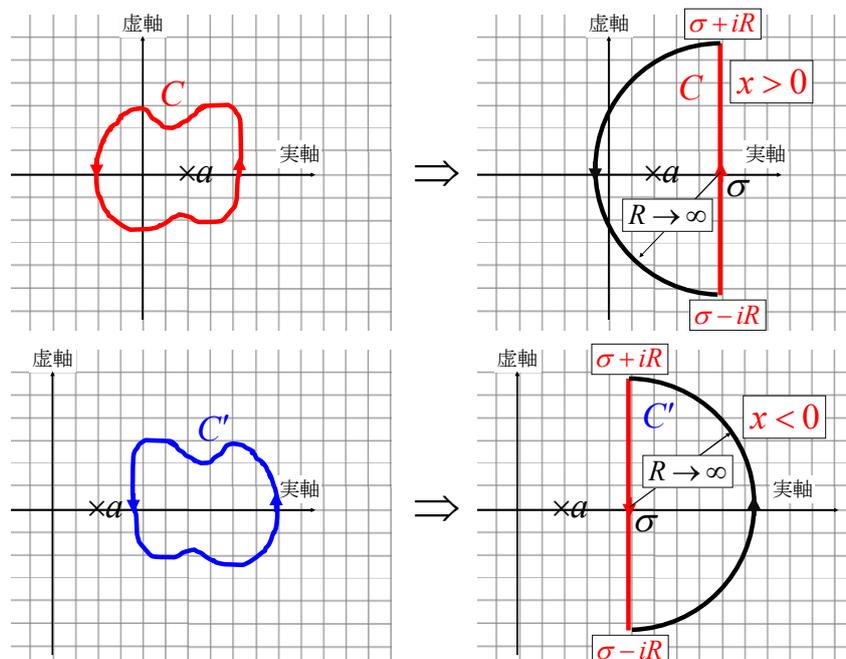
留数定理を用いるには、定積分経路が閉曲線で表わされて閉じている必要がある。そこで、 $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}$ の

積分の $s: (\sigma - i\infty \sim \sigma + i\infty)$ を含む **閉曲線の定積分経路**が必要になる。 $s: (\sigma - i\infty \sim \sigma + i\infty)$ を図で指定す

ると、 $\sigma > 0$ なので



なので、これを含む閉曲線を作れば、通常、**半円を追加して**



のようになる。このとき、定積分経路は、 $\oint = \int_1 + \int_2$ と分解でき、

$$\oint = 0: \text{半径 } R \rightarrow \infty \text{ で } 0 \text{ になるはず} \Rightarrow \begin{cases} C \dots x > 0 \\ C' \dots x < 0 \end{cases} \text{ のとき、} 0 \text{ になる}$$

事を確認すれば（【付録】で証明する）

$$\oint = \int_1 + \int_2 = \int_1 = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty}$$

を得る。従って、期待通り**留数定理**より

$$\begin{cases} \hat{f}(x) = f(x) \dots x > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z, x)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{g(s, x)}{(s-a)^{n+1}} ds = \frac{1}{n!} g^{(n)}(a, x) = f(x) \\ \hat{f}(x) = 0 \dots x < 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{g(z, x)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{g(s, x)}{(s-a)^{n+1}} ds = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

と計算できるので

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{g(s, x)}{(s-a)^{n+1}} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z, x)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} g^{(n)}(a, x) \quad (g^{(0)}(a, x) = g(a, x), 0! = 1) \quad (1.26)$$

を得る。まとめると

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{g(s, x)}{(s-a)^{n+1}} ds = \frac{1}{n!} g^{(n)}(a, x) \quad (g^{(0)}(a, x) = g(a, x), 0! = 1) \quad (1.27)$$

になる。

Ⅲ.留数定理によるラプラス逆変換の確認

ラプラス逆変換(1.2)の複素定積分

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} F(s) ds \quad (1.28)$$

は、次の**特別な場合**：

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \quad (1.29)$$

では

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx}}{(s-a)^{n+1}} ds = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n e^{sx}}{ds^n} \right|_{s=a} = \frac{x^n e^{ax}}{n!} \quad (1.30)$$

の様に**留数定理**を用いて計算できる。計算できた結果を再度**ラプラス変換**(1.1)すれば、(1.29)の $F(s)$ に戻る。つまり、

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \Rightarrow \frac{1}{(s-a)^{n+1}} = \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{x^n e^{ax}}{n!} dx \quad (1.31)$$

と x 積分の結果がわかっている。このような**特別な場合**では、

- x 積分の答えが分かる： $\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{x^n e^{ax}}{n!} dx = \frac{1}{(s-a)^{n+1}}$ (1.32)

ので、

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{x^n e^{ax}}{n!} dx \stackrel{\text{もし正しく積分できれば}}{=} \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \quad (1.33)$$

の結果が得られるはずである。そこで、

- $\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{x^n e^{ax}}{n!} dx$ を**積分計算**して、積分結果が $\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$ になる事を**確認**する

ことを見してみる。

$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{x^n e^{ax}}{n!} dx$ の積分にはガンマ関数 $\Gamma(x)$ を用いると簡単に計算できる。 $\Gamma(x)$ とは、

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \Rightarrow \begin{cases} \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ \Gamma(n+1) = n! \quad (n=0,1,2,3,\dots) \end{cases} \quad (1.34)$$

と定義される。従って、

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{x^n e^{ax}}{n!} dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-\overbrace{(s-a)}^{\text{正}}} x dx = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \frac{1}{(s-a)^n} ((s-a)x)^n e^{-(s-a)x} \frac{1}{s-a} d(s-a)x \quad (1.35)$$

に於て、 $y = (s-a)x$ とすると、(1.34)より

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{x^n e^{ax}}{n!} dx = \frac{1}{n!} \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \int_0^{\infty} \overbrace{y^n e^{-y}}^{\Gamma(n+1)} dy = \frac{1}{n!} \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \overbrace{\Gamma(n+1)}^{n!} = \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \quad (1.36)$$

を得る。ここで、(1.35)において、 $\Gamma(x)$ を用いるために

$$\boxed{s > a}$$

の条件がつく。その結果、

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{x^n e^{ax}}{n!} dx \stackrel{\text{正しく積分できて}}{=} \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \quad (1.37)$$

とわかった。以上から

- $\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{x^n e^{ax}}{n!} dx$ を**積分計算**して、積分結果が $\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$ になる事を**確認できた!!!**

事になる。従って、

$$\boxed{\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \leftarrow s > a \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} F(s) ds = \frac{x^n e^{ax}}{n!} \end{aligned}} \quad (1.38)$$

を得る。

IV.三角関数・双曲線関数

摩擦のある振動を記述する微分方程式を解く際に必要になる三角関数や双曲線関数のラプラス変換をあらかじめ求めておく。三角関数：

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} \leftarrow \begin{cases} e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx \\ e^{-ikx} = \cos kx - i \sin kx \end{cases} \quad (1.39)$$

や双曲線関数：

$$\cosh kx = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}, \sinh kx = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} \Leftarrow \begin{cases} e^{kx} = \cosh kx + \sinh kx \\ e^{-kx} = \cosh kx - \sinh kx \end{cases} \quad (1.40)$$

を含む $f(x)$ のラプラス変換を求める。つまり

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} \cos kx & \begin{cases} e^{ax} \cosh kx \\ e^{ax} \sinh kx \end{cases} \end{cases} \quad (1.41)$$

のラプラス変換を求める。摩擦のある場合に、バネの振動を起こす力は、バネの伸びを、 x として

- バネ力 = $-kx$ ($k > 0$:ばね定数)
- 摩擦力 = $-2Rv = -2R \frac{dx}{dt}$ ($R > 0$:摩擦の強さ)

なので、力を $m \frac{d^2x}{dt^2}$ で置き換えて、運動方程式：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -2R \frac{dx}{dt} - kx \quad (1.42)$$

を得る。両辺を m で割って

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{\omega_0^2}{m} x = 0 \quad (1.43)$$

なので、それぞれの係数：

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ \gamma = \frac{R}{m} \end{cases} \quad (1.44)$$

として、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.45)$$

である。特に、 $\gamma = 0$ の場合の、解 x は、

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (1.46)$$

と知っているので、(1.45)をラプラス変換で解くには、三角関数のラプラス変換が必要になる。また、(1.39)から、

$$\begin{cases} \cos(ik)x = \frac{e^{i(ik)x} + e^{-i(ik)x}}{2} = \frac{e^{-kx} + e^{kx}}{2} = \cosh kx \\ \sin(ik)x = \frac{e^{i(ik)x} - e^{-i(ik)x}}{2i} = \frac{e^{-kx} - e^{kx}}{2i} = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{-2i} = i \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = i \sinh kx \end{cases} \quad (1.47)$$

がわかるので、双曲線関数のラプラス変換も、三角関数のラプラス変換の結果から求められる。

三角関数

ラプラス変換は、

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} e^{ax} \cos kx \\ e^{ax} \sin kx \end{cases} \quad (1.48)$$

であるので、

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx \Rightarrow e^{ax} e^{ikx} = e^{(a+ik)x} = e^{ax} \cos kx + i e^{ax} \sin kx \quad (1.49)$$

を用いて、

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{(a+ik)x} dx = \int_0^{\infty} \overbrace{e^{-sx} e^{ax}}^{\text{実部}} \cos kx dx + i \int_0^{\infty} \overbrace{e^{-sx} e^{ax}}^{\text{虚部}} \sin kx dx \quad (1.50)$$

を計算すれば良い。計算は簡単にでき、

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{(a+ik)x} dx = \int_0^{\infty} e^{(a-s+ik)x} dx = \left[\frac{e^{(a-s+ik)x}}{a-s+ik} \right]_0^{\infty} = \frac{e^{(a-s+ik)\infty} - e^{(a-s+ik)\cdot 0}}{a-s+ik} \\ &= \frac{\overbrace{e^{(a-s)\infty}}^0 \overbrace{e^{ik\infty}}^1 - \overbrace{e^{(a-s)\cdot 0}}^1 \overbrace{e^{ik\cdot 0}}^1}{a-s+ik} \quad (s-a > 0 \Rightarrow e^{(a-s)\infty} = e^{-(s-a)\infty} = 0) = \frac{-1}{a-s+ik} = \frac{1}{s-a-ik} \end{aligned} \quad (1.51)$$

なので、

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{(a+ik)x} dx = \frac{1}{s-a-ik} \quad (1.52)$$

を得る。従って、 $F(s) = \frac{1}{s-a-ik}$ の実部と虚部を抜き出せば、 $\int_0^{\infty} \overbrace{e^{-sx} e^{ax} \cos kx dx}^{\text{実部}}, \int_0^{\infty} \overbrace{e^{-sx} e^{ax} \sin kx dx}^{\text{虚部}}$ の積

分結果が分かる。 $\frac{1}{s-a-ik}$ を**有理化の手續き**：

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \quad (1.53)$$

をして、(1.50)と比較すれば

$$F(s) = \frac{s-a+ik}{(s-a)^2+k^2} = \frac{\overbrace{s-a}^{\text{実部}}}{(s-a)^2+k^2} + i \frac{\overbrace{k}^{\text{虚部}}}{(s-a)^2+k^2} = \int_0^{\infty} \overbrace{e^{-sx} e^{ax} \cos kx dx}^{\text{実部}} + i \int_0^{\infty} \overbrace{e^{-sx} e^{ax} \sin kx dx}^{\text{虚部}} \quad (1.54)$$

である。つまり、

$$F(s) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} \cos kx dx = \frac{s-a}{(s-a)^2+k^2} \\ \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} \sin kx dx = \frac{k}{(s-a)^2+k^2} \end{cases} \quad (1.55)$$

を得る。**ラプラス逆変換**と合わせて

$$\left\{ \begin{array}{l} F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2} \\ f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} F(s) ds = e^{ax} \cos kx \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \frac{k}{(s-a)^2 + k^2} \\ f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} F(s) ds = e^{ax} \sin kx \end{array} \right. \quad (1.56)$$

を得る。

双曲線関数

ラプラス変換は、

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} e^{ax} \cosh kx \\ e^{ax} \sinh kx \end{cases} \quad (1.57)$$

であるが、と同様の手続きは使えない。その代り、双曲線関数と三角関数の対応から(1.47)を用いて、三角関数のラプラス変換の結果の(1.54)を使うことができる。(1.47)を考慮して

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} \cos(ik) x dx &= \frac{s-a}{(s-a)^2 + (ik)^2} = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} \cosh kx dx \\ \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} \sin(ik) x dx &= \frac{(ik)}{(s-a)^2 + (ik)^2} = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} i \sinh kx dx \end{aligned} \quad (1.58)$$

より、

$$F(s) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} \cosh kx dx = \frac{s-a}{(s-a)^2 - k^2} \\ \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} \sinh kx dx = \frac{k}{(s-a)^2 - k^2} \end{cases} \quad (1.59)$$

を得る。つまり、

$$\left\{ \begin{array}{l} F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \frac{s-a}{(s-a)^2 - k^2} \\ f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} F(s) ds = e^{ax} \cosh kx \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = \frac{k}{(s-a)^2 - k^2} \\ f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} F(s) ds = e^{ax} \sinh kx \end{array} \right. \quad (1.60)$$

である。

V.微分方程式を解く

(1.45)の微分方程式を $x = f(t)$ として解

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2\gamma \frac{df(x)}{dx} + \omega_0^2 f(x) = 0 \quad (1.61)$$

を解く。(1.61)全体をラプラス変換するので

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 2\gamma \frac{df(x)}{dx} + \omega_0^2 f(x) \right) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} dx + 2\gamma \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{df(x)}{dx} dx + \omega_0^2 \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = 0$$

(1.62)

であり、それぞれの微分項のラプラス変換が必要になる：

$$\odot f(x) \text{ のラプラス変換の定義: } \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx = F(s) \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \odot \frac{df(x)}{dx} \text{ のラプラス変換: } \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{df(x)}{dx} dx &= -\int_0^{\infty} (e^{-sx})' f(x) dx + [e^{-sx} f(x)]_0^{\infty} \leftarrow (e^{-sx})' = -se^{-sx} \\ &= -\int_0^{\infty} (-se^{-sx}) f(x) dx + \left[\overbrace{e^{-s \times \infty}^0} f(\infty) - \overbrace{e^{-s \times 0}^1} f(0) \right] \quad (s > 0) \\ &= s \int_0^{\infty} \overbrace{e^{-sx} f(x)}^{F(x)} dx + \overbrace{e^{-s \times \infty}^0} f(\infty) - \overbrace{e^{-s \times 0}^1} f(0) = sF(s) - f(0) \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} \odot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \text{ のラプラス変換: } \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} dx &= -\int_0^{\infty} (e^{-sx})' \frac{df(x)}{dx} dx + \left[e^{-sx} \frac{df(x)}{dx} \right]_0^{\infty} \\ &= s \int_0^{\infty} \overbrace{e^{-sx} \frac{df(x)}{dx}}^{sF(s)-f(0)} dx + \left[\overbrace{e^{-s \times \infty}^0} \frac{df(\infty)}{dx} - \overbrace{e^{-s \times 0}^1} \frac{df(0)}{dx} \right] \quad (s > 0) \\ &= s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = \boxed{s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)} \end{aligned} \quad (1.65)$$

より、最終的に

$$\boxed{\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx &= F(s) \\ \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{df(x)}{dx} dx &= sF(s) - f(0) \\ \int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} dx &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}} \quad (1.66)$$

を得る。

以上から、微分方程式のラプラス変換(1.62)は、(1.66)を用いて

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\infty} \overbrace{e^{-sx} \frac{d^2 f(x)}{dx^2}}^{s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)} dx + 2\gamma \int_0^{\infty} \overbrace{e^{-sx} \frac{df(x)}{dx}}^{sF(s) - f(0)} dx + \omega_0^2 \int_0^{\infty} \overbrace{e^{-sx} f(x)}^{F(s)} dx = 0 \\ &= F(s) + 2\gamma(sF(s) - f(0)) + \omega_0^2(s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)) \end{aligned} \quad (1.67)$$

なので、

$$F(s) = \frac{sf(0) + f'(0) + 2\gamma f(0)}{s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2} = \frac{(s + 2\gamma)f(0) + f'(0)}{(s + \gamma)^2 + \omega_0^2 - \gamma^2} \quad (1.68)$$

を得る。ここで、 $\omega_0^2 - \gamma^2$ の符号によって m 、3つの場合分けが必要になり

$$\begin{cases} \omega_0^2 - \gamma^2 = k^2 > 0 \quad \dots \gamma: \text{小さい(摩擦弱い)} \\ \omega_0^2 - \gamma^2 = -k^2 < 0 \quad \dots \gamma: \text{大きい(摩擦強い)} \\ \omega_0^2 - \gamma^2 = 0 \end{cases} \quad (1.69)$$

である。従って、ラプラス変換後の関数 $F(s)$ として、それに連れて

$$F(s) = \begin{cases} \frac{(s+2\gamma)f(0) + f'(0)}{(s+\gamma)^2 + k^2} \dots \omega_0^2 - \gamma^2 = k^2 > 0 \\ \frac{(s+2\gamma)f(0) + f'(0)}{(s+\gamma)^2 - k^2} \dots \omega_0^2 - \gamma^2 = -k^2 < 0 \\ \frac{(s+2\gamma)f(0) + f'(0)}{(s+\gamma)^2} \dots \omega_0^2 - \gamma^2 = 0 \end{cases} \quad (1.70)$$

の3種類の関数が得られる。 $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$, $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$ では、 $F(s)$ が分数関数の(1.56)・(1.60)と比較できる。また、 $\omega_0^2 = \gamma^2$ では、の場合は、(1.38)と比較できる。

$$\omega_0^2 - \gamma^2 = k^2 > 0$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{(s+2\gamma)f(0) + f'(0)}{(s+\gamma)^2 + k^2} = \frac{(s+\gamma)f(0)}{(s+\gamma)^2 + k^2} + \frac{\gamma f(0) + f'(0)}{(s+\gamma)^2 + k^2} \\ &= \frac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2 + k^2} f(0) + \frac{k}{(s+\gamma)^2 + k^2} \frac{1}{k} (\gamma f(0) + f'(0)) \\ &\Leftrightarrow a = -\gamma \begin{cases} F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2} \\ f(x) = e^{ax} \cos kx \end{cases} \quad \begin{cases} F(s) = \frac{k}{(s-a)^2 + k^2} \\ f(x) = e^{ax} \sin kx \end{cases} \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$f(x) = \overbrace{f(0)}^A e^{-\gamma x} \cos kx + \frac{\overbrace{\gamma f(0) + f'(0)}^B}{k} e^{-\gamma x} \sin kx = e^{-\gamma x} (A \cos kx + B \sin kx)$$

$$\omega_0^2 - \gamma^2 = k^2 < 0$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{(s+2\gamma)f(0) + f'(0)}{(s+\gamma)^2 - k^2} = \frac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2 - k^2} f(0) + \frac{k}{(s+\gamma)^2 - k^2} \frac{1}{k} (\gamma f(0) + f'(0)) \\ &\Leftrightarrow a = -\gamma \begin{cases} F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 - k^2} \\ f(x) = e^{ax} \cosh kx \end{cases} \quad \begin{cases} F(s) = \frac{k}{(s-a)^2 - k^2} \\ f(x) = e^{ax} \sinh kx \end{cases} \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$f(x) = \overbrace{f(0)}^A e^{-\gamma x} \cosh kx + \frac{\overbrace{\gamma f(0) + f'(0)}^B}{k} e^{-\gamma x} \sinh kx = e^{-\gamma x} (A \cosh kx + B \sinh kx)$$

$$\omega_0^2 - \gamma^2 = 0$$

$$F(s) = \frac{(s+2\gamma)f(0) + f'(0)}{(s+\gamma)^2} = \frac{s+\gamma}{(s+\gamma)^2} f(0) + \frac{1}{(s+\gamma)^2} (\gamma f(0) + f'(0))$$

$$= \frac{1}{s+\gamma} f(0) + \frac{1}{(s+\gamma)^2} (\gamma f(0) + f'(0))$$

$$\Leftrightarrow G(s) = 1 \begin{cases} F(s) = \frac{G(s)}{s-a} \\ f(x) = e^{ax} G(a) \end{cases} \quad \begin{cases} F(s) = \frac{G(s)}{(s-a)^{n+1}} = \frac{G(s)}{(s-a)^2} \\ f(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{da^n} (e^{ax} G(a)) = \frac{de^{ax}}{da} \end{cases} \quad (1.73)$$

$$f(x) = \overbrace{f(0)}^A e^{-\gamma x} + \overbrace{\frac{\gamma f(0) + f'(0)}{k}}^B \left[\frac{de^{ax}}{da} \right]_{a=-\gamma} = Ae^{-\gamma x} + Bxe^{-\gamma x} = e^{-\gamma x} (A + Bx)$$

と計算できる。以上から、微分方程式(1.61)の解は・・・

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\gamma x} (A \cos kx + B \sin kx) & \dots \omega_0^2 - \gamma^2 = k^2 \Rightarrow \gamma^2 < \omega_0^2 \dots \gamma: \text{小さい(摩擦弱い)} \\ e^{-\gamma x} (A + Bx) & \dots \omega_0^2 = \gamma^2 \Rightarrow \gamma^2 = \omega_0^2 \dots \gamma: \text{変わり目の境界} \\ e^{-\gamma x} (A \cosh kx + B \sinh kx) & \dots \gamma^2 - \omega_0^2 = k^2 \Rightarrow \gamma^2 > \omega_0^2 \dots \gamma: \text{大きい(摩擦強い)} \end{cases} \quad (1.74)$$

である。(1.74)に有るように、 γ の強さによって、振動の様子が変化することがわかる。

付録

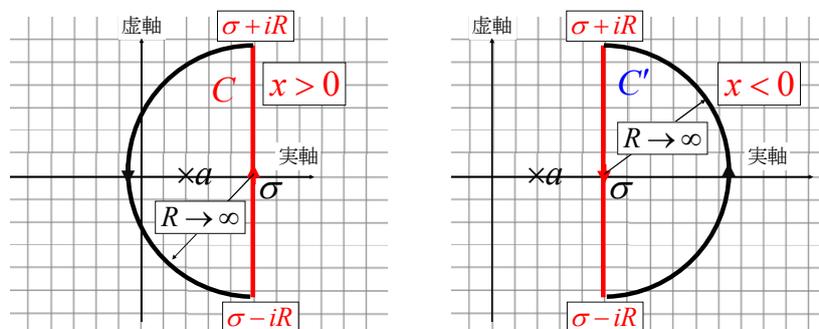
複素定積分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z,x)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{C}} \frac{g(z,x)}{(z-a)^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{I}} \frac{g(z,x)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (x > 0)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{g(z,x)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{C}'} \frac{g(z,x)}{(z-a)^{n+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{I}} \frac{g(z,x)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (x < 0)$$

(1.75)

は、



を積分経路として持つ。そこで、複素定積分の結果が、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\text{C}} \frac{g(z,x)}{(z-a)^{n+1}} dz = 0 \quad (x > 0) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{C}'} \frac{g(z,x)}{(z-a)^{n+1}} dz = 0 \quad (x < 0)$$

であると、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\text{or } C')} \frac{g(z, x)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_1 \frac{g(z, x)}{(z-a)^{n+1}} dz \stackrel{\text{同じ事}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{g(s, x)}{(s-a)^{n+1}} ds \quad (1.76)$$

と計算ができる。

この証明、つまり、

- 右半円と左半円の定積分が 0 になること

を示す必要がある。

左半円の定積分が 0

公式

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)| dz \quad (1.77)$$

を用いると、

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}} |f(z)| dz = 0 \quad (1.78)$$

を証明すれば良い。左半円 \mathcal{C} 上の点 z は、

$$z - \sigma = Re^{i\theta} \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right) = Re^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (1.79)$$

と表わせ、 $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ より

$$z = \sigma + iRe^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (1.80)$$

を得る。求める積分は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{e^{zx} G(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (1.81)$$

なので、

$$\int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz = \int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} e^{zx} f(z) dz \Leftarrow f(z) = \frac{G(z)}{(z-a)^{n+1}} \quad (1.82)$$

のタイプである。 $\lim_{R \rightarrow 0} |f(z)| = \infty$ であると、明らかに(1.78)は満たされないので、少なくとも

$$\lim_{R \rightarrow 0} |f(z)| = \text{有限値} (= \varepsilon(R) \text{と表わす}) : z = \sigma + iRe^{i\theta} \text{なので } R \text{による} \quad (1.83)$$

が成立する必要がある。

まず、

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{d(\sigma + iRe^{i\theta})}{d\theta} = iR \frac{de^{i\theta}}{d\theta} = iRie^{i\theta} = -Re^{i\theta} \Rightarrow dz = -Re^{i\theta} d\theta \quad (1.84)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz &= \int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} e^{zx} f(z) dz \quad (z = \sigma + iR e^{i\theta}) \\ &= \int_0^{\pi} e^{(\sigma+iR e^{i\theta})x} f(z) (-R e^{i\theta} d\theta) = -R \int_0^{\pi} e^{\sigma x + iR x e^{i\theta}} f(z) e^{i\theta} d\theta \quad (z = \sigma + iR e^{i\theta}) \end{aligned} \quad (1.85)$$

を得る。ここで、

$$e^{\sigma x + iR x e^{i\theta}} = e^{\sigma x + iR x (\cos \theta + i \sin \theta)} = e^{\sigma x} e^{-R x \sin \theta + iR x \cos \theta} \quad (1.86)$$

を用いると、

$$\int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz = -R e^{\sigma x} \int_0^{\pi} e^{-R x \sin \theta + iR x \cos \theta} f(z) e^{i\theta} d\theta \quad (z = \sigma + iR e^{i\theta}) \quad (1.87)$$

になる。そこで、 $\left| \int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |e^{zx} f(z)| dz$ を用いて、

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz \right| &= \left| -R e^{\sigma x} \int_0^{\pi} e^{-R x \sin \theta + iR x \cos \theta} f(z) e^{i\theta} d\theta \right| \quad (z = \sigma + iR e^{i\theta}) \\ &\leq R e^{\sigma x} \int_0^{\pi} |e^{-R x \sin \theta + iR x \cos \theta} f(z) e^{i\theta}| d\theta = R e^{\sigma x} \int_0^{\pi} e^{-R x \sin \theta} |f(z)| d\theta \end{aligned} \quad (1.88)$$

を得る。ここで、

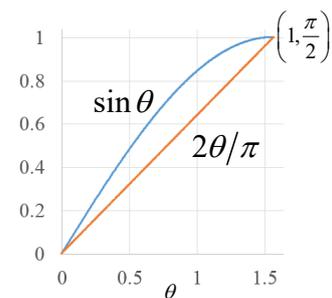
$$|e^{-R x \sin \theta + iR x \cos \theta}| = |e^{-R x \sin \theta} e^{iR x \cos \theta}| = |e^{-R x \sin \theta}| \overbrace{|e^{iR x \cos \theta}|}^{\equiv 1} = e^{-R x \sin \theta} \quad (1.89)$$

を用いた。(1.83)を $|f(z)|$ 適用して、

$$\left| \int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz \right| \leq R \varepsilon(R) e^{\sigma x} \int_0^{\pi} e^{-R x \sin \theta} d\theta \quad (1.90)$$

を得る。更に、積分領域を $(0, \pi)$ から $(0, \pi/2)$ に変更し、図から分かる

$$\boxed{\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.91)$$



の関係をを用いる。そのために、積分範囲を $\pi/2$ の2つの範囲： $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$ に分けて

$$\int_0^{\pi} e^{-R x \sin \theta} f(z) d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-R x \sin \theta} f(z) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R x \sin \theta} f(z) d\theta \quad (1.92)$$

であるが、第2項の $(\pi/2, \pi)$ は

$$\begin{cases} \theta' = \pi - \theta \\ \sin \theta' = \sin \theta \\ d\theta' = -d\theta \end{cases} \quad (1.93)$$

の変数変換を用いる。変数変換により、 $(0, \pi/2)$ になり

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{-Rx \sin \theta} d\theta = - \int_{\pi/2}^0 e^{-Rx \sin \theta'} d\theta' = \int_0^{\pi/2} e^{-Rx \sin \theta'} d\theta' \stackrel{\text{定積分の積分変数}}{=} \int_0^{\pi/2} e^{-Rx \sin \theta} d\theta \quad (1.94)$$

を得る。つまり、積分範囲を $\pi/2$ の 2 つの範囲： $(0, \pi/2)$ では、

$$\int_0^{\pi} e^{-Rx \sin \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-Rx \sin \theta} d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{-Rx \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-Rx \sin \theta} d\theta \quad (1.95)$$

である。(1.91)の不等式より、

$$\int_0^{\pi} e^{-Rx \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-Rx \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-Rx \frac{2\theta}{\pi}} d\theta \quad (1.96)$$

θ 積分を実行して

$$\int_0^{\pi} e^{-Rx \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-Rx \frac{2\theta}{\pi}} d\theta = 2 \left[-\frac{\pi}{2Rx} e^{-Rx \frac{2\theta}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{Rx} (e^{-Rx} - 1) = \frac{\pi}{Rx} (1 - e^{-Rx}) \quad (1.97)$$

である。ここで、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-Rx}) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ \infty & (x < 0) \end{cases}$$

のように

● $x > 0$ や $x < 0$ の値によって、結果が変わる事がわかる。 $-\infty$ はここでは使えないので $x > 0$ の値：

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-Rx}) = 1 \quad (x > 0)$$

を使うことになる。従って、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} e^{-Rx \sin \theta} d\theta \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{Rx} (1 - e^{-Rx}) \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{Rx} \quad (1.98)$$

より、(1.88)は、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} R \varepsilon(R) e^{\sigma x} \int_0^{\pi} e^{-Rx \sin \theta} d\theta \leq \lim_{R \rightarrow \infty} R \varepsilon(R) e^{\sigma x} \frac{\pi}{Rx} = \frac{\pi e^{\sigma x}}{x} \lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon(R) \quad (1.99)$$

となる。以上から

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon(R) = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz \right| = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz = 0 \quad (x > 0) \quad (1.100)$$

なので、条件として

$$\lim_{R \rightarrow 0} |f(z)| = 0 \quad (1.101)$$

を得る。

右半円の定積分が 0

公式

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)| dz \quad (1.102)$$

を用いると、

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}} |f(z)| dz = 0 \quad (1.103)$$

を証明すれば良い。右半円 \mathcal{C} 上の点 z は、

$$z - \sigma = Re^{i\theta} \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) = Re^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (1.104)$$

と表わせ、

$$z = \sigma - iRe^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (1.105)$$

を得る。同様な計算により

$$\left| \int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz \right| \leq R\varepsilon(R) e^{\sigma x} \int_0^{\pi} e^{Rx \sin \theta} d\theta \quad (1.106)$$

を得る。ここで

- (1.90)の $e^{\square Rx \sin \theta}$ と(1.106)の $e^{\square Rx \sin \theta}$ の符号の違い

により

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{Rx}) = 1 \quad (x < 0)$$

なので、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon(R) = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz \right| = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} e^{zx} f(z) dz = 0 \quad (x < 0) \quad (1.107)$$

を得る。条件は、

$$\lim_{R \rightarrow 0} |f(z)| = 0 \quad (1.108)$$

である。

ラプラス変換

ラプラス変換の場合は、

$$f(z) = \frac{G(z)}{(z-a)^{n+1}} \quad (1.109)$$

なので、

$$\lim_{R \rightarrow 0} |f(z)| = \lim_{R \rightarrow 0} \left| \frac{G(z)}{(z-a)^{n+1}} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow 0} G(z) = \text{有限} \begin{cases} z = \sigma + iRe^{i\theta} & (x > 0) \\ z = \sigma - iRe^{i\theta} & (x < 0) \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (1.110)$$

であれば、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(\text{or } C')} \frac{g(z, x)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(z, x)}{(z-a)^{n+1}} dz \stackrel{\text{同じ事}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{g(s, x)}{(s-a)^{n+1}} ds \quad (1.111)$$

が成立する。留数定理により、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zx} G(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \stackrel{\text{留数定理}}{=} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{da^n} (e^{ax} G(a)) \quad (x > 0)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{e^{zx} G(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \stackrel{\text{留数定理}}{=} 0 \quad (x < 0)$$

と計算できる。