

相対性理論

期末レポート

月 日提出

学生証番号：

氏名：

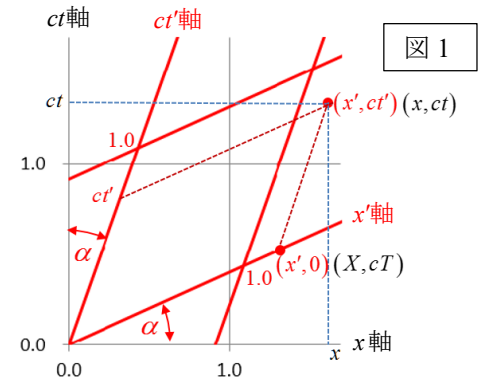
2016 年度秋学期「相対性理論」期末レポート (A4 使用)

筆記試験の代りなので提出期限以降は受け取りません

提出期限：1 月 30 日 (月) 16:45、理学部事務室前の回収ボックスに提出

計算が必要な問題では、途中の計算式を省かないように。計算式がなく解答のみは 0 点です。

1) 【60 点】宇宙基地を一定の速度 v で通過し一直線上を進んでいくロケットの全長を宇宙基地から計測している。ロケット内で計測した全長が L_0 [m] の時、宇宙基地から計測したロケットの全長 L [m] をローレンツ変換を用いて導け。(【第 4 章】参照)



2) 【10 点】図 1 の赤線で表わされた斜交座標 (【第 6 章】参照) を用いて、グラフ上の作図から x' の値を読み取る。斜交座標での x' の値が

$$x' = (x - \beta ct) / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\beta = v/c)$$

のローレンツ変換の値になることを導く。ここで図 1 に於て

- 黒線は静止観測者の直交座標を表わす。
- 赤線は (静止観測者に対して) 一定の速度 v で x 軸上を移動する人の描く直交座標を観測して描いた斜交座標を表わす (図 2 参照)。
- 斜交座標の角度を α とすると $\tan \alpha = \beta$ が成立する。
- x' 座標での点 $(1, 0)$ は、直交座標の点 $\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$ である。

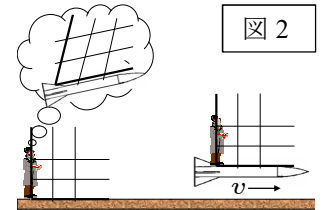


図 1 に於ける直交座標の点 (x, ct) は、斜交座標では (x', ct') とする。 x' 軸

上の x' の座標 $(x', 0)$ を直交座標で (X, cT) とする時、

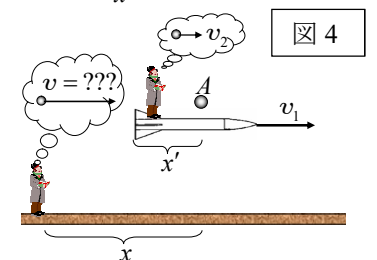
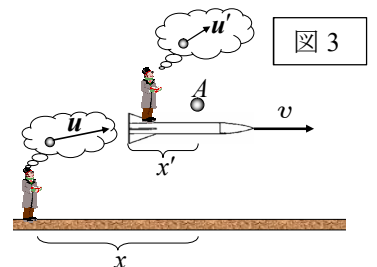
1. 【5 点】 X と cT の値を求めよ。
2. 【5 点】 x' の値はグラフ上では $\sqrt{X^2 + (cT)^2} (=l)$ で与えられる。 l を斜交座標での長さに換

算して $x' = (x - \beta ct) / \sqrt{1 - \beta^2}$ を導け。

3) 【5 点】図 3 のように、球 A の速度を静止観測者が測ると u であるが、一定の速度 v で x 軸上を移動する人が測ると u' であるとする。ローレンツ変換によると、 u' は u で表わす事ができ、 **関係式** :

$$u' : (u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \right)$$

である (【第 10 章】参照)。この **関係式** を用いて (ほかの方法で答えを出しても正解にはなりません)、図 4 のように、 x 軸上を一定の速度 v_1 で移動する物体から x 軸に沿って速度 v_2 の球を投げるとき、静止している人から見た球の速度 v を求めよ。



4) 【25 点】 マックスウエルの電磁気学では、電場 \mathbf{E} は電荷密度 ρ 、磁場 \mathbf{B} は電流密度 \mathbf{j} から生成され (磁石や誘電体は無いとした)、電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} が満たす式:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \dots \text{ガウスの法則}, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \dots \text{アンペールの法則}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \dots \text{光速}$$

としてまとめられている。特殊相対性理論では、4 次元表記の $F^{\mu\nu}, j^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) を用いて、

$$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu \text{ のように、1 つの式としてまとめられる。次の問いに答えよ。 (【第 12 章 電磁気学とローレンツ変換】 Ⅲ. 真空中のマックスウエルの方程式参照)}$$

【ヒント】

$$F^{\mu\nu} (F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}) : \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{従って、} F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0)$$

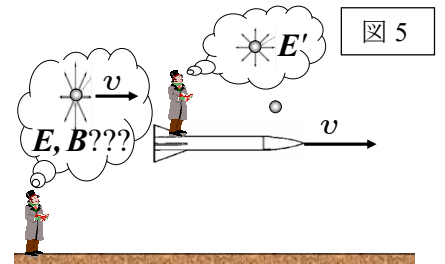
$$j^\mu : (j^0, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, j_x, j_y, j_z) = (c\rho, \mathbf{j})$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} : \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla_x, \nabla_y, \nabla_z \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

- 【5 点】 $\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu$ から $\mu = 0$ のとき $\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を導け。
- 【5 点】 $\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu$ から $\mu = 1, 2, 3$ のとき $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$ を導け。
- 【5 点】 図 5 のように、一定の速度 v で航行するロケット内で静止している点電荷の電荷密度 ρ' 、電場を \mathbf{E}' とする。この電荷を静止している観測者が観測したときの電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} は、

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{j} : \left(\frac{v\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0 \right) \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

で与えられる事を示せ。



- 【5 点】 図 5 の場合に、 $\nabla' \mathbf{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0}$ から磁場 \mathbf{B} は、

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mu_0 j_x \text{ を満たす事を示せ (} \rho, \mathbf{j} \text{ のまま使ってよい。問 3 の様に } \rho, \mathbf{j} \text{ を } \rho' \text{ で}$$

表わす必要は無い)。但し、電場 \mathbf{E} が $\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を満たす事を用いて良い。

【ヒント】 $\nabla'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\nabla_x + \beta \frac{\partial}{\partial ct} \right), \nabla'_y = \nabla_y, \nabla'_z = \nabla_z$ &

$$\begin{cases} \frac{E'_x}{c} = \frac{E_x}{c} \\ \frac{E'_y}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{E_y}{c} - \beta B_z \right) \\ \frac{E'_z}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{E_z}{c} + \beta B_y \right) \end{cases}$$

- 【5 点】 問 4 の【ヒント】の式から、相対性を用いて $\mathbf{B}'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_y + \beta \frac{E_z}{c} \right)$ を導け。