

2016 年度秋学期「相対性理論」期末レポート解答

筆記試験の代りなので提出期限以降は受け取りません

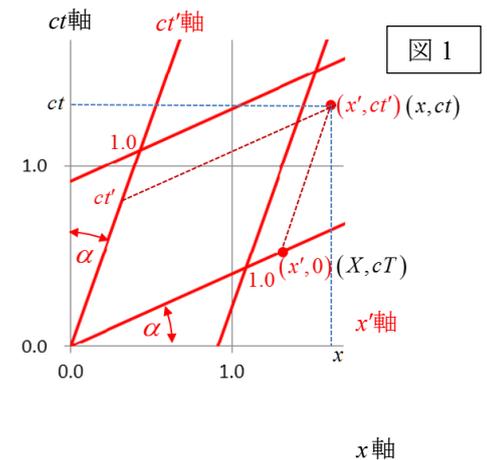
提出期限：1月30日（月）16：45、理学部事務室前の回収ボックスに提出

計算が必要な問題では、途中の計算式を省かないように。計算式がなく解答のみは0点です。

- 1) 【60点】宇宙基地を一定の速度 v で通過し一直線上を進んでいくロケットの全長を宇宙基地から計測している。ロケット内で計測した全長が L_0 [m] の時、宇宙基地から計測したロケットの全長 L [m] をローレンツ変換を用いて導け。（【第4章】参照）

【解答】【第4章 時間の遅れと長さの収縮－II. 長さの収縮】に

解答があります。



- 2) 【10点】図1の赤線で表わされた斜交座標（【第6章】参照）を用いて、グラフ上の作図から x' の値を読み取る。斜交座標での x' の値が

$$x' = (x - \beta ct) / \sqrt{1 - \beta^2} \quad (\beta = v/c)$$

のローレンツ変換の値になることを導く。ここで図1に於て

- 黒線は静止観測者の直交座標を表わす。
- 赤線は（静止観測者に対して）一定の速度 v で x 軸上を移動する人の描く直交座標を観測して描いた斜交座標を表わす（図2参照）。
- 斜交座標の角度を α とすると $\tan \alpha = \beta$ が成立する。
- x' 座標での点 $(1, 0)$ は、直交座標の点 $\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$ である。

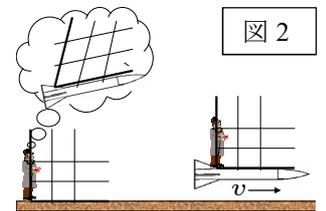


図1に於ける直交座標の点 (x, ct) は、斜交座標では (x', ct') とする。 x' 軸

上の x' の座標 $(x', 0)$ を直交座標で (X, cT) とする時、

1. 【5点】 X と cT の値を求めよ。

【解答】 2つの直線： $Y (= cT) = X \tan \alpha$ と $Y - ct = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) (X - x)$ の交点なので、

$$X = \frac{x - \beta ct}{1 - \beta^2}, \quad cT = \beta \frac{x - \beta ct}{1 - \beta^2} \text{ を得る。}$$

2. 【5点】 x' の値はグラフ上では $\sqrt{X^2 + (cT)^2} (= l)$ で与えられる。 l を斜交座標での長さに換

算して $x' = (x - \beta ct) / \sqrt{1 - \beta^2}$ を導け。

【解答】 $X = \frac{x - \beta ct}{1 - \beta^2}$, $cT = \beta \frac{x - \beta ct}{1 - \beta^2}$ を $l = \sqrt{X^2 + (cT)^2}$ に代入して $l = \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{1 - \beta^2} |x - \beta ct|$ 。座標

$x' > 0$ なので、求め関係式 $x' = (x - \beta ct) / \sqrt{1 - \beta^2} > 0$ より $|x - \beta ct| = x - \beta ct$ 。従って、

$l = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{1-\beta^2} |x - \beta ct| = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{1-\beta^2} (x - \beta ct)$ である。一方、 x' 座標での単位長さは、直交座

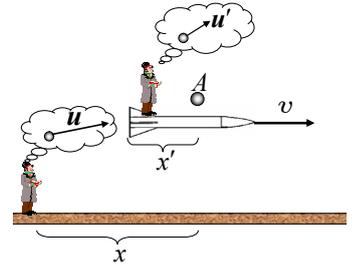
標の点 $\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ より $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ なので、 x' は

$x' = l / \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ で与えられる。以上から、 $x' = (x - \beta ct) / \sqrt{1-\beta^2}$ を得る。

3) 【5 点】 図 3 のように、球 A の速度を静止観測者が測ると u であるが、一定の速度 v で x 軸上を移動する人が測ると u' であるとする。ローレンツ変換によると、 u' は u で表わす事ができ、**関係式**：

$$u' : (u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \right)$$

図 3



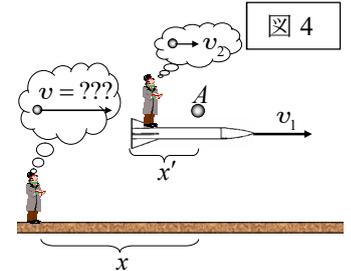
である（【第 10 章】参照）。この**関係式を用いて**（ほかの方法で答えを出しても正解にはなりません）、図 4 のように、 x 軸上を一定の速度 v_1 で移動する物体から x 軸に沿って速度 v_2 の球を投げるとき、静止している人から見た球の速度 v を求めよ。

【解答】 図 4 より、公式に当てはめる千、 $u_x = v, u'_x = v_2, v = v_1$ でそれ以

外は 0 なので、 $u' : (v_2, 0, 0) = \left(\frac{v - v_1}{1 - \frac{v_1}{c^2} v}, 0, 0 \right)$ より、

$$v_2 = \frac{v - v_1}{1 - \frac{v_1}{c^2} v} \Rightarrow v_2 - v_2 \frac{v_1}{c^2} v = v - v_1 \Rightarrow v_2 + v_1 = v \left(1 + v_2 \frac{v_1}{c^2} \right) \Rightarrow v = \frac{v_2 + v_1}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$
 を得る。

図 4



4) 【2.5 点】 マックスウエルの電磁気学では、電場 E は電荷密度 ρ 、磁場 B は電流密度 j から生成され（磁石や誘電体は無いとした）、

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \dots \text{ガウスの法則}, \quad \nabla \times B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 j \dots \text{アンペールの法則}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \dots \text{光速}$$

としてまとめられている。特殊相対性理論では、4 次元表記の $F^{\mu\nu}, j^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) を用いて、

$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu$ のように、1 つの式としてまとめられる。次の問いに答えよ。（【第 12 章 電磁気

学とローレンツ変換】 Ⅲ. 真空中のマックスウエルの方程式参照）

【ヒント】

$$F^{\mu\nu} (F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}) : \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{従って、} F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0)$$

$$j^\mu : (j^0, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, \mathbf{j}_x, \mathbf{j}_y, \mathbf{j}_z) = (c\rho, \mathbf{j})$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} : \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla_x, \nabla_y, \nabla_z \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

1. 【5点】 $\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu$ から $\mu = 0$ のとき $\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を導け。

【解答】 $\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu 0}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{30}}{\partial x^3} = \nabla_x \frac{E_x}{c} + \nabla_y \frac{E_y}{c} + \nabla_z \frac{E_z}{c}$ と $j^0 = c\rho$ より $\nabla \mathbf{E} = \mu_0 c\rho$

に、 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ を用いて、 $\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を得る。

2. 【5点】 $\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu\mu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 j^\mu$ から $\mu = 1, 2, 3$ のとき $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$ を導け。

【解答】 まず $\mu = 1$ の時、 $\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu 1}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial F^{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^0} \left(-\frac{E_x}{c} \right) + \nabla_y B_z + \nabla_z (-B_y)$ と計

算できるので $\nabla_y B_z + \nabla_z (-B_y) = (\nabla \times \mathbf{B})_x$ を用い、 $x^0 = ct$ で置き換えて

$$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu 1}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_x \quad \text{になる。} \quad j^1 = j_x \text{ より } \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu 1}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_x = \mu_0 j_x \text{ が}$$

わかる。 $\mu = 2, 3$ の時も $\nabla_z B_x - \nabla_x B_z = (\nabla \times \mathbf{B})_y$, $\nabla_x B_y - \nabla_y B_x = (\nabla \times \mathbf{B})_z$ を用いれば、

$$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu 2}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_y = \mu_0 j_y, \quad \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F^{\nu 3}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_z = \mu_0 j_z \text{ になるので、ま}$$

とめれば、 $\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}$ が導ける。

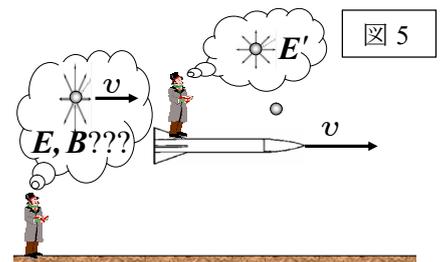
3. 【5点】 (応用問題) 図 5 のように、一定の速度 v で航行するロケット内で静止している点電荷の電荷密度 ρ' 、電場を \mathbf{E}' とする。この電荷を静止している観測者が観測したときの電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} は、

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{j} : \left(\frac{v\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}}, 0, 0 \right) \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right)$$

で与えられる事を示せ。

【解答】 ローレンツ逆変換を用いる。ローレンツ逆変換：

$$j^0 = \frac{j'^0 + \beta j'_x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad j_x = \frac{j'_x + \beta j'^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{で } j^0 = c\rho', \quad j' = \mathbf{0} \text{ より、}$$



答えが分かる。

4. 【5 点】問 3 の場合に、電場 \mathbf{E} が $\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を満たす時、 $\nabla' \mathbf{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0}$ から磁場 \mathbf{B} は、

$(\nabla \times \mathbf{B})_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}_x$ を満たす事を示せ (ρ, \mathbf{j} のまま使ってよい。問 3 の様に ρ, \mathbf{j} を ρ' で表わす必要は無い)。

$$\text{【ヒント】 } \nabla'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\nabla_x + \beta \frac{\partial}{c \partial t} \right), \nabla'_y = \nabla_y, \nabla'_z = \nabla_z \text{ \& } \begin{cases} \frac{\mathbf{E}'_x}{c} = \frac{\mathbf{E}_x}{c} \\ \frac{\mathbf{E}'_y}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\mathbf{E}_y}{c} - \beta \mathbf{B}_z \right) \\ \frac{\mathbf{E}'_z}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\mathbf{E}_z}{c} + \beta \mathbf{B}_y \right) \end{cases}$$

$$\text{【解答】 } \nabla' \mathbf{E}' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\nabla_x + \beta \frac{\partial}{c \partial t} \right) \mathbf{E}_x + \nabla_y c \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\mathbf{E}_y}{c} - \beta \mathbf{B}_z \right) + \nabla_z c \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\mathbf{E}_z}{c} + \beta \mathbf{B}_y \right)。$$

一方、 ρ' はローレンツ変換： $j'^0 = \frac{j^0 - \beta \mathbf{j}_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$ より $c\rho' = \frac{c\rho - \beta \mathbf{j}_x}{\sqrt{1-\beta^2}}$ なので、 $\nabla' \mathbf{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0}$ より

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\nabla_x + \beta \frac{\partial}{c \partial t} \right) \mathbf{E}_x + \nabla_y c \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\mathbf{E}_y}{c} - \beta \mathbf{B}_z \right) + \nabla_z c \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\mathbf{E}_z}{c} + \beta \mathbf{B}_y \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{c\rho - \beta \mathbf{j}_x}{\sqrt{1-\beta^2}}。$$

ここで、 $\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を満たすので、 $\nabla_x \mathbf{E}_x + \nabla_y \mathbf{E}_y + \nabla_z \mathbf{E}_z = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ が成立する。従って、

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\beta \frac{\partial}{c \partial t} \right) \mathbf{E}_x + \nabla_y c \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (-\beta \mathbf{B}_z) + \nabla_z c \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\beta \mathbf{B}_y) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{-\beta \mathbf{j}_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ が成立する。更に}$$

$$-\left(\beta \frac{\partial}{c \partial t} \right) \mathbf{E}_x + \nabla_y c (\beta \mathbf{B}_z) - \nabla_z c (\beta \mathbf{B}_y) = \beta \mathbf{j}_x \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{c} \text{ より } \nabla_y \mathbf{B}_z - \nabla_z \mathbf{B}_y = (\nabla \times \mathbf{B})_x \text{ と } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \text{ を用}$$

いて、整理すれば $(\nabla \times \mathbf{B})_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}_x$ が導かれる。

5. 【5 点】問 3 の場合に、問 4 の【ヒント】の式から、相対性を用いて $\mathbf{B}'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\mathbf{B}_y + \beta \frac{\mathbf{E}_z}{c} \right)$

を導け。

【解答】 $\frac{\mathbf{E}'_z}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\mathbf{E}_z}{c} + \beta \mathbf{B}_y \right)$ に相対性を用いると、 $\mathbf{E}'_z \leftrightarrow \mathbf{E}_z$, $\mathbf{B}_y \rightarrow \mathbf{B}'_y$ と同時に

$$v \rightarrow -v \text{ つまり } \beta \rightarrow -\beta \text{ に変更。その結果、} \frac{\mathbf{E}_z}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-(-\beta)^2}} \left(\frac{\mathbf{E}'_z}{c} + (-\beta) \mathbf{B}'_y \right) \text{ なる}$$

ので $\beta \mathbf{B}'_y = \frac{\mathbf{E}'_z}{c} - \sqrt{1-\beta^2} \frac{\mathbf{E}_z}{c}$ を得る。 $\frac{\mathbf{E}'_z}{c}$ に $\frac{\mathbf{E}'_z}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\mathbf{E}_z}{c} + \beta \mathbf{B}_y \right)$ の式を代入

$$\text{して } \beta \mathbf{B}'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\mathbf{E}_z}{c} + \beta \mathbf{B}_y \right) - \sqrt{1-\beta^2} \frac{\mathbf{E}_z}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\frac{\mathbf{E}_z}{c} - (1-\beta^2) \frac{\mathbf{E}_z}{c} + \beta \mathbf{B}_y \right)$$

$$\text{より } \mathbf{B}'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\mathbf{B}_y + \beta \frac{\mathbf{E}_z}{c} \right) \text{ が導かれる。}$$