

# 物理数学 4

## 期末レポート

月 日提出

学生証番号：

氏名：

# 2016 年度秋学期「物理数学Ⅳ」期末レポート(修正)

## 筆記試験の代りです(提出期限以降は受け取りません)

**提出期限：2月2日(木) 16:45、理学部事務室前の回収ボックスに提出**

計算が必要な問題では、途中の計算式を省かないように。計算式がなく解答のみは0点です。

- 1) 【60 点】 周期  $2\pi$  の関数  $f(x)$  ( $-\pi \leq x < \pi$ ) のフーリエ展開を  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  と

する。以下の問いに答えよ(講義録や教科書参照)。

- a) 【10 点】  $a_0, a_n, b_n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) を  $f(x)$  を用いて表せ。  
 b) 【10 点】  $f(x)=x$  ( $-\pi \leq x < \pi$ ) のとき  $a_0$  を求めよ。  
 c) 【10 点】  $f(x)=x$  ( $-\pi \leq x < \pi$ ) のとき  $b_n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) を求めよ。  
 d) 【10 点】  $f(x)=x$  ( $-\pi \leq x < \pi$ ) のとき  $a_n=0$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) を「関数の偶奇性」を用いて証明せよ。  
 e) 【10 点】 パーセバルの等式  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$  を導け。  
 f) 【10 点】  $f(x)=x$  ( $-\pi \leq x < \pi$ ) のときパーセバルの等式を利用して  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  を証明せよ。

- 2) 【40 点】  $x(t)$  は微分方程式  $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = J(t)$  を満たすとする ( $\gamma, \omega_0$  は定数)。以下の

の問いに答えよ(【注】教科書の解法とは違うので注意せよ)。

- a) 【10 点】 グリーン関数  $G(t)$  は、 $\frac{d^2G(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dG(t)}{dt} + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$  を満たす。 $G(t)$  を用いて

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') J(t') dt'$$

は微分方程式を満たす事を証明せよ(教科書参照)。

- b) グリーン関数  $G(t)$  を以下に従って求めよ。

1. 【10 点】  $G(t)$  のフーリエ変換  $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  より  $\tilde{G}(\omega)$  を求めよ(教科書参照)。

【ヒント】  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$

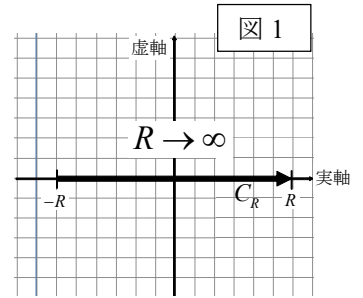
2. 【10 点】 1 で求めた  $\tilde{G}(\omega)$  を用いて  $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  を計算し

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\gamma t} \sin \alpha t & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})$$

を求めよ。

【ヒント】  $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \tilde{G}(z) e^{izt} dz$  で与えら

れる。ここに、積分経路  $C_R$  は図 1 の様に  $x = -R$  から  $x = R$  ( $R \rightarrow \infty$ ) の直線である。次のジョルダンの補題を用いて良い。

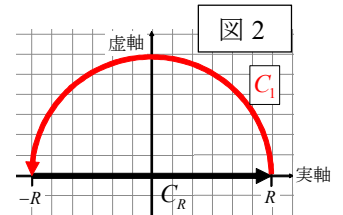


ジョルダンの補題: 平面の上半平面で、 $|z| (= R) \rightarrow \infty$  としたとき  $f(z)$

は一様に 0 に近づくと仮定する。このとき  $t > 0$  とすると

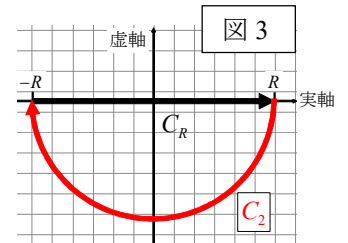
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z) e^{izt} dz = 0$$

ただし積分経路  $C_1$  は、半径  $R$  の円周上  $z = R e^{i\theta}$  を半平面で  $\theta = 0$  から  $\theta = \pi$  (或は、 $\theta = \pi$  から  $\theta = 0$ ) まで動く半円周である (図2)。また、 $t < 0$  とすると



~~$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z) e^{-izt} dz = 0 \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z) e^{izt} dz = 0$$~~

ただし積分経路  $C_2$  は、半径  $R$  の円周上  $z = R e^{i\theta}$  を半平面で  $\theta = \pi$  から  $\theta = 2\pi$  ( $\theta = 2\pi$  から  $\theta = \pi$ ) まで動く半円周である (図3)



c) 【10 点】  $J(t) = F_0 \cos \omega_F t$  ( $F_0, \omega_F$  は定数) とする時、 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') J(t') dt'$  を計算し、

$$x(t) = \boxed{?} e^{i\omega_F t} + \boxed{?} e^{-i\omega_F t} \text{ の形で解答せよ。 b)-2 が解けていなくても } G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\gamma t} \sin \alpha t & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

を用いてよい。

【ヒント】 積分内の  $G(t-t')$  において  $t-t' > 0$  の条件を考慮して積分すること。また、

$$\cos \omega_F t = \frac{e^{i\omega_F t} + e^{-i\omega_F t}}{2}, \quad \sin \alpha t = \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i} \text{ を用いると良い。}$$