

## 2016 年度秋学期「物理数学IV」期末レポート解答

- 1) 【60 点】 周期  $2\pi$  の関数  $f(x)=x$  ( $-\pi \leq x < \pi$ ) のフーリエ展開を  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

とするとき、以下の問いに答えよ (講義録や教科書参照)。

- a)  $a_0, a_n, b_n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) を  $f(x)$  を用いて表せ。【15 点】  
 b)  $a_n=0$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) を「関数の偶奇性」を用いて証明せよ。【15 点】  
 c)  $b_n$  ( $n=1,2,3,\dots$ ) を導け。【15 点】  
 d) パーセバルの等式  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$  を導け。【10 点】

- e) パーセバルの等式を利用して  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  を証明せよ。【5 点】

【解答】 講義録や教科書に解答があります。

- 2) 【40 点】  $x(t)$  は微分方程式  $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = J(t)$  を満たすとする ( $\gamma, \omega_0$  は定数)。以下

の問いに答えよ (【注】教科書の解法とは違うので注意せよ)。

- a) 【10 点】 グリーン関数  $G(t)$  は、 $\frac{d^2 G(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dG(t)}{dt} + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$  を満たす。  $G(t)$  を用いて

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') J(t') dt'$$

は微分方程式を満たす事を証明せよ (教科書参照)。

【解答】

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_s(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx_s(t)}{dt} + \omega_0^2 x_s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^2 G(t-t')}{dt^2} + 2\gamma \frac{dG(t-t')}{dt} + \omega_0^2 G(t-t') \right) J(t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') J(t') dt' \stackrel{\text{公式による}}{=} J(t) \end{aligned}$$

- b) グリーン関数  $G(t)$  を以下に従って求めよ。

1. 【10 点】  $G(t)$  のフーリエ変換  $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  より  $\tilde{G}(\omega)$  を求めよ (教科書参照)。

【ヒント】  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$

【解答】

フーリエ変換：  $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ ,  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega$  を用いて、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{左辺} : \frac{d^2 G(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dG(t)}{dt} + \omega_0^2 G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2) \tilde{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \text{右辺} : \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \end{array} \right.$$

なので、 $(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2) \tilde{G}(\omega) = 1$  より

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2} = -\frac{1}{\omega^2 - 2\gamma i\omega - \omega_0^2} = -\frac{1}{(\omega - i\gamma)^2 + \gamma^2 - \omega_0^2}$$

を得る。 $\gamma < \omega_0$  なので、 $\alpha^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 (> 0)$  とすれば、

$$\tilde{G}(\omega) = -\frac{1}{(\omega - i\gamma)^2 - \alpha^2} = -\frac{1}{(\omega - i\gamma + \alpha)(\omega - i\gamma - \alpha)} \quad (\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})$$

を得る。

2. 【10 点】 1 で求めた  $\tilde{G}(\omega)$  を用いて  $G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$  を計算し

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\gamma t} \sin \alpha t & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})$$

を求めよ。

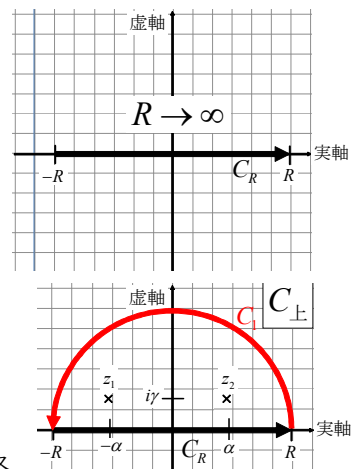
**【解答】**

フーリエ変換の式に代入して

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{1}{(\omega - i\gamma + \alpha)(\omega - i\gamma - \alpha)} \right] e^{i\omega t} d\omega = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega - i\gamma + \alpha)(\omega - i\gamma - \alpha)} e^{i\omega t} d\omega$$

である。留数定理を用いるために積分経路図と共に複素積分に移行して、

$$\begin{aligned} G(t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega - i\gamma + \alpha)(\omega - i\gamma - \alpha)} e^{i\omega t} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{1}{(\omega - i\gamma + \alpha)(\omega - i\gamma - \alpha)} e^{i\omega t} d\omega \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z - i\gamma + \alpha)(z - i\gamma - \alpha)} e^{izt} dz \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} e^{izt} dz \quad \begin{cases} z_1 = -\alpha + i\gamma \\ z_2 = \alpha + i\gamma \end{cases} \end{aligned}$$



ここで、積分経路  $C_+$  を右図のよう取ると留数定理より、 $z_{1,2}$  が閉経路

の中にあるので、2つの留数の寄与を加えて

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} e^{izt} &= 2\pi i \left[ \frac{1}{z-z_2} e^{izt} \right]_{z=z_1} + 2\pi i \left[ \frac{1}{z-z_1} e^{izt} \right]_{z=z_2} = 2\pi i \left( \frac{1}{z_1-z_2} e^{iz_1 t} + \frac{1}{z_2-z_1} e^{iz_2 t} \right) \\ &= 2\pi i \frac{e^{iz_2 t} - e^{iz_1 t}}{z_2 - z_1} = 2\pi i \frac{e^{i(\alpha+i\gamma)t} - e^{i(-\alpha+i\gamma)t}}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha} i e^{-\gamma t} (e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}) = \frac{\pi}{\alpha} i e^{-\gamma t} (2i \sin \alpha t) \\ &= -2 \frac{\pi}{\alpha} e^{-\gamma t} \sin \alpha t \end{aligned}$$

を得る。一方、

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} e^{izt} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} e^{izt} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} e^{izt} dz$$

であるが、**ジョルダンの補助定理**より  $t > 0$  のとき  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} e^{izt} dz = 0$  が保証され

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} e^{izt} dz = \oint_{C_{\pm}} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} e^{izt} = -2 \frac{\pi}{\alpha} e^{-\gamma t} \sin \alpha t \quad (t > 0)$$

より

$$G(t) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} e^{izt} dz = -\frac{1}{2\pi} \left( -2 \frac{\pi}{\alpha} e^{-\gamma t} \sin \alpha t \right) = \frac{1}{\alpha} e^{-\gamma t} \sin \alpha t \quad (t > 0)$$

を得る。 $t < 0$  の場合は、積分経路を  $C_{\text{下}}$  にとる事で**ジョルダンの補助定理**を適用でき、

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_0'} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} e^{izt} dz = 0$  が保証される。留数定理より、 $z_{1,2}$  が閉経

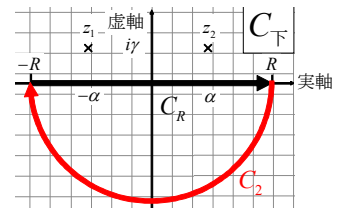
路の外にあるので

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} e^{izt} = 0 \quad (t < 0)$$

を得る。以上から、

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\gamma t} \sin \alpha t & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad (\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2})$$

である。



c) 【10 点】  $J(t) = F_0 \cos \omega_F t$  ( $F_0, \omega_F$  は定数) とする時、 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') J(t') dt'$  を計算し、

$$x(t) = \boxed{?} e^{i\omega_F t} + \boxed{?} e^{-i\omega_F t} \text{ の形で解答せよ。b)-2 が解けていなくても } G(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\gamma t} \sin \alpha t & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

を用いてよい。

【ヒント】 積分内の  $G(t-t')$  において  $t-t' > 0$  の条件を考慮して積分すること。また、

$$\cos \omega_F t = \frac{e^{i\omega_F t} + e^{-i\omega_F t}}{2}, \quad \sin \alpha t = \frac{e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t}}{2i} \text{ を用いると良い。}$$

【解答】  $G(t-t') \neq 0 \Rightarrow t-t' > 0 \Rightarrow t' < t$  なので積分領域  $-\infty < t' < \infty$  は  $-\infty < t' < t$  になる。

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-\gamma(t-t')} \sin \alpha(t-t') F_0 \cos \omega_F t' dt' \quad (t-t' > 0) \stackrel{-\infty < t' < t}{\Rightarrow t' \rightarrow -\infty} = \frac{F_0}{\alpha} \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-t')} \frac{e^{i\alpha(t-t')} - e^{-i\alpha(t-t')}}{2i} \cdot \frac{e^{i\omega_F t'} + e^{-i\omega_F t'}}{2} dt' \\
 &= \frac{F_0}{4i\alpha} \int_{-\infty}^t \left( e^{(i\alpha-\gamma)(t-t')} - e^{(-i\alpha-\gamma)(t-t')} \right) \left( e^{i\omega_F t'} + e^{-i\omega_F t'} \right) dt' \\
 &= \frac{F_0}{4i\alpha} \int_{-\infty}^t \left( e^{(i\alpha-\gamma)(t-t')+i\omega_F t'} - e^{(-i\alpha-\gamma)(t-t')+i\omega_F t'} + e^{(i\alpha-\gamma)(t-t')-i\omega_F t'} - e^{(-i\alpha-\gamma)(t-t')-i\omega_F t'} \right) dt' \\
 &= \frac{F_0}{4i\alpha} \int_{-\infty}^t \left( e^{(i\alpha-\gamma)t+(-i\alpha-\gamma+i\omega_F)t'} - e^{(-i\alpha-\gamma)t+(i\alpha+\gamma+i\omega_F)t'} + e^{(i\alpha-\gamma)t+(-i\alpha-\gamma-i\omega_F)t'} - e^{(-i\alpha-\gamma)t+(-i\alpha-\gamma-i\omega_F)t'} \right) dt' \\
 &= \frac{F_0}{4i\alpha} \left( e^{(i\alpha-\gamma)t} \left[ \frac{e^{(-i\alpha-\gamma+i\omega_F)t'}}{-i(\alpha-\gamma)+i\omega_F} \right]_{-\infty}^t - e^{(-i\alpha-\gamma)t} \left[ \frac{e^{(i\alpha+\gamma+i\omega_F)t'}}{(i\alpha+\gamma)+i\omega_F} \right]_{-\infty}^t \right. \\
 &\quad \left. + e^{(i\alpha-\gamma)t} \left[ \frac{e^{(-i\alpha-\gamma-i\omega_F)t'}}{-i(\alpha-\gamma)-i\omega_F} \right]_{-\infty}^t - e^{(-i\alpha-\gamma)t} \left[ \frac{e^{(-i\alpha-\gamma-i\omega_F)t'}}{-(-i\alpha-\gamma)-i\omega_F} \right]_{-\infty}^t \right) \\
 &= \frac{F_0}{4i\alpha} \left( e^{(i\alpha-\gamma)t} \left( \frac{e^{(-i\alpha-\gamma+i\omega_F)t}}{\gamma+i(\omega_F-\alpha)} + \frac{e^{(-i\alpha-\gamma-i\omega_F)t}}{\gamma+i(-\omega_F-\alpha)} \right) - e^{(-i\alpha-\gamma)t} \left( \frac{e^{(i\alpha+\gamma+i\omega_F)t}}{\gamma+i(\alpha+\omega_F)} + \frac{e^{(i\alpha+\gamma-i\omega_F)t}}{\gamma+i(\alpha-\omega_F)} \right) \right) \\
 &= \frac{F_0}{4i\alpha} \left( \frac{e^{i\omega_F t}}{\gamma+i(\omega_F-\alpha)} + \frac{e^{-i\omega_F t}}{\gamma+i(-\omega_F-\alpha)} - \frac{e^{i\omega_F t}}{\gamma+i(\alpha+\omega_F)} - \frac{e^{-i\omega_F t}}{\gamma+i(\alpha-\omega_F)} \right) \\
 &= \frac{F_0}{4i\alpha} \left( \left( \frac{1}{\gamma+i\omega_F-i\alpha} - \frac{1}{\gamma+i\omega_F+i\alpha} \right) e^{i\omega_F t} + \left( \frac{1}{\gamma-i\omega_F-i\alpha} - \frac{1}{\gamma-i\omega_F+i\alpha} \right) e^{-i\omega_F t} \right) \\
 &= \frac{F_0}{4i\alpha} \left( \frac{\gamma+i\omega_F+i\alpha-(\gamma+i\omega_F-i\alpha)}{(\gamma+i\omega_F-i\alpha)(\gamma+i\omega_F+i\alpha)} e^{i\omega_F t} + \frac{\gamma-i\omega_F+i\alpha-(\gamma-i\omega_F-i\alpha)}{(\gamma-i\omega_F-i\alpha)(\gamma-i\omega_F+i\alpha)} e^{-i\omega_F t} \right) \\
 &= \frac{F_0}{4i\alpha} \left( \frac{2i\alpha}{(\gamma+i\omega_F)^2-(i\alpha)^2} e^{i\omega_F t} + \frac{2i\alpha}{(\gamma-i\omega_F)^2-(i\alpha)^2} e^{-i\omega_F t} \right) \\
 &= \frac{F_0}{2} \left( \frac{1}{\gamma^2+2i\gamma\omega_F-\omega_F^2+\alpha^2} e^{i\omega_F t} + \frac{1}{\gamma^2-2i\gamma\omega_F-\omega_F^2+\alpha^2} e^{-i\omega_F t} \right) \leftarrow \boxed{\alpha^2 = \omega_0^2 - \gamma^2} \\
 &= \frac{F_0}{2} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 + 2i\gamma\omega_F} e^{i\omega_F t} + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 - 2i\gamma\omega_F} e^{-i\omega_F t} \right)
 \end{aligned}$$

である。従って、

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \left. \begin{aligned} &\frac{F_0}{2} \frac{1}{\gamma^2+2i\gamma\omega_F-\omega_F^2+\alpha^2} e^{i\omega_F t} + \frac{F_0}{2} \frac{1}{\gamma^2-2i\gamma\omega_F-\omega_F^2+\alpha^2} e^{-i\omega_F t} \\ &= \frac{F_0}{2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 + 2i\gamma\omega_F} e^{i\omega_F t} + \frac{F_0}{2} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 - 2i\gamma\omega_F} e^{-i\omega_F t} \leftarrow \alpha^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \end{aligned} \right\} \text{解答}
 \end{aligned}$$

もともと  $x(t)$  は実数であるが、結果を実数で表わすのに  $e^{\pm i\omega_F t} = \cos \omega_F t \pm i \sin \omega_F t$  を用いて

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{F_0}{2} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 + 2i\gamma\omega_F} e^{i\omega_F t} + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 - 2i\gamma\omega_F} e^{-i\omega_F t} \right) \\
&= \frac{F_0}{2} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 + 2i\gamma\omega_F} (\cos \omega_F t + i \sin \omega_F t) + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 - 2i\gamma\omega_F} (\cos \omega_F t - i \sin \omega_F t) \right) \\
&= \frac{F_0}{2} \left( \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 + 2i\gamma\omega_F} + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 - 2i\gamma\omega_F} \right) \cos \omega_F t + i \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 + 2i\gamma\omega_F} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2 - 2i\gamma\omega_F} \right) \sin \omega_F t \right)
\end{aligned}$$

更に、分母を実数化して

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{F_0}{2} \left( \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2 - 2i\gamma\omega_F + \omega_0^2 - \omega_F^2 + 2i\gamma\omega_F}{(\omega_0^2 - \omega_F^2 + 2i\gamma\omega_F)(\omega_0^2 - \omega_F^2 - 2i\gamma\omega_F)} \cos \omega_F t + i \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2 - 2i\gamma\omega_F - (\omega_0^2 - \omega_F^2 + 2i\gamma\omega_F)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2 + 2i\gamma\omega_F)(\omega_0^2 - \omega_F^2 - 2i\gamma\omega_F)} \sin \omega_F t \right) \\
&= \frac{F_0}{2} \left( \frac{2(\omega_0^2 - \omega_F^2)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\gamma\omega_F)^2} \cos \omega_F t + i \frac{-4i\gamma\omega_F}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\gamma\omega_F)^2} \sin \omega_F t \right) \\
&= \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\gamma\omega_F)^2} \left( (\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos \omega_F t + 2\gamma\omega_F \sin \omega_F t \right)
\end{aligned}$$

である。